# Глава 8. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

## 8.1. Основные понятия динамических систем и моделей экономики

В предыдущих главах рассмотрены в основном статические модели, без явной зависимости экономических показателей от фактора времени. Ниже освоению подлежат модели с явным учетом фактора времени. Объектами изучения являются сложные экономические системы, которые состоят из взаимодействующих частей, при наличии у них связей с внешней средой.

*Математическая модель экономической системы* состоит из моделей входящих в нее частей и моделей связей между этими частями и частями с внешней средой. Один из методов моделирования состоит в том, что каждую часть реальной системы отражают линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (ЛОДУ), а весь объект – системой ЛОДУ. В пособии применены стационарные (автономные, с постоянными коэффициентами) ЛОДУ. *Модели частей системы будем далее называть* ***звеньями сложных объектов***. Каждое элементарное звено системы рассматривается как неделимый объект. На каждое звено могут оказывать воздействие другие звенья этой же системы. Связи между двумя звеньями выражают процессы, которые являются выходом из одних звеньев и входом в другие. Математически связи являются функциями времени. ***Специфика*** *этих моделей состоит в том, что каждое звено системы имеет однонаправленное действие*. В системах действуют *причинно-следственные* связи. Причина и следствие не могут меняться местами.

Звено или система в целом находятся под влиянием *внешнего* воздействия (*входного*, *экзогенного* процесса). В звене или в системе экзогенные воздействия вызывают *отклик* или *реакцию* (*выходной*, *эндогенный* процесс). ***Реакция звена (системы)*** *– это выходной процесс, который зависит от экзогенного воздействия и свойств моделируемого объекта.* Внутренними связями между звеньями системы и реакцией системы в целом являются зависимые, *эндогенные* переменные.

Решение задач исследования моделей существенно упрощается в случае применения математического аппарата *операционного исчисления*. К дифференциальным уравнениям и функциям времени применяют определенные интегральные преобразования. Преобразованные формулы *называются изображениями* дифференциальных уравнений и функций времени. Модели звеньев выводятся в форме передаточных функций. Передаточная функция – это отношение изображения реакции звена к изображению экзогенного процесса. Сложная система математически отражается совокупностью взаимосвязанных передаточных функций всех звеньев. Применение передаточных функций позволяет проводить исследования поведения экономических систем, выполнять свертывание или разложение моделей.

Методика решения задач исследования моделей состоит в том, что ЛОДУ и системы ЛОДУ подлежат преобразованию в операторные символы в форме передаточных функций. Далее переходят к оператору системы в целом в удобном для анализа модели виде. Затем отыскивают изображение поведения системы в ответ на внешнее воздействие. Наконец, полученное изображение преобразуют в оригинал в виде функции времени при помощи специальной таблицы соответствия оригиналов и их изображений.

*При помощи математических моделей в форме ЛОДУ методами операционного исчисления исследуют* ***поведение (движение) экономических объектов***. Одна из основных задач исследования состоит в анализе поведения экономических объектов. *Под* ***анализом поведения экономического объекта*** *понимают выявление реакции его модели в ответ на различные экзогенные воздействия.* Тем самым изучают *характер поведения* объекта, определяют *вид реакции*, *форму кривой*, описывающей движение.

Другая задача исследования – синтез моделей сложных систем, поведение которых отвечает требованиям создателей этих систем. Под ***синтезом модели экономической системы*** следует понимать два направления исследования. Во-первых, *опре-*

*деление* таких *значений параметров* модели, которые обеспечивают изучаемой системе нужное поведение. Во-вторых, *выбор* таких *звеньев и структуры системы*, при которых реакция модели отвечает заранее заданным требованиям.

Большой интерес представляют сложные экономические системы кибернетического типа. Особая роль систем с положительной обратной связью состоит в том, что в них возникает эффект экономического мультипликатора (см. параграф 8.7). Если в экономической теории речь идет о мультипликаторе, то в любом таком случае это означает, что структуру объекта можно рассматривать как систему с положительной обратной связью. В макроэкономике классическим примером моделей такого типа является мультипликатор Кейнса.

## 8.2. Преобразования Лапласа. Свойства преобразования

Для решения исследовательских задач, сформулированных выше, будем применять интегральные преобразования Лапласа для функций времени $f(t)$. Эти преобразования применяют при наложении следующих условий.

1. Функции $f(t)$ непрерывные или кусочно-непрерывные.
2. При $t < 0$ значение функций $f(t) = 0$.
3. При возрастании $t$ модуль $|f(t)|$ может возрастать не быстрее некоторой показательной функции $Me^{ct}$, где $M > 0$ и $c$ – постоянные величины.

Преобразование Лапласа состоит в том, что функцию действительного переменного $t$ заменяют функцией комплексного переменного $p = \alpha + j\omega$, где $\operatorname{Re} p = \alpha$, $\operatorname{Im} p = \omega$, $j^2 = -1$. Возможен также обратный переход. Такое двустороннее преобразование будем обозначать как $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Для осуществления прямого преобразования $f(t)$ в $F(p)$ применяют несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (8.2.1)$$

Известно, что введенный интеграл сходится абсолютно для всех значений $p$ при $\operatorname{Re} p > c$, где $c$ – постоянная величина из условия 3.

С целью выполнения обратного преобразования $F(p)$ в $f(t)$

применяют интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} F(p) e^{pt} dp, \qquad (8.2.2)$$

где путь интегрирования – вертикальная прямая ($\gamma - j\infty,\ \gamma + j\infty$), $\gamma$ – действительное число, $\gamma > c$, $c$ – постоянная величина из условия 3. Функцию *f(t)* называют ***оригиналом***, функцию *F(p)* – ***изображением.***

Рассмотрим примеры преобразования Лапласа.

1. Возьмем единичную ступенчатую функцию (функцию Хэвисайда)

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0. \end{cases}$$

Подставим ее под знак интеграла в формулу (8.2.1) и вычислим изображение при $\operatorname{Re} p = \alpha > 0$:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty 1\, e^{-pt} dt = \left. \frac{e^{-pt}}{p} \right|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Таким образом, единичной ступенчатой функции соответствует ее изображение: $\eta\ (t) \leftrightarrow 1/p$.

2. Возьмем другую функцию – экспоненциальную:

$$e^{at}\eta(t) = \begin{cases} e^{at} \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \quad \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где $a$ – любое комплексное число. Подставим его в формулу (8.2.1) и вычислим изображение при $\operatorname{Re}(p - a) > 0$:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = -\left. \frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \right|_0^\infty = \frac{1}{p-a}.$$

Итак, экспоненциальной функции соответствует ее изображение: $e^{a\,t} \leftrightarrow 1/(p - a)$.

Применение операционного исчисления обычно не требует заниматься вычислением изображений и оригиналов по формулам (8.2.1) и (8.2.2). Разработаны справочники соответствия многих функций и изображений, позволяющие выполнять широкие исследования. Для анализа поведения звеньев и систем обычно применяют типичные виды экзогенных процессов, такие как дельта-функция, единичная ступенчатая функция, линейная, экспоненциальная, тригонометрические и гиперболические функции. Их оригиналы и изображения сведены в таблицу соответствия (см. табл. 8.1).

Перейдем к рассмотрению *свойств преобразования* Лапласа. В качестве примера приведем доказательство линейности преобразования.

*Утверждается*, что для любых действительных или комплексных величин $A$ и $B$ линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений:

$$A\,f(t) + B\,g(t) \leftrightarrow A\,F(p) + B\,G(p). \qquad (8.2.3)$$

*Доказательство*. Подставим заданные функции времени в подынтегральное выражение формулы (8.2.1), тогда, используя свойство линейности интеграла, в результате вычисления получим

$$\int_0^\infty [Af(t) + Bg(t)]\,e^{-pt}dt = A\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt + B\int_0^\infty g(t)\,e^{-pt}dt.$$

Таблица 8.1

| № п/п | Название | Оригинал | Изображение |
|---|---|---|---|
| 1. | Дельта - функция | $\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0, \\ 0, t \neq 0, \end{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$ | 1 |
| 2. | Единичная ступенчатая функция (функция Хэвисайда) | $\eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$ | $1/p$ |
| 3. | Пропорциональная (линейная) функция | $\gamma(t) = \begin{cases} t \text{ при } t \geq 0, \\ 0 \text{ при } t < 0 \end{cases}$ | $1/p^2$ |
| 4. | Степенная функция | $t^n$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $n!/p^{n+1}$ |
| 5. | Экспоненциальная функция | $e^{at}$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $1/(p-a)$ |
| 6. | Тригонометрический синус | $\sin \omega t$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $\omega/(p^2 + \omega^2)$ |
| 7. | Тригонометрический косинус | $\cos \omega t$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $p/(p^2 + \omega^2)$ |
| 8. | Затухающая синусоидальная функция | $e^{at} \sin \omega t$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $\omega/[(p-a)^2 + \omega^2]$ |
| 9. | Затухающая косинусоидальная функция | $e^{at} \cos \omega t$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $(p-a)/[(p-a)^2 + \omega^2]$ |
| 10. | Затухающая степенная функция | $e^{at}\, t^n$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $n!/(p-a)^{n+1}$ |
| 11. | Гиперболический синус | $\mathrm{sh}\, \omega t = \sinh \omega t$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $\omega/(p^2 - \omega^2)$ |
| 12. | Гиперболический косинус | $\mathrm{ch}\, \omega t = \cosh \omega t$ при $t \geq 0$, 0 при $t < 0$ | $p/(p^2 - \omega^2)$ |

Если интегралы правой части равенства абсолютно сходятся, то интеграл левой части равенства абсолютно сходится в общей области абсолютной сходимости интегралов справа. Таким образом, получаем

$$A\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt + B\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt = A\,F(p) + B\,G(p).$$

Этот результат совпадает с изображением в (8.2.3).

Наиболее важные свойства преобразования Лапласа сведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

| № п/п | Название | Оригинал | Изображение |
|---|---|---|---|
| 1 | Линейность | $a\,f(t)$ | $a\,F(p)$ |
| 2 | Аддитивность | $f(t) + g(t)$ | $F(p) + G(p)$ |
| 3 | Подобие | $f(\lambda t),\ \lambda > 0$ | $1/\lambda \times F(p/\lambda)$ |
| 4 | Затухание | $e^{at} f(t)$ | $F(p - a)$ |
| 5 | Запаздывание | $f(t - \tau)\ \eta\ (t - \tau),\ \tau > 0$ | $e^{-p\tau} F(p)$ |
| 6 | Дифференцирование оригинала | $d\,f(t)/\,dt = f\,'(t)$ | $p\,F\,(p) - f\,(0)$ |
| 7 | Интегрирование оригинала | $\int_0^t f\,(s)\,ds$ | $F\,(p)\,/\,p$ |
| 8 | Дифференцирование изображения | $-\,t\,f(t)$ | $F\,'(p)$ |
| 9 | Интегрирование изображения | $f(t)/\,t$ | $\int_p^\infty F\,(z)\,d\,z$ |
| 10 | Свертка оригиналов | $(f * g)\,(t) = \int_0^t f\ \ (t - s)\,g(s)\,ds$ | $F\,(p)\,G\,(p)$ |

Свойство дифференцирования высших порядков выпишем отдельно:

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - [p\,f\,(0) + f'\,(0)],$$

…

$$f^{(n-1)}(t) \leftrightarrow p^{n-1} F(p) - [p^{n-2} f\,(0) + p^{n-3} f'\,(0) + \ldots + f^{\,(n-2)}(0)],$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^{n} F(p) - [p^{n-1} f\,(0) + p^{n-2} f'\,(0) + \ldots + f^{\,(n-1)}(0)].$$

## 8.3. Нахождение оригиналов алгебраическими методами

Применение свойств преобразования Лапласа, известных формул соответствия (см. табл. 8.1 и 8.2) и других методов операционного исчисления при моделировании экономических объектов и явлений существенно упрощает решение и исследование динамических моделей. Решение при этом не требует применения методов интегрирования дифференциальных уравнений, задачи можно решать методами элементарной алгебры.

Завершающим этапом решения таких задач является обратное преобразование Лапласа или нахождение оригинала (функции времени) по известному изображению (функции комплексного переменного).

Решение представляют в форме правильной рациональной дроби вида

$$F(p)=\frac{R(p)}{D(p)}=\frac{b_0p^m+\ldots+b_{m-2}p^2+b_{m-1}p+b_m}{a_0p^n+\ldots+a_{n-2}p^2+a_{n-1}p+a_n}, \qquad (8.3.1)$$

где $D(p) = a_0 p^n + \ldots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + a_n$ – *характеристический полином*, $m < n$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Эту дробь разлагают на сумму простых дробей и, применяя изображения элементарных функций по табл. 8.1 и свойства преобразования Лапласа по табл. 8.2, непосредственно находят оригинал получившейся суммы. Для разложения характеристического полинома на сумму простых дробей решают *характеристическое уравнение* $a_0 p^n + \ldots + a_{n-2} p^2 + a_{n-1} p + a_n = 0$ и находят его корни $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_n$ с учетом кратности.

Если часть корней $\lambda_k$, $k = 1,2, \ldots, n_1$ – действительные и простые, то в разложении характеристического многочлена имеются множители вида $p - \lambda_k$. Если все оставшиеся корни $\lambda_k$, $k = n_1 + 1, \ldots, n$ – комплексные и простые, то для каждого из них $\lambda_k = \alpha_k + j\beta_k$ имеется комплексно сопряженный корень $\lambda_{k+1} =$ $= \alpha_k - j\beta_k$. Каждой паре комплексно сопряженных корней $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ соответствует множитель вида $p^2 - 2\alpha_k p + \alpha_k^2 + \beta_k^2$.

Теперь исходную дробь можно записать в следующем виде:

$$F(p)=\frac{b_0p^m+\ldots+b_{m-2}p^2+b_{m-1}p+b_m}{\prod(p-\lambda_k)\prod(p^2-2a_kp+a_k^2+\beta_k^2)}. \qquad (8.3.2)$$

Затем полученное выражение $F(p)$ раскладывают на сумму простых дробей следующим образом:

$$F(p) = \sum A_k/(p-\lambda_k) + \sum (B_k p + D_k)/(p^2 - 2\alpha_k p + \alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Значения постоянных коэффициентов $A_k$, $B_k$, $D_k$ в этой сумме неизвестны. В случае кратных корней формулы имеют более сложный вид.

Указанный прием называют *методом неопределенных коэффициентов*.

Не излагая метод неопределенных коэффициентов детально, рассмотрим его применение на конкретном примере для случая *действительных корней*:

$$F(p) = (6p^2 - p + 1)/[p(p^2 - 1)] = A_1/p + A_2/(p - 1) + A_3/(p + 1).$$

Для отыскания $A_1$, $A_2$, $A_3$ сумму приводят к общему знаменателю:

$$\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p-1} + \frac{A_3}{p+1} = \frac{A_1(p^2-1) + A_2 p(p+1) + A_3 p(p-1)}{p(p^2-1)}.$$

Полученное в числителе выражение равно числителю исходной дроби:

$$A_1(p^2 - 1) + A_2 p(p + 1) + A_3 p(p - 1) = 6p^2 - p + 1.$$

Далее определяют подобные члены этого равенства и составляют из них систему уравнений

$$\begin{cases} (A_1 + A_2 + A_3)\,p^2 = 6p^2, \\ (A_2 - A_3)\,p = -p, \\ -A_1 = 1, \end{cases}$$

решив которую, получают $A_1 = -1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 4$. Теперь сумма простейших дробей с известными значениями коэффициентов имеет вид

$$F(p) = -1/p + 3/(p - 1) + 4/(p + 1).$$

Оригиналом первого слагаемого является единичная ступенчатая функция, второго и третьего – экспоненциальные функции (см. табл. 8.1). Поэтому, применяя свойство линейности (см. табл. 8.2), можно сразу записать ответ на поставленную задачу:

$$F(p) \leftrightarrow f(t) = -1 + 3e^{t} + 4e^{-t} \text{ при } t \geq 0.$$

В случае *комплексных корней* для отыскания оригинала удобно применять выделение полного квадрата характеристического многочлена.

Пусть, например, изображение имеет вид $F(p) = p/(p^2 - 2p + 5)$. Характеристическое уравнение $p^2 - 2p + 5 = 0$ имеет два комплексно сопряженных корня. В этом случае целесообразно выделить полный квадрат знаменателя следующим образом:

$$p^2 - 2p + 5 = (p^2 - 2p + 1) + 4 = (p - 1)^2 + 2^2.$$

Теперь в качестве переменной изображения следует принять $p - 1$. Переменная $p - 1$ является свидетельством затухания функции времени (см. табл. 8.2), а сумма квадратов в знаменателе указывает на колебательный вид функции оригинала. Учитывая сказанное, изображение $F(p)$ легко преобразовать так, чтобы каждое слагаемое представляло собой изображение гармонической функции с затуханием:

$$F(p) = p/(p^2 - 2p + 5) = \frac{(p-1)+1}{(p-1)^2+2^2} =$$

$$= \frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + \frac{1}{(p-1)^2+2^2} = \frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + \frac{2}{2\left[(p-1)^2+2^2\right]}.$$

Согласно свойствам линейности и затухания оригинал этой функции имеет следующий вид:

$$f(t) = e^{t}(\cos 2t + 0{,}5 \sin 2t) \quad \text{при } t \geq 0.$$

## 8.4. Модели в форме дифференциальных уравнений и передаточных функций

При математическом моделировании объектов экономики в математической форме отражается вид хозяйственной деятельности или экономическое явление. Так, если моделируют выпуск продукции на предприятии или в отрасли, то производственную деятельность представляют в виде зависимости объёмов выпуска от располагаемых ресурсов или от поступивших заказов без явного моделирования иных видов деятельности на том же объекте, например, профсоюзной или природоохранной. Таким образом, выходом модели производства как элемента экономической системы является процесс выпуска продукции, а входом – количество ресурсов или заказов. Процесс выпуска продукции отражает поведение моделируемого объекта в соответствии с экзогенным воздействием. Характер зависимости выходного процесса от внешнего воздействия соответствует динамическим свойствам самого объекта.

Часто вместо детального моделирования объекта подбирают подходящую достаточно простую математическую формулу зависимости реакции звена от экзогенного процесса. При этом реакция звена на различные воздействия должна быть аналогична поведению реального объекта.

Описанный методологический подход к математическому моделированию больших и сложных систем получил название принципа “чёрного ящика”. Под “чёрным ящиком” понимают такой объект, у которого для внешнего наблюдения доступны только входные и выходные процессы.

Если вектор-функцию входного процесса (внешнее, экзогенное воздействие) обозначить как $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, а реакцию объекта (отклик, выходной процесс) – как $y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$, то математическая модель объекта представляет собой формулу преобразования входного процесса в реакцию, которую можно записать в виде

$$y(t)=W[A, x](t),$$

где $A$ – вектор постоянных коэффициентов модели.

Здесь $W$ – оператор модели, который математически преобразует вектор-функцию $x(t)$ в вектор-функцию $y(t)$ подобно преобразованию входного процесса в реакцию в объекте-оригинале. В любой момент времени численные значения $x$ и $y$ определяют состояния входа и выхода объекта и модели.

В данном пособии зависимости $y(t)$ от $x(t)$ применительно к экономическим звеньям и системам отражаются в форме ЛОДУ и систем ЛОДУ. Модель должна отражать теоретически доказанные, главные для задачи исследования причинно-следственные связи в объекте-оригинале между входными и выходными процессами независимо от его масштабов, пространственного размещения, внутренней структуры и множества второстепенных факторов. В соответствии с присущими оригиналу свойствами модель любого объекта отражает однонаправленное действие. Если $x$ – входной процесс, а $y$ – реакция, то в обратном направлении от $y$ к $x$ внешний сигнал не проходит: причина и следствие не взаимозаменяемы (рис. 8.1).

Рис. 8.1

*Математическая модель* в форме ЛОДУ имеет следующий общий вид:

$$a_0\, y^{(n)}(t) + a_1\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\, y'(t) + a_n\, y(t) =$$
$$= b_m\, x(t) + b_{m-1}\, x'(t) + \ldots + b_0\, x^{(m)}(t), \qquad (8.4.1)$$

где $m < n$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$;

$x(t)$ – функция входного процесса, экзогенного воздействия;

$y(t)$ – функция выходного процесса или реакция звена на входное воздействие;

$x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)$ – производные 1-го, … , $m$-го порядка функции входа;

$y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)$ – производные 1-го, …, $(n-1)$-го, $n$-го порядка функции выхода;

$a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_0, \ldots, b_{m-1}, b_m$ – постоянные коэффициенты.

Дифференциальное уравнение (8.4.1) преобразуем в его изображение, учитывая линейность преобразования и формулы изображения для производных (см. п. 8.2). Тогда получим

$$\begin{aligned}
&a_0\, p^n\, Y(p) - a_0[p^{n-1}\, y(0) + p^{n-2}\, y'(0) + \ldots + y^{(n-1)}(0)] + \\
&+ a_1\, p^{n-1}\, Y(p) - a_1[p^{n-2}\, y(0) + p^{n-3}\, y'(0) + \ldots + y^{(n-2)}(0)] + \\
&+ \ldots + a_n\, Y(p) = \\
&= b_0\, p^m\, X(p) - b_0\,[p^{m-1}\, x(0) + p^{m-2}\, x'(0) + \ldots + x^{(m-1)}(0)] + \\
&+ b_1\, p^{m-1}\, X(p) - b_1[p^{m-2}\, x(0) + p^{m-3}\, x'(0) + \ldots + x^{(m-2)}(0)] + \\
&+ \ldots + b_m X(p),
\end{aligned} \qquad (8.4.2)$$

где $X(p)$, $Y(p)$ – изображения входного и выходного процессов соответственно;

$x(0), x'(0), \ldots, x^{(m-1)}(0), y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ – значения $x$, $y$ и их производных соответственно до $(m-1)$-го и $(n-1)$-го порядков в нулевой момент времени;

$p, p^2, \ldots, p^n$ – комплексная величина $p$ в соответствующей степени.

Далее будем рассматривать два кибернетических аспекта применения изображения ЛОДУ (8.4.2): *поведенческий* и *структурный*. Поведенческий аспект представлен в настоящем параграфе, а структурный – в параграфах 8.6, 8.7.

Из операторного уравнения (8.4.2) несложно вывести изображение реакции $Y(p)$, которое можно записать компактно в следующем виде:

$$Y(p) = \frac{B(p)X(p) + A(p)}{D(p)}, \qquad (8.4.3)$$

где $X(p)$, $Y(p)$ – изображения экзогенного воздействия и реакции соответственно;

$D(p) = a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_n$ – характеристический полином $n$-й степени комплексной переменной $p$;

$B(p) = b_0\, p^m + b_1\, p^{m-1} + \ldots + b_m$ – полином $m$-й степени комплексной переменной $p$;

$A(p) = A_1(p) - A_2(p)$.

Здесь

$A_1(p) = a_0[p^{n-1}\, y(0) + p^{n-2}\, y'(0) + \ldots + y^{(n-1)}(0)] + a_1[p^{n-2}\, y(0) + p^{n-3} y'(0) + \ldots + y^{(n-2)}(0)] + \ldots + a_{n-1}\, y(0)$ – полином не выше $(n - 1)$-й степени переменной $p$,

$A_2(p) = b_0[p^{m-1}\, x(0) + p^{m-2}\, x'(0) + \ldots + x^{(m-1)}(0)] + b_1[p^{m-2}\, x(0) + p^{m-3}\, x'(0) + \ldots + x^{(m-2)}(0)] + \ldots + b_{m-1}\, x(0)$ – полином не выше $(m - 1)$-й степени комплексной переменной $p$.

Правую часть операторного равенства (8.4.3) можно представить в виде двух слагаемых:

$$Y(p) = Y_в(p) + Y_c(p), \tag{8.4.4}$$

где $Y_в(p) = [B(p)\, X(p) - A_2(p)]/D(p)$ – изображение вынужденного процесса, зависящего от $X(p)$ и от начальных значений $x(0)$, …, $x^{(m-1)}(0)$, $Y_c(p) = A_1(p)/D(p)$ – изображение свободного процесса, не зависящего от экзогенного воздействия, а зависящего только от начальных условий $y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$.

Теперь изображение процесса обусловлено двумя разнородными факторами, которые представлены в каждом из слагаемых правой части выведенной формулы (8.4.4). Первое слагаемое отражает поведение объекта под воздействием внешней, экзогенной переменной при нулевых начальных условиях $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = 0$.

В этом случае оригинал процесса $y_в(t)$, т. е. реакция звена, вызвана экзогенным воздействием $x(t)$ и не зависит от начальных условий для $y(t)$.

Изображение вынужденного движения можно записать в другом виде:

$$\boldsymbol{Y_в(p) = W(p)\, X(p)} - A_2(p)/D(p),$$

где

$$\boldsymbol{W(p)} = B(p)/D(p) =$$
$$(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) / (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n).$$

Множитель $\boldsymbol{W(p)}$ получил название **передаточной функции.** Передаточная функция – это отношение изображения выходного процесса к изображению внешнего воздействия при нулевых начальных условиях $y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ и $x(0), \ldots, x^{(m-1)}(0)$. Ее можно считать *математической моделью объекта*. Эта модель *не зависит от вида внешнего воздействия и выражает связь реакции объекта с внешним воздействием, т.е. отражает свойства только самого объекта*. Для вычисления выходного процесса при нулевых начальных условиях для $x$ и $y$ достаточно умножить изображение входного воздействия на передаточную функцию и вычислить оригинал полученного произведения.

Второе слагаемое в формуле (8.4.4) отражает “движение” объекта под влиянием только инерционных свойств объекта. Свободное движение совершается при отсутствии внешнего воздействия на объект, т.е. когда $x(t) \equiv 0$. В таком случае оригинал процесса $y\,(t) = y_c\,(t)$ обусловлен только отличием от нуля начальных условий при нулевом экзогенном воздействии. Свободное движение не зависит от экзогенного процесса.

Изображение свободного движения в этом случае определяется отношением двух полиномов: $Y_c\,(p) = A_1(p)/D(p)$.

Для анализа поведения объекта обычно применяют типовые виды входных процессов и их изображений, которые представлены в табл. 8.1.

Рассмотрим вывод формул свободного и вынужденного движения и вывод передаточной функции на примере ЛОДУ второго порядка:

$$a_0\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y\,(t) = b_1\, x\,(t) + b_0\, x'(t),$$

где $a_0 \neq 0$.

Изображение этого уравнения имеет вид

$$a_0\, p^2\, Y\,(p) - a_0[p\, y\,(0) + y'(0)] + a_1\, p\, Y\,(p) - a_1\, y\,(0) + a_2\, Y\,(p) =$$
$$= b_1 X\,(p) + b_0\, p\, X\,(p) - b_0\, x\,(0).$$

Выведенное операторное уравнение решаем относительно $Y\,(p)$:

$$Y(p) = \frac{B(p)X(p) + A(p)}{D(p)} = \frac{B(p)X(p)}{D(p)} + \frac{A(p)}{D(p)}\ ,$$

где $X(p)$, $Y(p)$ – изображения внешнего воздействия и отклика;

$D(p) = a_0\, p^2 + a_1\, p + a_2$ – характеристический полином второй степени комплексной переменной $p$;

$B(p) = b_0\, p + b_1$ – полином не выше первой степени комплексной переменной $p$, являющийся сомножителем изображения внешнего воздействия;

$A(p) = A_1(p) - A_2(p) = a_0\,[p\, y(0) + y'(0)] + a_1\, y(0) - b_0\, x(0)$ – полином не выше первой степени комплексной переменной $p$.

Здесь

$$A_1(p) = (a_0 p + a_1)\, y(0) + a_0 y'(0), \;\; A_2(p) = b_0\, x(0).$$

Изображение вынужденного процесса выражается формулой

$$Y_в(p) = \frac{B(p)X(p)}{D(p)} - \frac{A_2(p)}{D(p)} = \frac{(b_0 p + b_1)X(p) - b_0 x(0)}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2},$$

изображение свободного движения – формулой

$$Y_c(p) = \frac{A_1(p)}{D(p)} = \frac{(a_0 p + a_1)y(0) + a_0 y'(0)}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Передаточная функция в данном случае имеет вид

$$W(p) = B(p)/D(p) = (b_0\, p + b_1)/(a_0\, p^2 + a_1\, p + a_2).$$

Как правило, в вопросах исследования поведения объектов, принимают во внимание только вынужденное движение.

Применение в исследованиях передаточных функций позволяет достаточно просто изучать большинство свойств моделей, записанных в форме ЛОДУ или систем ЛОДУ. Например, появляется возможность с помощью алгебраических преобразований относительно легко *решать* ЛОДУ *и системы* ЛОДУ, *выполнять реорганизацию сложных систем (разложение моделей на элементарные звенья, свертывание систем моделей, реконструкцию* ЛОДУ *и систем* ЛОДУ*), исследовать асимптотические свойства решений* и т.д.

## 8.5. Элементарные экономические звенья

К элементарным моделям будем относить следующие звенья: пропорциональное, накопительное, дифференцирующее, дискретного запаздывания и инерционного запаздывания.

### *8.5.1. Пропорциональное звено*

Примерами пропорциональных звеньев в экономике могут быть переходы от одних единиц измерения к другим, от измерения величин в натуральном выражении к измерению этих величин в денежном выражении и т.п. В соответствии со свойствами преобразования Лапласа (табл. 8.2) оригинал и изображение пропорционального звена имеют вид

$$y(t) = a\, x(t) \leftrightarrow Y(p) = a\, X(p), \qquad (8.5.1)$$

где $a$ – коэффициент пропорциональности (усиления, ослабления).

Из формулы изображения выводим передаточную функцию звена $W(p) = Y(p)/X(p) = a$. Имея передаточную функцию, можно вычислить изображение реакции при любом экзогенном воздействии:

$$Y(p) = W(p)X(p) = a\,X(p).$$

Пусть, например, экзогенным воздействием является единичная ступенчатая функция, тогда $x(t) = \eta(t) \leftrightarrow X(p) = 1/p$. Подставим изображение этого внешнего воздействия в формулу реакции (8.5.1) и определим $Y(p) = a\,X(p) = a/p$. При $t \geq 0$ определяем оригинал реакции звена, которая согласно таблице соответствия 8.1 принимает значение $y(t) = a$. Графики экзогенного процесса и реакции при $a > 1$ представлены на рис. 8.2.

Если же экзогенное воздействие имеет синусоидальный вид и смещение относительно оси ординат, например, если

$$x(t) = (\sin(\omega t) + 1)\eta(t) \leftrightarrow X(p) = \omega/(p^2 + \omega^2) + 1/p,$$

то изображение реакции будет иметь вид

$$Y(p) = a\,X(p) = a\,[\omega/(p^2 + \omega^2) + 1/p] = a\omega/(p^2 + \omega^2) + a/p.$$

Оригинал реакции звена согласно таблице соответствия при $t \geq 0$ получаем в виде (см. рис. 8.3)

$$y(t) = a\sin(\omega t) + a.$$

### *8.5.2. Накопительное (интегрирующее) звено*

Примером накопительного звена может быть склад продукции или материалов, накопление данных учета продаж продукции и т.п. Накопительное звено описывается формулой

$$y(t) = \int_0^t x(t)dt + y_0,$$

где $y_0 = y(0)$ – реакция в нулевой момент времени.

Изображение этой формулы имеет вид $Y(p) = X(p)/p + y_0/p$. Отсюда выводим формулу передаточной функции при $y_0 = 0$:

$$W(p) = Y(p)/X(p) = 1/p.$$

Передаточная функция дает возможность вычисления изображения реакции звена на экзогенное воздействие при $y_0 = 0$ по операционной формуле

$$Y(p) = W(p)\,X(p) = X(p)/p.$$

Например, $x(t) = \eta(t) \leftrightarrow X(p) = 1/p$. Тогда

$$Y(p) = W(p)X(p) = 1/p \times 1/p = 1/p^2.$$

Реакция звена согласно таблице соответствия 8.1 при $t \geq 0$ будет функцией $y(t) = t$, как показано на рис. 8.4.

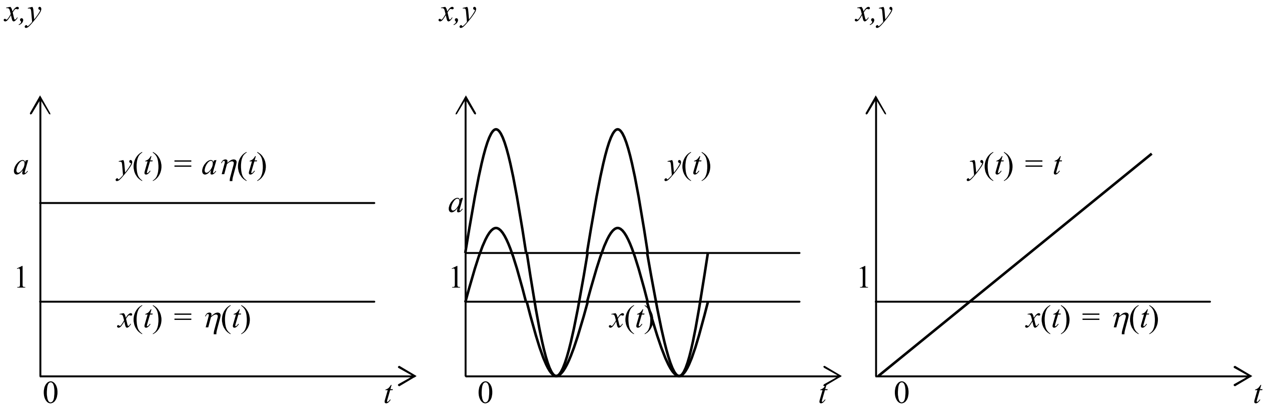


Рис. 8.2 Рис. 8.3 Рис. 8.4

### *8.5.3. Дифференцирующее звено*

По отношению к интегрирующему звену дифференцирующее звено выполняет обратную функцию. Примером дифференцирующего звена является хозяйственное подразделение, которое ведет накопительный учет поступления продукции и выдает отчетность вышестоящему органу за каждый достаточно малый промежуток времени.

Дифференцирующее звено и его изображение описываются формулами

$$y(t) = x'(t) \leftrightarrow Y(p) = pX(p) - x_0, \qquad (8.5.2)$$

где $x_0 = x\ (0)$ – начальное значение экзогенного воздействия $x(t)$, $t \geq 0$.

На основании связи изображения и оригинала (8.5.2) при $x_0$ = = 0 нетрудно вывести передаточную функцию:

$$W(p) = Y(p) / X(p) = p.$$

Следовательно, изображение реакции звена на изображение экзогенного воздействия при $x_0 = 0$ определяется по формуле

$$Y(p) = W(p)\, X(p) = p\, X(p).$$

Пусть экзогенное воздействие $x\,(t) = t \leftrightarrow X(p) = 1/p^2$ при $t \geq 0$. Тогда $Y(p) = W(p)\, X(p) = p/p^2 = 1/p$. Следовательно, реакция звена согласно таблице соответствия 8.1 будет $y(t) = 1$. На рис. 8.4 экзогенное воздействие и реакцию следует поменять местами.

### *8.5.4. Звено дискретного запаздывания*

Звено дискретного запаздывания отражает такие объекты, у которых реакция на входное воздействие запаздывает, повторяя форму входного процесса. Ярким примером такого объекта моделирования может служить фирма, которая в ответ на заказ осуществляет поставки продукции потребителю через фиксированное время, необходимое для перевозки грузов железнодорожным транспортом.

Звено дискретного запаздывания и его операционная формула имеют вид

$$y(t) = x(t - T)\,\eta\,(t - T) \leftrightarrow Y(p) = e^{-pT} X(p).$$

Отсюда выводим формулу передаточной функции

$$W(p) = Y(p) \,/\, X(p) = e^{-pT}.$$

Следовательно, изображение реакции звена в ответ на экзогенный процесс определяется равенством

$$Y(p) = W(p)\, X(p) = e^{-pT} X(p).$$

Если, например, экзогенным воздействием является функция времени $x(t) = t^2\,\eta(t) \leftrightarrow X(p) = 2/p$, то изображение реакции $Y(p) = W(p)\, X(p) = e^{-pT} \times 2/p$. В соответствии со свойством запаздывания (табл. 8.2) оригинал реакции имеет вид смещенной по оси $t$ и имеющей нулевое значение при $t < T$ функции

$$y(t) = (t - T)^2\,\eta\,(t - T),$$

как показано на рис 8.5.

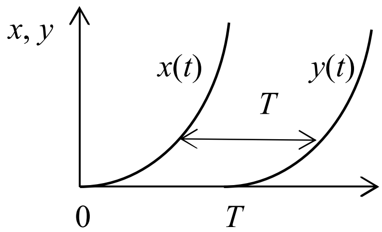

Рис. 8.5

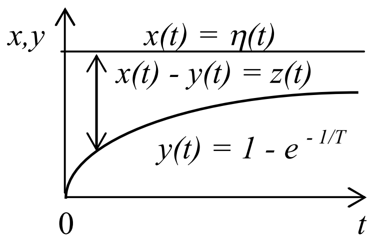

Рис. 8.6

### *8.5.5. Звено инерционного запаздывания*

Звенья инерционного запаздывания (инерционные звенья) отражают такие объекты, у которых реакция на входное воздействие запаздывает. При этом форма выходного процесса не повторяет форму входного процесса. Если входной процесс представляет собой поток информации, материалов, энергии, денежных средств и т.д., то скорость выходного процесса пропорциональна разности входного и выходного процессов. Звеньями инерционного запаздывания моделируют, например, покупательскую реакцию в ответ на поступление товара в продажу, выпуск серийной продукции предприятием в зависимости от получения сырья и других исходных материалов.

Инерционное звено первого порядка описывается дифференциальным уравнением

$$Ty'(t) + y(t) = x(t), \tag{8.5.3}$$

где $T$ – лаг, среднее время запаздывания.

Поскольку звено (8.5.3) описывается одним ЛОДУ первого порядка, постольку оно включено в данный раздел. Вместе с тем математически его можно представить как систему (см. параграф 8.7), т.е. разложить на элементарные звенья.

Изображение звена (8.5.3) согласно таблице соответствия имеет вид

$$T\,[pY(p) - y_0] + Y(p) = X(p).$$

Его можно записать в другой форме:

$$(Tp+1)Y(p) = X(p) + T\,y_0.$$

Выведем формулу передаточной функции звена при $y_0 = 0$:

$$W(p) = Y(p)\,/\,X(p) = 1/(T\,p + 1).$$

Следовательно, реакция звена при $y_0 = 0$ описывается операционным выражением вида

$$Y(p) = W(p)\,X(p) = 1/(T\,p + 1) \times X(p). \tag{8.5.4}$$

В качестве примера рассмотрим реакцию звена на экзогенное воздействие в форме единичной ступенчатой функции $\eta(t) \leftrightarrow 1/p$ при условии $y_0 = 0$. На основании (8.5.4) выводим формулу изображения реакции:

$$Y(p) = 1/(T\,p + 1) \times 1/p = 1/T \times 1/[p(p + 1/T)]. \tag{8.5.5}$$

Для определения оригинала реакции представим второй сомножитель выведенного изображения реакции (8.5.5) в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1}{p(p+1/T)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1/T}\ . \tag{8.5.6}$$

Для вычисления постоянных величин $A_1$ и $A_2$ воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Поэтому запишем (8.5.6) иначе:

$$\frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p+1/T} = \frac{(A_1 + A_2)p + A_1/T}{p(p+1/T)}. \tag{8.5.7}$$

Из (8.5.6) и (8.5.7) следует

$$(A_1 + A_2)p + A_1/T = 1.$$

Это означает, что мы имеем следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}(A_1+A_2)p = 0,\\ A_1/T = 1.\end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $A_1 = T$. После подстановки значения первого коэффициента в первое уравнение и решения этого уравнения имеем $A_2 = -T$.

Подставив вычисленные значения коэффициентов в (8.5.6), получим

$$\frac{1}{p(p+1/T)} = \frac{T}{p} - \frac{T}{p+1/T} .$$

Следовательно, из (8.5.5) можно вывести следующее изображение реакции инерционного звена:

$$Y(p) = 1/T \times 1/[p(p + 1/T)] =$$
$$= 1/T \times [T/p - T/(p + 1/T)] = 1/p - 1/(p + 1/T).$$

По таблице соответствия 8.1 находим оригиналы первого и второго слагаемого при $t \geq 0$ и получаем формулу оригинала реакции звена $y(t) = 1 - e^{-t/T}$. Графики этих функций изображены на рис. 8.6.

Если единичная ступенчатая функция $x(t) = \eta(t)$ отражает единовременный ввод в эксплуатацию производственных фондов предприятия на сумму 1 млрд. руб., а реакция $y(t) = 1 - e^{-t/T}$ соответствует накопленному выбытию производственных фондов в результате износа (в денежном выражении), то в эксплуатации находятся производственные фонды на сумму

$$x(t) - y(t) = 1 - [1 - e^{-t/T}] = e^{-t/T} \text{ (при } t \geq 0).$$

Оригиналы и изображения, а также передаточные функции рассмотренных выше звеньев сведены в табл. 8.3

Таблица 8.3

| № п/п | Название | В оригиналах | В изображениях | Передаточная функция |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Пропорциональное звено | $y(t) = a\,x(t)$ | $Y(p) = a\,X(p)$ | $a$ |
| 2 | Интегрирующее звено | $y(t) = \int_0^t x(t)dt + y_0$ | $Y(p) = X(p)/p + y_0/p$ | $1/p$ |
| 3 | Дифференцирующее звено | $y(t) = x'(t)$ | $Y(p) = pX(p) - x_0$ | $p$ |
| 4 | Звено дискретного запаздывания | $y(t) = x(t-T)$ | $Y(p) = e^{-pT} X(p)$ | $e^{-pT}$ |
| 5 | Инерционное звено 1-го порядка | $Ty'(t) + y(t) = x(t)$ | $Y(p) = X(p)/(Tp+1) + y_0T/(Tp+1)$ | $1/(Tp+1)$ |

## 8.6. Структурные преобразования моделей экономических систем

Экономические системы отличаются большим разнообразием структур, конфигураций связей между отдельными звеньями систем. Типичными структурами систем являются: *последовательная*, *параллельная* и *встречно-параллельная* (структура *кибернетического типа*, имеющая обратную связь).

Применение операционного исчисления для структурных преобразований позволяет осуществлять свертывание моделей систем или, наоборот, осуществлять их разложение.

***Свертывание модели*** *– это преобразование многозвенной (сложной) модели в относительно простую, однозвенную модель (без деления отображаемого объекта на части).*

***Разложение модели*** *– это ее преобразование из однозвенной в состоящую из нескольких звеньев.*

Исследование поведения объекта состоит в решении соответствующих ЛОДУ или систем ЛОДУ и выявлении реакции системы на разные экзогенные воздействия. Однако задача существенно упрощается, если вывести передаточную функцию системы в целом и по этой функции определить вынужденную траекторию под влиянием экзогенных воздействий.

Поэтому модель в форме системы ЛОДУ с помощью преобразования Лапласа превращают в форму системы линейных алгебраических уравнений. Иначе говоря, если система состоит из множества взаимосвязанных звеньев, каждое из которых моделируют в виде ЛОДУ, то такая система дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических уравнений. Затем решают систему алгебраических уравнений и находят оригиналы реакций на экзогенные воздействия.

Возможность найти решения систем ЛОДУ основана на том, что изображения реакций систем имеют дробно-рациональный вид (8.4.3) и могут быть представлены как суммы простейших дробей. Поэтому появляется возможность моделировать экономические системы, имеющие последовательное, параллельное или встречно-параллельное соединение звеньев. Это позволяет определять поведение каждого звена и системы в целом, проводить другие исследования.

### 8.6.1. Структурные преобразования систем с последовательным соединением

Рассмотрим свертывание модели системы с последовательным соединением звеньев (рис. 8.7). Свертывание модели состоит в определении передаточной функции системы в целом на основании известных передаточных функций входящих в систему звеньев.

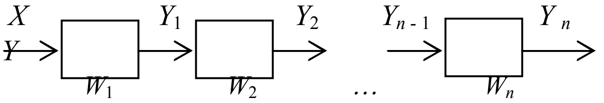


Рис. 8.7

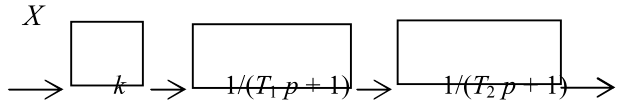


Рис. 8.8

Реакция каждого звена системы описывается соответствующей операторной формулой:

$$Y_1(p) = W_1(p)X(p),\ Y_2(p) = W_2(p)Y_1(p),\ \ldots,\ Y_n(p) = W_n(p)Y_{n-1}(p).$$

Подставляем значение реакции $Y_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ предыдущего звена в формулу, выражающую реакцию последующего звена $Y_i(p)$, $i = 2, \ldots, n$, т.е. выражение $Y_1(p)$ – в формулу для $Y_2(p)$, полученное выражение $Y_2(p)$ – в формулу для $Y_3(p)$, полученное выражение $Y_3(p)$ – в формулу для $Y_4(p)$ и т.д. Тогда имеем изображение реакции системы $Y(p)$ в ответ на экзогенное воздействие $X(p)$:

$$Y(p) = [W_n(p)\ W_{n-1}(p)\ \ldots\ W_1(p)]\ X(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)X(p). \quad (8.6.1)$$

Из операторной формулы (8.6.1) делением изображения реакции на изображение экзогенного воздействия выводим передаточную функцию системы в целом:

$$W(p) = Y(p)/X(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p).$$

Разложение модели на элементарные звенья состоит, например, в том, что передаточная функция системы разделяется на ряд сомножителей. В начальном виде передаточная функция объекта представляет собой правильную рациональную дробь вида (8.3.1). Затем эту передаточную функцию представляем в виде произведения других передаточных функций.

В качестве примера возьмем конкретную систему, которой соответствует передаточная функция

$$Y(p)/X(p) = 2/(10\,p^2 + 7\,p + 1).$$

Покажем, что эта модель представляет собой три последовательно соединенных звена: пропорциональное звено с коэффициентом усиления $k$ и два инерционных звена первого порядка с соответствующими лагами $T_1$ и $T_2$. Структура предполагаемой системы изображена на рис. 8.8. Для выявления звеньев представим передаточную функцию в виде произведения передаточных функций входящих в систему частей.

Прежде всего, выделим постоянный сомножитель:

$$Y(p)/X(p) = 2/(10\,p^2 + 7\,p + 1) = 0{,}2 \times 1/(p^2 + 0{,}7\,p + 0{,}1).$$

Теперь найдем корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 0{,}5$ и $\lambda_2 = 0{,}2$ и представим характеристический полином в виде произведения двух сомножителей:

$$(p^2 + 0{,}7\,p + 0{,}1) = (p + 0{,}5)(p + 0{,}2).$$

Следовательно, передаточная функция приобретает иной вид:

$$0{,}2 \times 1/(p^2 + 0{,}7\,p + 0{,}1) = 0{,}2 \times 1/(p + 0{,}5) \times 1/(p + 0{,}2).$$

Полученное произведение можно представить с выделением двух передаточных функций инерционных звеньев первого порядка:

$$0{,}2 \times 1/(p + 0{,}5) \times 1/(p + 0{,}2) = 2 \times 1/(2p + 1) \times 1/(5p + 1).$$

Таким образом, получена модель системы с преобразованной передаточной функцией

$$Y(p)/X(p) = 2 \times 1/(2p + 1) \times 1/(5p + 1),$$

в составе которой три последовательно соединенных звена, как показано на рис. 8.8: пропорциональное звено с коэффициентом усиления $k = 2$, инерционное звено первого порядка, имеющее лаг $T_1 = 2$, и инерционное звено первого порядка, имеющее лаг $T_2 = 5$.

### *8.6.2. Структурные преобразования параллельных систем*

Перейдем к системам с параллельным соединением звеньев. Такая система отражает, например, ряд подразделений предприятия, которым поступают одинаковые заказы в денежном или натуральном выражении $x(t)$ на производство продукции. В результате работы каждое $i$-е ($i = 1, \ldots, n$) подразделение выпускает и реализует продукцию на сумму $y_i(t)$. Доход предприятия слагается из совокупности доходов всех подразделений:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t).$$

Структура системы такого типа изображена на рис. 8.9. Если на систему параллельно действующих звеньев подается единый для всех звеньев экзогенный процесс $x(t) \leftrightarrow X(p)$, то реакцию каждого звена определяют по операторным формулам:

$$Y_1(p) = W_1(p)X(p),\ Y_2(p) = W_2(p)X(p),\ \ldots,\ Y_n(p) = W_n(p)X(p). \tag{8.6.2}$$

Выход системы в целом выражается следующей формулой:

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p).$$

Подставим в эту формулу выражения $Y_i(p)$ из операторных уравнений звеньев (8.6.2), вынесем $X(p)$ за знак суммы и получим

$$Y(p) = W_1(p)X(p) + \ldots + W_i(p)X(p) + \ldots + W_n(p)X(p) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} W_i(p)X(p).$$

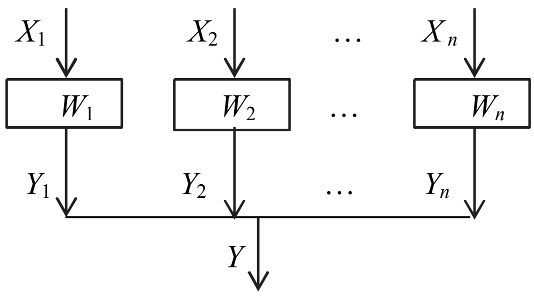


Рис. 8.9

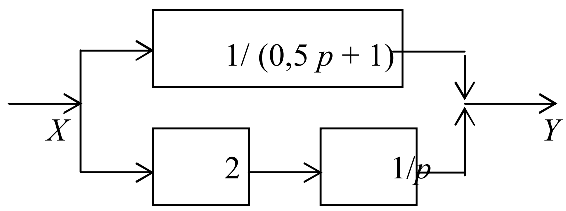


Рис. 8.10

Отсюда выводим передаточную функцию системы делением изображения реакции системы на изображение экзогенного воздействия:

$$W(p) = Y(p)/X(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p). \tag{8.6.3}$$

Пусть, например, передаточная функция (8.6.3) имеет конкретный вид

$$W(p) = 4(p + 1)/[p(p + 2)]. \tag{8.6.4}$$

Покажем, что модель системы, которой соответствует эта передаточная функция, состоит из двух параллельных ветвей. Для этого (8.6.4) представим в виде суммы простых дробей:

$$4(p + 1)/[p(p + 2)] = 1/(0{,}5\,p + 1) + 2/p.$$

Первое слагаемое отражает одну ветвь системы (словом “ветвь” здесь и далее будем обозначать последовательно соединенные звенья, в частном случае – одно звено). Эта ветвь в соответствии с табл. 8.3 представляет собой инерционное звено первого порядка с лагом $T = 0{,}5$. Во второй ветви последовательно действуют пропорциональное звено с коэффициентом усиления 2 и интегрирующее звено. Структура этой системы изображена на рис. 8.10.

Передаточная функция системы с параллельным соединением звеньев имеет вид (8.6.3) в случае, если, например, $x(t)$ – информационный процесс, значение которого в любой момент времени одинаково для всех звеньев системы. Вещественный (денежный, энергетический) входной поток системы либо должен быть одинаковым на входе каждого звена системы, либо должен как-то распределяться между звеньями. Такое распределение потребует введения дополнительного оператора, который определяет входные процессы каждого звена отдельно.

## 8.7. Системы кибернетического типа. Экономический мультипликатор

Как правило, создание экономических систем кибернетического типа преследует определённые цели. В зависимости от поставленной цели управления кибернетические системы создают либо с отрицательной обратной связью, либо с положительной обратной связью. Для ослабления экзогенного воздействия на конечный результат работы создают системы с отрицательной обратной связью. Для усиления экзогенного воздействия на конечный результат работы создают системы с положительной обратной связью.

Характерной особенностью системы кибернетического типа является контурная конфигурация. Система имеет два звена (рис. 8.11): звено прямого действия А и встречного действия Б. В такой системе реакция $y(t) \leftrightarrow Y(p)$ первого звена А является входным воздействием второго звена Б. Реакция $u(t) \leftrightarrow U(p)$ второго звена Б совместно с экзогенным воздействием $x(t) \leftrightarrow X(p)$ является входным процессом $z(t) \leftrightarrow Z(p)$ первого звена А.

В системе образуется обратная связь по цепочке звена встречного действия Б. Передаточная функция звена А обозначена через $W$, а звена Б – через $\Phi$. В системах кибернетического типа по цепи обратной связи могут проходить потоки денег или других ресурсов, информация о рыночном спросе или предложении, о дефиците или избытке товаров и т. п. В кибернетических системах субъект управления (управляющее звено Б) контролирует управляемую часть системы (управляемое звено А), вырабатывает и выполняет управляющие, целенаправленные воздействия. Цель управления состоит в том, чтобы выходной процесс имел нужные характеристики. Именно в зависимости от нужных характеристик организуют системы кибернетического типа либо с отрицательной обратной связью ($-\ U(p)$), либо с положительной обратной связью ($+\ U(p)$).

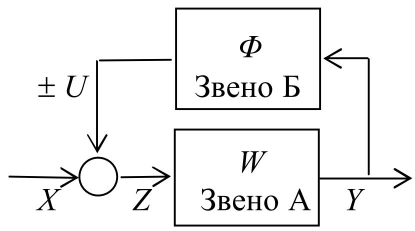

Рис. 8.11

***Системы с отрицательной обратной связью,*** *выполняющие, как правило, автоматическую стабилизацию выходного процесса на заданном уровне, называют системами автоматического регулирования.* Примером может служить система регулирования запаса некоторого продукта. Запас обеспечивает удовлетворение спроса, который можно рассматривать как внешнее воздействие. По отклонению запаса от заданного уровня выдают заказы поставщикам. Поставки пополняют запас в ответ на заказы. В случае избытка запаса количество заказанного продукта сокращается, а при росте дефицита – увеличивается. Поэтому в данном случае обратная связь является отрицательной.

***Системы с положительной обратной связью****, обеспечивающие рост выходной величины в ответ на внешние воздействия, называют усилительными системами*. Процесс усиления происходит, например, в системе расширенного воспроизводства, в которой увеличение объёма производства продукции зависит от размера производственного капитала. С целью увеличения капитала предприятие вкладывает часть собственных средств, полученных от реализации продукции, и, кроме того, дополнительно привлекает внешние капиталовложения. Внешние капиталовложения оказывают экзогенное воздействие на модель.

Итак, при положительной обратной связи входное воздействие на управляемую часть системы равно сумме экзогенного воздействия и управляющего процесса, при отрицательной обратной связи – их разности.

Поэтому вход звена А можно записать в форме суммы или разности: $Z(p) = X(p) \pm U(p)$, где $X(p)$ – экзогенная переменная, $U(p)$ – эндогенная, внутренняя для системы переменная. Тогда получим реакцию звена А:

$$Y(p) = W(p)\, Z(p) = W(p)\, X(p) \pm W(p)\, U(p).$$

Эндогенную переменную $U$ можно исключить из формулы модели системы, подставив значение этой величины: $U(p) = \Phi(p)Y(p)$. Тогда получаем $Y(p) = W(p)\, X(p) \pm W(p)\, \Phi(p)Y(p)$. Решим выведенное уравнение системы относительно $Y$, получим реакцию системы в целом на экзогенное воздействие в виде

$$Y(p) = \frac{W(p)}{1 \mp W(p)\Phi(p)} X(p). \qquad (8.7.1)$$

Выведенная формула системы (8.7.1) получила название *основного уравнения теории автоматического регулирования*. Реакция системы описывается передаточной функцией

$$W(p) \,/\, (1 \mp W(p)\, \Phi(p)),$$

умноженной на изображение экзогенного воздействия $X(p)$.

Рассмотрим частный случай, усилительную экономическую систему, у которой $W(p) = 1$ и $\Phi(p) = a$, где $0 < a < 1$.

Подставим передаточные функции звеньев в основное уравнение (8.7.1), получим

$$Y(p) = 1/(1 - a) \times X(p)\,.$$

Пусть $X(p)$ – внешние инвестиции в предприятие (входное воздействие на систему), $Y(p)$ – доход от реализации продукции этого предприятия, $a$ – доля дохода, направляемая на инвестиции. Если каждый рубль инвестиций в предприятие дает доход в размере одного рубля (реакция звена производства, моделируемого передаточной функцией $W(p) = 1$) и доля дохода $0 < a < 1$ используется для собственных капиталовложений, то эти капиталовложения в размере $U(p) = aY(p)$ добавляются к внешним инвестициям $X(p)$. В этом случае передаточная функция системы в целом равна $1/(1-a)$ и имеет значение больше единицы. Получается объект, который усиливает внешние воздействия, причем коэффициент усиления больше единицы. Например, если $a = 0{,}5$, то коэффициент усиления равен двум, $1/(1 - 0{,}5) = 2$.

В экономике модель системы в форме передаточной функции вида

$$\mathbf{1/(1 - \boldsymbol{a})}$$

получила название мультипликатора. Экономический смысл мультипликатора в рассмотренном примере состоит в том, что на единицу капиталовложений прирост выпуска продукции увеличивается больше чем на единицу.

Таким образом, если в теории рассматривают ***экономический мультипликатор*** (мультипликатор Кейнса, банковский мультипликатор и т.п.), то моделируемый объект или явление в экономике можно представить как *кибернетическую систему*, в которой *единичное звено прямого действия охвачено положительной обратной связью с коэффициентом усиления менее единицы*.

## 8.8. Сложные инерционные модели экономики

Ниже рассмотрены структуры математических моделей в форме инерционных звеньев первого и второго порядков. Инерционное звено первого порядка было описано в пункте 8.5.5. Здесь оно представлено в виде системы звеньев. На примере инерционной модели первого порядка выявлен смысл накопленного количества вещественных (денежных) единиц в запаздывании. Далее показано, что инерционная модель второго порядка представляет собой систему из двух инерционных звеньев первого порядка.

Рассмотрим структуру системы, которая описывается дифференциальным уравнением инерционной модели первого порядка (8.5.3). Эту формулу можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} y'(t) = 1/T \times z(t), \\ z(t) = x(t) - y(t), \end{cases} \qquad (8.8.1)$$

где $z(t)$ – количество вещественных (денежных) единиц в запаздывании в момент времени $t$, равное разности входного и выходного потоков;

$T$ – постоянный параметр модели, выражающий лаг, среднее время запаздывания.

Первое уравнение в системе (8.8.1) означает, что скорость $y'(t)$ выходного процесса инерционной модели пропорциональна текущему количеству накопленных единиц $z(t)$, коэффициент пропорциональности равен $1/T$.

Изображение инерционной модели первого порядка, соответствующее (8.8.1), представляет собой следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p\,Y(p) - y_0 = 1/T \times Z(p), \\ Z(p) = X(p) - Y(p). \end{cases}$$

Далее все выкладки будем производить при нулевом начальном условии $y_0 = 0$. Тогда модель можно представить в виде

$$\begin{cases} Y(p) = 1/p \times 1/T \times Z(p), \\ Z(p) = X(p) - Y(p). \end{cases} \qquad (8.8.2)$$

Функциональная структура этой модели изображена на рис. 8.12.

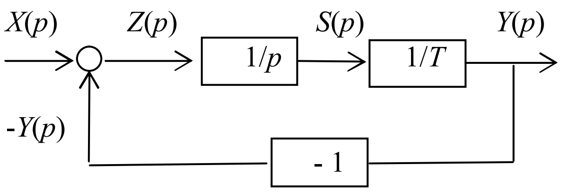


Рис. 8.12

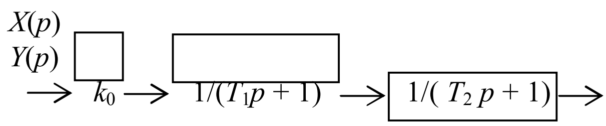


Рис. 8.13

Первое уравнение в (8.8.2) отражает реакцию $Y(p)$ в ответ на воздействие $Z(p)$. Оно указывает на наличие в системе накопительного звена, имеющего передаточную функцию $1/p$, и пропорционального звена с коэффициентом усиления $1/T$. В результате изображение реакции системы определяется по формуле $S(p) = 1/p \times Z(p)$. Далее пропорциональное звено показывает, что доля $1/T$ накопленного количества вещественных (денежных) единиц, которые находятся в запаздывании, поступает на выход. Поэтому имеем изображение выхода $Y(p) = 1/p \times 1/T \times$ $\times\, Z(p)$.

Эти два звена охвачены отрицательной обратной связью через пропорциональное звено с коэффициентом усиления (–1). Поэтому в соответствии со вторым уравнением в (8.8.2) на вход последовательности двух звеньев поступает разность изображений экзогенного процесса $X(p)$ и реакции системы $Y(p)$.

Из рассмотренного примера можно сделать два практических вывода.

1. Инерционную модель первого порядка можно рассматривать как систему, составленную из трех элементарных звеньев.

2. Если текущий уровень любых вещественных (денежных) единиц в запаздывании непрерывно расходуется с постоянным коэффициентом пропорциональности, то такой экономический объект можно моделировать как инерционное звено первого порядка.

Перейдем к рассмотрению структуры *инерционной модели второго порядка*, которая описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = k\,x(t), \qquad (8.8.3)$$

где $a$, $b$, $c$, $k$ – постоянные коэффициенты.

Изображение этого уравнения имеет вид

$$ap^2 Y(p) - a[py(0) + y'(0)] + bpY(p) - by(0) + cY(p) = kX(p).$$

При нулевых начальных условиях ($y(0) = 0$, $y'(0) = 0$) изображение дифференциального уравнения (8.8.3) имеет вид

$$a\,p^2\,Y(p) + b\,p\,Y(p) + c\,Y(p) = k\,X(p).$$

Передаточная функция модели

$$W(p) = k/(a\,p^2 + b\,p + c) \qquad (8.8.4)$$

имеет характеристический полином $a\,p^2 + b\,p + c$.

Для преобразования этой модели в систему инерционных звеньев первого порядка необходимо решить характеристическое уравнение $a\,p^2 + b\,p + c = 0$. Если корни этого уравнения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ действительные и отрицательные, то характеристический полином можно разложить на сомножители:

$$a\,p^2 + b\,p + c = a\,(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) =$$
$$= (a\,\lambda_1\,\lambda_2) \times (-\,p/\lambda_1 + 1) \times (-\,p/\lambda_2 + 1).$$

Подставив выведенное выражение характеристического полинома в (8.8.4), передаточную функцию системы в целом можно записать в виде произведения передаточных функций входящих в нее звеньев следующим образом:

$$W(p) = k/(a\,p^2 + b\,p + c) = k_0 \times 1/(T_1 p + 1) \times 1/(\,T_2\,p + 1),$$

где $k_0 = k/(a\,\lambda_1\,\lambda_2)$, $T_1 = -\,1/\lambda_1$, $T_2 = -\,1/\lambda_2$.

Следовательно, *инерционную модель второго порядка* можно представить как систему, состоящую из последовательности трех звеньев – пропорционального и двух инерционных звеньев первого порядка. Структура этой модели представлена на рис. 8.13.

Примером передаточной функции такой системы может служить выражение

$$W(p) = 1/(p^2 + 0{,}75\,p + 0{,}125). \qquad (8.8.5)$$

Не трудно убедиться, что в данном случае корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -\,0{,}25$ и $\lambda_2 = -\,0{,}5$. Значит модель (8.8.5) можно представить как произведение с выделением передаточных функций инерционных звеньев первого порядка:

$$1/(p^2 + 0{,}75\,p + 0{,}125) = 1/(p + 0{,}25) \times 1/(p + 0{,}5) =$$
$$= 8 \times 1/(4p + 1) \times 1/(2p + 1).$$

Таким образом, передаточной функции (8.8.5) соответствует система последовательно соединенных звеньев – пропорционального звена с коэффициентом усиления $k_0 = 8$ и двух инерционных звеньев первого порядка, имеющих лаги $T_1 = 4$ и $T_2 = 2$ соответственно.

Вместе с тем рассматриваемую систему можно разложить на две параллельных ветви. В этом случае передаточную функцию модели (8.8.5) следует представить как сумму

$$1/(p^2 + 0{,}75\,p + 0{,}125) = A_1/(p - \lambda_1) + A_2/(p - \lambda_2),$$

где $A_1 = 4$, $A_2 = -\,4$, $\lambda_1 = -\,0{,}25$, $\lambda_2 = -\,0{,}5$. Следовательно,

$$1/(p^2 + 0{,}75\,p + 0{,}125) = 4/(p + 0{,}25) - 4/(p + 0{,}5).$$

С выделением инерционных звеньев первого порядка передаточная функция приобретает вид

$$A_1/(p - \lambda_1) + A_2/(p - \lambda_2) = 1/(T_1 p + 1) \times\ k_1 + 1/(T_2 p + 1) \times k_2,$$

где $k_1 = -\,A_1/\lambda_1 = 16$, $k_2 = A_2/\lambda_2 = -\,8$, $T_1 = -\,1/\lambda_1 = 4$, $T_2 = -\,1/\lambda_2 = 2$.

Таким образом,

$$1/(p^2 + 0{,}75\,p + 0{,}125) = 16/(4p + 1) - 8/(2p + 1).$$

Итак, мы имеем две параллельные ветви, как показано на рис. 8.14. В первой ветви последовательно соединены: пропорциональное звено с коэффициентом усиления $k_1$ = 16 и инерционное звено первого порядка, имеющее лаг $T_1$ = 4. Во второй ветви последовательно соединены: пропорциональное звено с коэффициентом усиления $k_2$ = – 8 и инерционное звено первого порядка, имеющее лаг $T_2$ = 2. Знаки пропорциональных звеньев противоположны. Это означает, что реакция первой ветви ослабляется реакцией второй ветви системы.

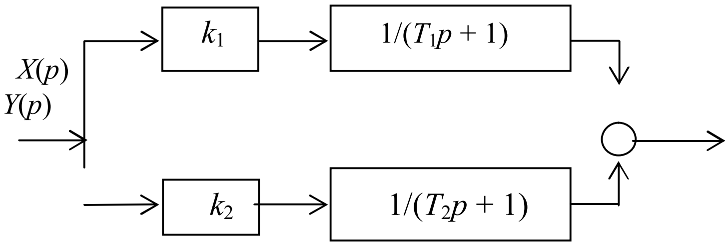

Рис. 8.14

## *8.9. Учебные задания*

### *8.9.1. Составьте слово*

Зачеркните слова в прямоугольнике горизонтальными и вертикальными непрерывными ломаными линиями в любом направлении. Каждая буква входит только в одно слово. Значения слов приведены ниже прямоугольника. Из оставшихся букв составьте слово, которое имеет непосредственное отношение к учебе.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| У | Н | И | Р | Е | А | К | Ц | И | Я | С | И | Я | О | Ж |
| Н | А | Л | И | З | У | С | И | Л | И | Т | Е | И | Л | Е |
| А | П | И | Л | П | И | Т | Ь | Л | У | М | Л | Н | З | Н |
| В | О | К | О | Д | Н | О | Н | А | П | Р | Ь | А | А | И |
| Е | З | А | Е | О | Н | Н | Е | Л | В | О | Н | В | Р | Е |
| Д | Е | Т | О | Р | В | З | В | Е | Р | Й | А | О | Т | Р |
| Е | Т | С | М | Я | Е | Р | Е | Г | У | Л | И | Р | Ы | Е |
| Н | Н | И | И | Ь | Н | Т | Е | Т | Е | Р | Е | П | В | В |
| И | Е | Й | О | Н | Ч | О | Т | А | Д | Е | И | Н | А | С |

• Системы, выполняющие автоматическую стабилизацию выходного процесса на заданном уровне, называют системами автоматического … • Систему с положительной обратной связью, обеспечивающую рост выходной величины в ответ на внешние воздействия, называют … системой. • Если в теории рассматривают экономический …, то моделируемый объект или явление в экономике можно представить как кибернетическую систему, в которой единичное звено прямого действия охвачено положительной обратной связью с коэффициентом усиления менее единицы. • Преобразование модели из однозвенной в состоящую из нескольких звеньев называют … модели. • Преобразование многозвенной модели в относительно простую, однозвенную модель (без деления отображаемого объекта на части) называют … модели. • Экзогенное воздействие на модель вызывает … звена (системы). • В операционном исчислении отношение изображения реакции звена к изображению экзогенного процесса называется … функций. • Модели частей изучаемого объекта называют … сложной модели. • При помощи математических моделей в форме ЛОДУ методами операционного исчисления исследуют … экономических объектов. • В операционном исчислении специфика моделей состоит в том, что каждое звено системы имеет … действие. • С целью выявления реакции экономического объекта на внешние воздействия проводят … модели объекта. • С целью определения параметров модели, выбора звеньев и структуры системы, поведение которой отвечает определенным требованиям, осуществляют … модели.

### *8.9.2. Задачи*

1. Ежемесячный спрос на товар по итогам продаж за месяц имеет сезонные колебания и тенденцию роста и описывается функцией $x(t) = At + B\sin(\omega t)$. Варианты параметров функции представлены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 50 | 20 | 30 | 15 | 30 | 70 | 20 | 45 | 55 | 10 |
| *B* | 20 | 15 | 15 | 5 | 10 | 40 | 10 | 20 | 20 | 5 |
| *t* (мес.) | 11 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Необходимо выполнить следующее.

1) Установить, в какие месяцы спрос будет равен $A + Bt$ и $A - Bt$.

2) Найти изображение функции спроса.

3) Вычислить спрос за месяц $t$, указанный в табл. 8.4.

4) Построить годовой график изменения спроса.

2. Изображение функции, описывающей производство продукции за месяц, задано формулой $X(p) = -A/(p^2 - 0{,}05p)$. Варианты коэффициента $A$ представлены в табл. 8.5.

Таблица 8.5.

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 85 | 90 |

Необходимо выполнить следующее.

1) Определить оригинал функции производства продукции.

2) Построить график этой функции за половину года.

3) Вычислить темп и индекс роста производства продукции в конце полугодия.

3. Строительство предприятия моделируется как инерционное звено первого порядка с лагом 2 года. Известны экзогенные инвестиции $x(t) = Ae^{-0,5t}$ млрд руб. и объем незавершенного строительства $z_0$ млрд руб. Варианты значений А и $z_0$ представлены в табл. 8.6.

Таблица 8.6

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 70 | 80 | 90 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 65 |
| $z_0$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |

Требуется выполнить следующее.

1) Представить объект моделирования в форме ЛОДУ и передаточной функции.

2) Определить изображение процесса ввода ОПФ в эксплуатацию.

3) Разложить найденные изображения на сумму простых дробей, выявить типы звеньев, входящих в систему.

4) Определить оригинал процесса ввода ОПФ в эксплуатацию.

5) Вычислить значение величины незавершенного строительства через год после начала строительства.

4. Склад продукции моделируется накопительным звеном. Варианты процессов поступления продукции $x(t)$ тыс. ед. в сутки и текущего запаса $z_0$ тыс. ед. продукции представлены в табл. 8.7.

Таблица 8.7

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $\delta(t)$ | $2\delta(t)$ | $\eta(t)$ | $2\eta(t)$ | $\exp(0,1t)$ | $2\exp(0,1t)$ | $2t$ | $\sin(\omega t)+1$ | $2t^2$ | $5t^2$ |
| $z_0$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 |

Требуется выполнить следующее.

1) Представить объект моделирования в форме ЛОДУ и передаточной функции.

2) Определить изображение процесса ввода ОПФ в эксплуатацию.

3) Разложить найденные изображения на сумму простых дробей, выявить типы звеньев, входящих в систему.

4) Определить оригинал процесса ввода ОПФ в эксплуатацию.

5) Вычислить количество продукции на складе через интервал 2 ед. времени.

5. Модель системы определена в форме ЛОДУ. Варианты модели представлены в табл. 8.8.

Таблица 8.8.

| Вариант | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| ЛОДУ | $y'(t) - By(t) = x(t)$ | $Ty''(t) + y'(t) - \mu a\, y(t) = \mu x(t)$ | $y'(t) + (n - \mu a)\, y(t) = \mu x(t)$ |

| Вариант | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| ЛОДУ | $T_1 y''(t) + T_2 y'(t) + y(t) = k[T_3 x'(t) + x(t)]$ | $Ty''(t) + y'(t) = kx(t)$ | $y'(t) + ny(t) = \mu x(t)$ |

| Вариант | 7 | 8 |
|---|---|---|
| ЛОДУ | $y''(t) - 4y'(t) + 8y(t) = 10x'(t) - 20x(t)$ | $y^{(V)}(t) + 2y^{(IV)}(t) - 2y'''(t) = 2x'''(t) + 2x'(t) + 2x(t)$ |
| Вариант | 9 | 10 |
| ЛОДУ | $y''(t) - y'(t) + 7y(t) = x(t)$ | $y'''(t) - 2y''(t) - 5y'(t) = 10x''(t) + 6x'(t) - 8x(t)$ |

Требуется выполнить следующее.

1) Определить передаточную функцию системы.

2) Найти изображение реакции системы в ответ на экзогенные воздействия $\delta(t)$ и $\eta(t)$.

3) Разложить найденные изображения на суммы простых дробей, выявить типы звеньев, входящих в систему.

4) Определить оригиналы реакции системы.

5) Составить структурную схему моделируемой системы из элементарных звеньев.

6. Варианты передаточных функций представлены в табл. 8.9.

Таблица 8.9

| Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Передат. функц. | $\frac{\mu}{p + n - a\mu}$ | $\frac{1}{p^2 - p + 7}$ | $\frac{10p^2 + 6p - 8}{p^3 - 2p^2 - 5p}$ | $\frac{\mu}{Tp^2 + p - \mu a}$ | $\frac{1}{p - B}$ |
| Вариант | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Передат. функц. | $\frac{k}{Tp(p+1)}$ | $\frac{10(p-2)}{p^2 - 4p + 8}$ | $\frac{k(T_3 p + 1)}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$ | $\frac{2p^3 + 2p + 2}{p^3(p^2 + 2p - 2)}$ | $\frac{\mu}{p + n}$ |

Требуется выполнить следующее.

1) Найти изображение реакции системы в ответ на экзогенные воздействия $\delta(t)$ и $\eta(t)$.

2) Разложить найденные изображения на суммы простых дробей, выявить типы звеньев, входящих в систему.

3) Определить оригиналы реакции системы.

4) Составить структурную схему моделируемой системы из элементарных звеньев.