I. V. Kamenev, An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order, *Mat. Zametki*, 1978, Volume 23, Issue 2, 249–252

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 23, № 2 (1978)

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. В. Каменев

Доказано, что если при некотором $n > 2$ функция $x^{1-n}A_n(x)$, где $A_n(x)$ — n-я первообразная для $a(x)$, не ограничена сверху, то уравнение $y'' + a(x)y = 0$ колеблется. Библ. 9 назв.

В теории линейного уравнения

$$y'' + a(x)y = 0, \tag{1}$$

где $a(x)$ определена на $[x_0, +\infty)$ и локально суммируема, хорошо известен следующий интегральный признак колеблемости, принадлежащий А. Винтнеру (см. [1], а также [2] и [3]): если выполнено условие

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} a(s)\,ds = +\infty, \tag{2}$$

то уравнение (1) колеблется. Ф. Хартман [4] показал, что в условии (2) предел не может быть заменен верхним пределом.

Признак колеблемости Винтнера обобщался в различных направлениях как для уравнения (1), так и для нелинейного уравнения $y'' + a(x)f(y) = 0$ в работах [4]—[9] и некоторых других (см. обзор в [6] и [3]).

В заметке предлагается новый интегральный признак колеблемости уравнения (1), основанный на использовании n-ой первообразной коэффициента $a(x)$, частным случаем которого является признак Винтнера.

ТЕОРЕМА. *Пусть при некотором $n > 2$ (не обязательно целом) функция $x^{1-n}A_n(x)$, где $A_n(x)$ — n-я первообразная функция $a(x)$, не ограничена сверху. Тогда уравнение (1) колеблется.*

Доказательство. Так как

$$A_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} a(t)\,dt,$$

то условие теоремы можно записать так:

$$\limsup_{x \to +\infty} \left[x^{1-n} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} a(t)\,dt \right] = +\infty. \qquad (3)$$

Допустим теперь, что уравнение (1) не колеблется; тогда, полагая $w = y'/y$, получим: $w' + w^2 + a(x) = 0$, откуда находим

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} w'(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} w^2(t)\,dt = \\ = -\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} a(t)\,dt. \qquad (4)$$

Учитывая, что

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} w'(t)\,dt = (n-1) \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-2} w(t)\,dt - \\ - C(x-x_0)^{n-1}$$

и выделяя в (4) полный квадрат относительно $w(t)$, получим

$$x^{1-n} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} a(t)\,dt = \\ = C\left(\frac{x-x_0}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)\,x^{n-1}} - \\ - x^{1-n} \int_{x_0}^{x} \left[w(t)(x-t)^{(n-1)/2} + \frac{n-1}{2}(x-t)^{(n-3)/2} \right]^2 dt \leqslant \\ \leqslant C\left(\frac{x-x_0}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)\,x^{n-1}} \leqslant C_1$$

при $x \geqslant x_0$, что противоречит условию (3). Теорема доказана.

Замечание 1. Легко видеть, что если выполнено условие (2), то условие (3) выполняется при $n = 3$. Таким образом, признак колеблемости Винтнера получается как следствие из нашей теоремы. Нетрудно построить примеры, показывающие, что наш признак колеблемости существенно шире признака Винтнера.

Замечание 2. Область применения нашего признака колеблемости существенно шире многих ранее известных признаков. Например, если в уравнении (1) $a(x)$ такова, что $A_3(x) = e^{x^2} \sin x$, то наша теорема легко устанавливает колеблемость, в то время как ни один из признаков, содержащихся в [4] — [9], не позволяет получить этот результат.

В заключение благодарю Р. С. Исмагилова за плодотворное обсуждение проблемы колеблемости.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
23.XI.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Wintner A., A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math., 7, № 1 (1949), 115—117.

[2] Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.

[3] Swanson C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, N. Y., Acad. Press, 1968.

[4] Hartman P., On non-oscillatory linear differential equations of second order, Amer. J. Math., 74, № 2 (1952), 389—400.

[5] Кондратьев В. А., Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнений $y'' + p(x) y = 0$, Докл. АН СССР, 113, № 4 (1957), 742—745.

[6] Rab M., Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgliechung $(p(x) y')' + q(x) y = 0$, Časopis Pěst. Mat., 84, № 3 (1959), 335—370.

[7] Каменев И. В., Об одном критерии колеблемости решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Матем. заметки, 8, № 6 (1970), 773—776.

[8] Каменев И. В., О некоторых специфически нелинейных осцилляционных теоремах, Матем. заметки, 10, № 2 (1971), 129—134.

[9] Каменев И. В., Критерии колеблемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, связанные с осреднением, Дифф. уравнения, 10, № 2 (1974), 246—252.