Овечкин Л.В.

Теория катастроф и Золотое сечение.

Сальвадор Дали, будучи лично знаком с создателем теории катастроф Рене Томом, не раз беседовал с ним о новой математике и был настолько заваражен открывшимися геометрическими образами, что в своей последней картине под названием «Ласточкин хвост» изобразил одноименную катастрофу.

Сальвадор Дали у картины "Ласточкин хвост" в замке Пуболь. 1983г.

Теория катастроф, как и феномен золотого сечения (ЗС), претендует на охват широкого круга явлений от социологии и экономики до физики и технических систем. Теория катастроф (ТК) после бума в 70-х годах прошлого века прочно вошла в арсенал исследовательских методик многих научных направлений. Своей популярностью ТК обязана тому обстоятельству, что она смогла предложить научному сообществу простые и наглядные способы анализа систем различной природы и различной сложности с единых математических позиций. ТК вместо анализа уравнений эволюции системы, которые подчас весьма сложны, а то и затруднительны в построении, предлагает понаблюдать за поведением потенциальной функции (ПФ) системы в окрестности критических точек. ПФ системы также может быть не простой. Но тот факт, когда управляющих параметров в системе не более пяти, а независимых переменных не более трех, то ПФ может быть приведена к одной из канонических форм. Анализ же поведения потенциальных функций сведенных к каноническим формам стал унифицированным и стандартным. В таблице 1 представлены наиболее известные простые канонические формы.

Таблица 1.

Особенность	Название	Каноническая форма
A_2	Складка	$\frac{1}{3}x^3 + ax$
A_3	Сборка	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$
A_4	Ласточкин хвост	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$
A_5	Бабочка	$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx$

Принято считать, что состояние системы, описываемое ПФ, определяется точкой минимума на ней. Изменение управляющих параметров (коэффициенты a,b,c,d) приводит к изменению вида ПФ и, следовательно, к изменеию положения минимума. Соответственно, система должна подстроиться под новый минимум.

Переход в новый минимум может произойти как плавно, так и скачком. Для выбора момента перехода предложены два принципа. Принцип максимального промедления и принцип Максвелла. По принципу максимального промедления ПФ изменяется медленно, и система остается в прежнем минимуме до тех пор, пока полностью не исчезнет локальный минимум. По принципу Максвелла, если шум в системе достаточен для преодоления барьера разделяющего минимумы, то система может перейти в новое устойчивое состояние, не дожидаясь полного исчезновения локального минумума. Схематично это пояснянено на рисунке 1, взятому из двухтомника Гилмора Р. \1\.

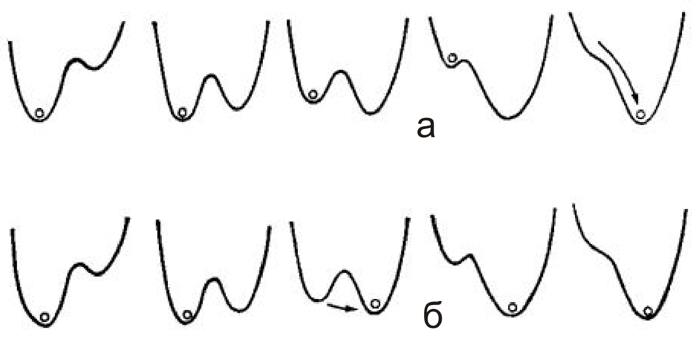

Рис. 1. Схематическое изображение эволюции систем (шарик символически представляет систему) при перестройке ПФ. а- принцип максимального промедления. б - принцип Максвелла.

Можно порекомендовать для ознакомлени с ТК книгу нашего соотечественника Арнольда В. И. \2\.

Для перехода к использованию ТК построим вспомогательное уравнение на базе двух известных уравнений:

$X^2 + X - 1 = 0$ (1)
$X^2 - X - 1 = 0$ (2)

Перемножим уравнения 1 и 2 получим уравнение четвертой степени

$X^4 - 3X^2 + 1 = 0$ (3),

которое является частным случаем, так называемого биквадратного уравнения вида

$AX^4 + BX^2 + C = 0$ (4)

Попутно вспомним, что корни такого уравнения определяются по формуле

$$X_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{y}; \quad y = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Естественно, вычисление корней уравнения (3) по приведенной формуле дает знаменитый квартет чисел -1.618, -0.618, 0.618, 1.618.

Последовав за Сальвадором Дали, обратим внимание на катастрофу A_4 "ласточкин хвост". Чтобы получить критические точки этой катастрофы A_4 приравняем нулю ее первую производную.

$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ (5)

Видим, что уравнения (4) и соответственно (3) частные случаи уравнения (5). Это замечание перекидывает мостик между ТК и уравнениями ЗС. Кроме того, запись ввиде равенства (5), являющегося однопараметрическим уравнением с тремя управляющими параметрами a,b и c, позволяет в пространстве этих управляющих параметров построить геометрический образ сепаратрисы рассматриваемой катастрофы (рисунок 2). Для построения образа приходится найти уравнения дважды и трижды вырожденных точек.

Для этого необходимо дифференцировать форму (5) соответствующее число раз и приравнять полученные выражения к нулю.

$4x^3 + 2ax + b = 0$ (Дважды вырожденные точки)

$12x^2 + 2a = 0$ (Трижды вырожденные точки)

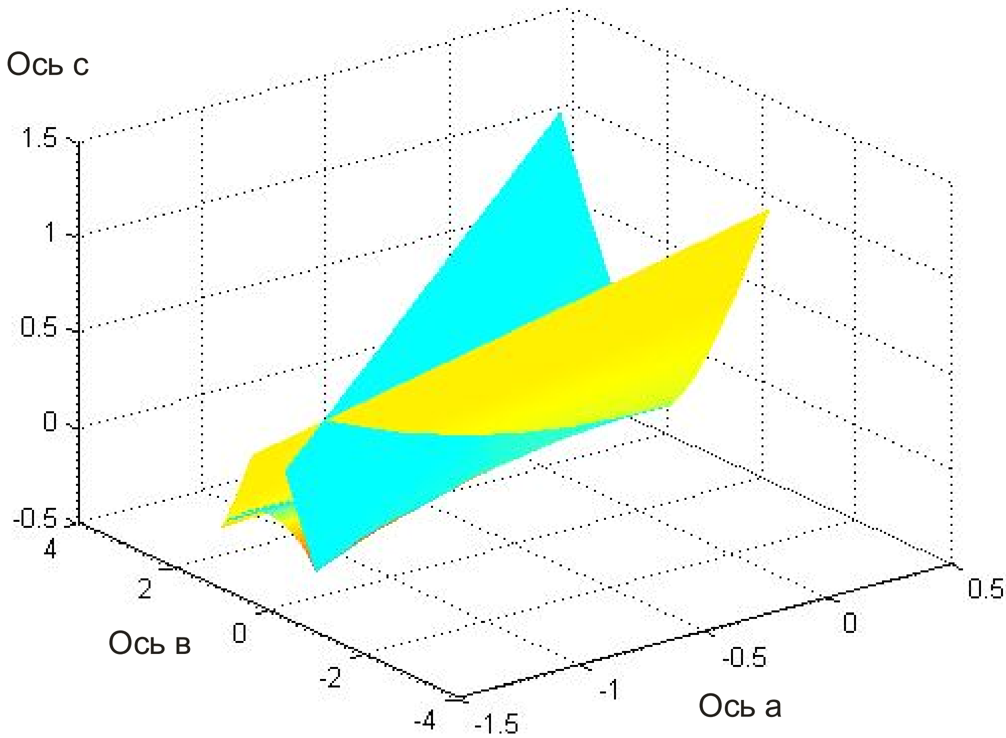

Рис. 2. Сепаратриса катастрофы ласточкин хвост.

Данная гиперповерхность погружена в пространство R3 и делит его на три открытых области. В каждой из них вид ПФ изоморфен и кардинально меняется только при проникновении через плоскости сепаратрис катастрофы A_4. Качественно имется только три вида сечений этой поверхности. Они представлены на рисунке 3 для трех фиксированных значений а=-1, а=0 и а=+1.

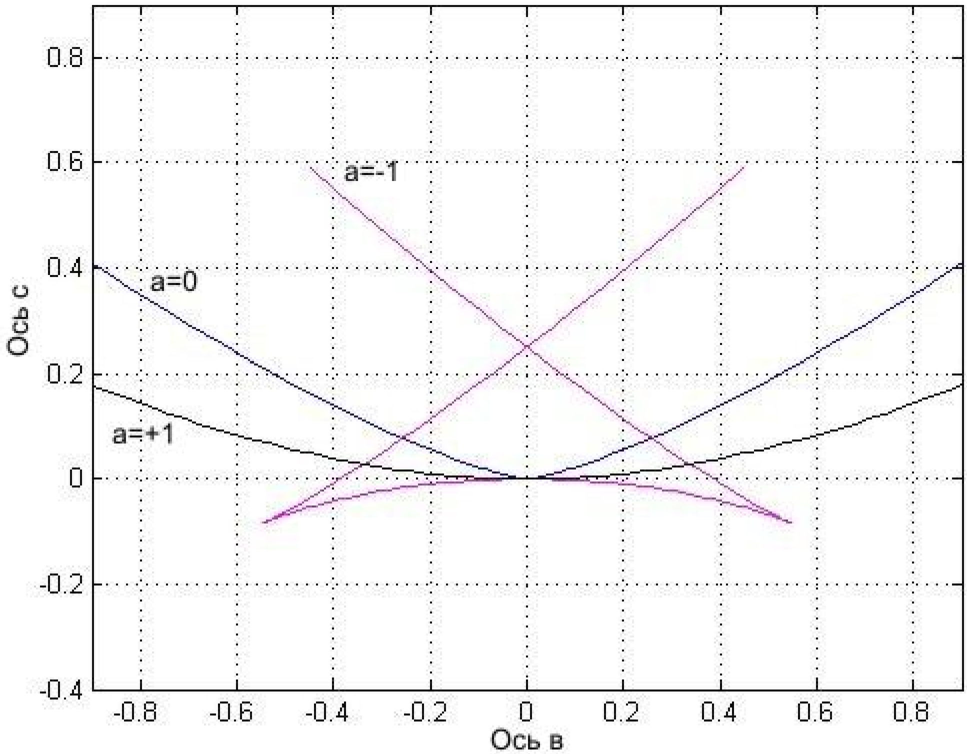

Рис.3. Сечения сепаратрисы катастрофы ласточкин хвост.

Посмотрим, где в объемляющем пространстве сепаратрисы катастрофы A_4 располагаются точки решений уравнений (3) и (4). Согласно уравнению (3) нас должно интересовать сечение с а=-3. На рисунке 4 для этого параметра построены несколько характерных видов ПФ. Как упоминалось выше, вид ПФ меняется при пересечении сепаратрис. В области 1 ПФ не имеет ни одного локального минимума, соответственно система не имеет равновесного состояния. В углах имеем только по одному локальному минимуму. В левом углу (область 2) – правый минимум , а вправом (область 3) – левый локальный минимум . Следовательно, система с такой ПФ может иметь локальное устойчивое состояние. Внизу под дугой (область 5), где Пф имеет один глобальный максимум и один глобальный минимум система способна перейти в единственное устойчивое состояние с параметром для минимума. В области 4 потенциальная функция имеет по два минимума и два максимума.

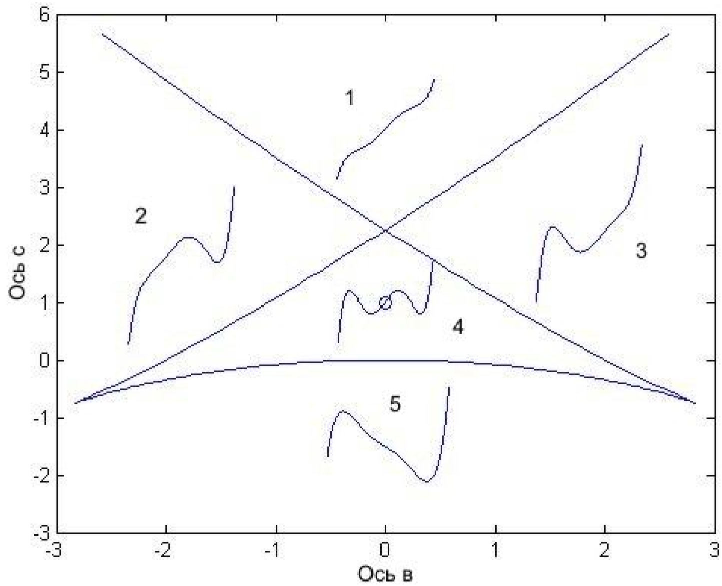

Рис. 4. Виды потенцильной функции в различных областях сечения (a=-3) сепаратрисы катастрофы ласточкин хвост.

В расматриваемом пространстве этой области в центре кружочка с параметрами a=-3, b=0, c=1 имеется единственная и уникальная по свойствам точка. На рисунке 5 в большем масштабе показан вид ПФ в этой точке.

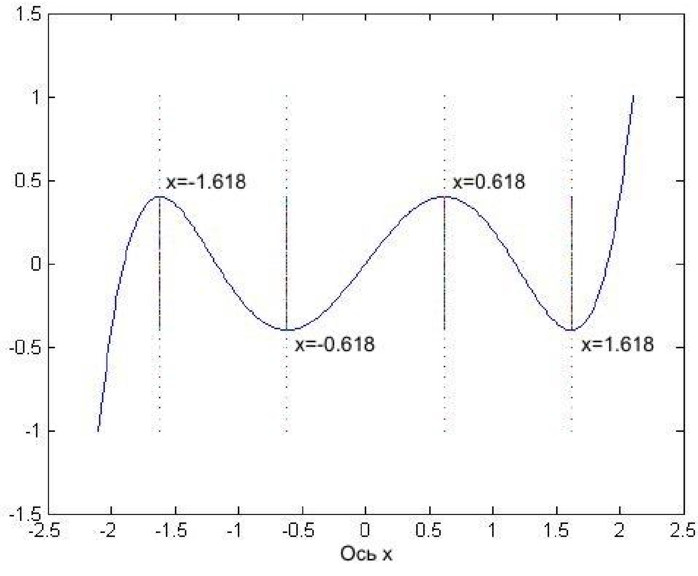

Рис.5. Потенцильная функция катастрофы ласточкин хвост с параметрами a=- 3, b=0, c=1. ПФ $V=1/5x^5 - x^3+x$.

Уникальность ее в том, что оба минимума имеют одинаковую глубину и находятся при значениях 1.618 и -0.618. Расмотрим случай, когда система находится в окрестности левого максимума. С одной стороны, в случае движения по левой нисподающей ветви ПФ приведет к субстациональной коренной перестройке системы, что должно рассматриваться, как самостоятельный случай, и мы его опускаем. С другой стороны, система, двигаясь по правому склону левого гребня ПФ, свалится в устойчивый минимум при значении -0.618. Расмотрим более интерсный нам диапазон параметра порядка x от -1.618 до бесконечности. Здесь располагается второй максимум раздедяющий два устойчивых минимума со значениями -0.618 и 1.618. Где окажется система при эволюции на данном гребне ПФ зависит от принятого нами соглашения: принципа максимального промедления или принципа Максвелла. С одной стороны, система, находясь первоначально в максимуме в неустойчивом положении, может целиком перейти или в левый или в правый минимум в окрестности точек 1.618 или -0.618. С другой стороны возможен и такой подход, когда система, первоначально имея промежуточный параметр между $X_{прав}$=1.618 и $X_{лев}$= -0.618, может долями распределится между минимумами согласно формул /1/:

$$\frac{X - Xлев}{Xправ - Xлев}$$ - часть системы, находящаяся в левом минимуме ПФ.

(6)

$$\frac{Xлев - X}{Xправ - Xлев}$$ - часть системы, находящаяся в правом минимуме ПФ.

Нетрудно убедиться, что если воспользоваться этими формулами и пойти от обратного, проведя расчет первоначального параметра, при котором система будет представлена долями в гармоничном отношении, например, для отношения долей системы 0.618 параметр X окажется равным 0.24. Это квадрат числа фи. Таким образом, в очередной раз наблюдается магия чисел золотой пропорции.

Из рассмотренного выше напрашивается вывод, что если не предполагать обязательность пути системы в своей эволюции через ПФ, с параметрами ЗС, то можно заключить, что поподание системы в состоянии гармонии скорее исключение, чем правило. При неуправляемой извне эволюции системы нет гарантий, что она пройдет через точку ЗС. С одной стороны, если хотим увеличить количество систем в состоянии ЗС, то необходимо брать эволюцию в свои руки и вести систему в точку ЗС. С другой стороны, обосновано можно расширять понятие систем в состоянии гармонии, так как в пропорциях чисел ЗС могут находиться не только эстетически привлекательные объекты, но и чисто физические параметры систем, и их доли фазовых состяний.

На этом можно было бы и остановиться, помятуя о том, что "нестоит плодить сущности без необходимости". Но, наверное, есть смысл сделать еще три замечания.

Во-первых, катастрофа типа бабочки A_5 широко используется физиками в качестве модельного потенциала в виде симметричной функции, получаемой занулением коэффициентов b=d=0 при нечетных степенях параметра порядка. В этом виде он получил название потенциал Гинзбурга-Ландау. Дифференцируя этот потенциал и приравнивая нулю, будем иметь уравнение:

$$x(x^4 + ax^2 + c) = 0 \quad (7)$$

Видим, что один из сомножителей имеет сходство с уравнениями (3-5). Поэтому не удивительно, что получаетя любопытная форма ПФ (рисунок 6) с экстремумами в значениях квартета чисел ЗС.

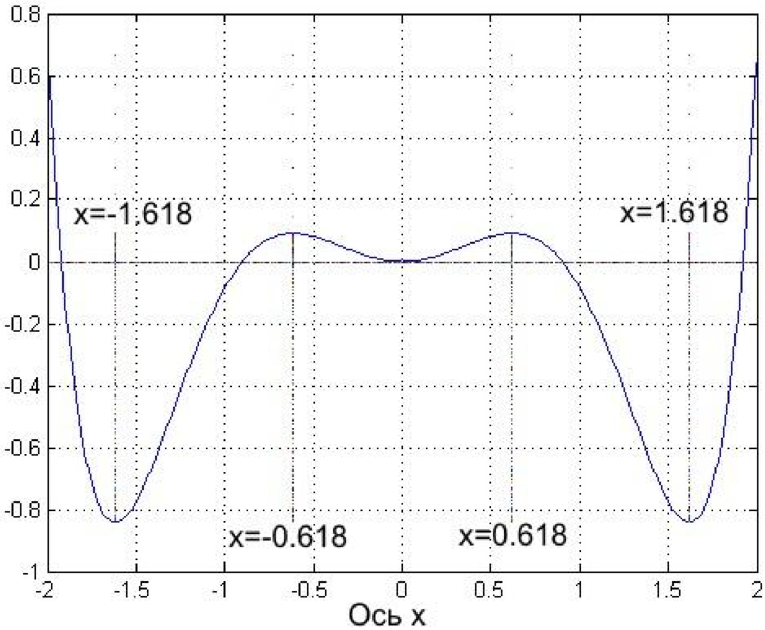

Рис.6. Потенцильная функция катастрофы бабочка с параметрами a=- 3, b=0, c=1. ПФ $V=1/6x^6-3/4x^4+1/2x^2$.

Но в связи с неоднозначностью интерпретации результатов опустим их представление в данной статье.

Во-вторых, интересный случай будем иметь, перемножив уравнение (3) само на себя и получив полином восьмой степени:

$x^8 - 6x^6 + 11x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ (8).

На базе этого уравнения можно вообразить потенциал вида

$V= x^8 - 6x^6 + 11x^4 - 6x^2 + 1$, показаный на рисунке 7.

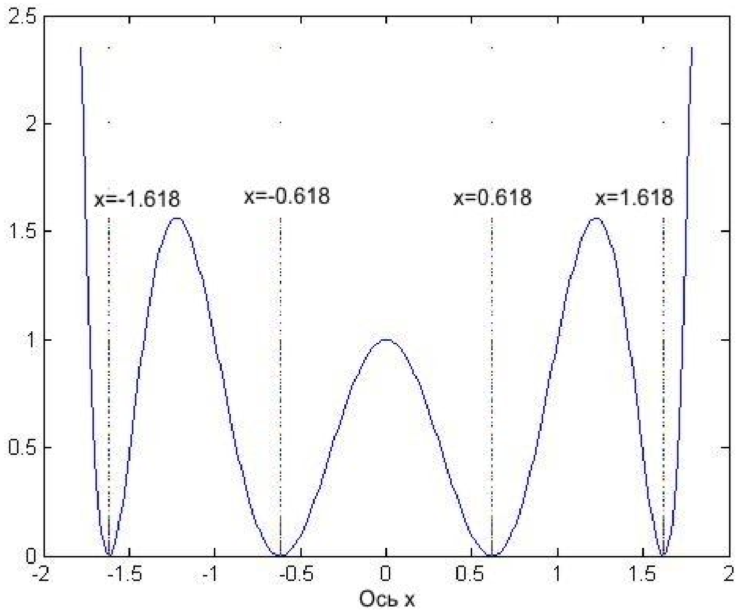

Рис.7. Потенцильная функция $V= x^8 - 6x^6 + 11x^4 - 6x^2 + 1$.

В данном случае, тоже нельзя высказать какие либо обоснованные предпочтения о том, как интерпретировать гипотически возможную систему с таким потенциалом.

В-третьих, насколько бы не были скромны первые результаты по синтезу ТК и ЗС, есть смыл продолжить исследования в этом направлении и попытаться найти оправдание феномену ЗС, подведя под него физико-математическую базу. Можно предположить, что для этого будет не лишне привлечь методы более общей теории динамических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.. «Мир». 1984.
2. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: МГУ. 1983.