

# ПРИРОДА

№ 1, 2000 г.

В.И. Найденов, И. А. Кожевникова

## Эффект Харста в геофизике

© "Природа"

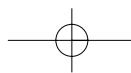
*Использование или распространение этого материала  
в коммерческих целях  
возможно лишь с разрешения редакции*



Образовательный сетевой выпуск

**VIVOS VOCO! - ЗОВУ ЖИВЫХ!**

<http://www.accessnet.ru/vivovoco>



# Эффект Харста в геофизике

Вода — первоначало всего.

Фалес

В.И.Найденов,  
И.А.Кожевникова

Британский климатолог Г.Харст более 60 лет провёл в Египте, где участвовал в гидротехнических проектах на Ниле. В 1951 г. он опубликовал работу, в которой описал неожиданный эффект в поведении среднегодовых колебаний стока этой и ряда других рек<sup>1</sup>. Чтобы понять его суть, давайте сначала предположим, что расход воды в реке во все годы одинаков. Тогда суммарный расход за много лет был бы пропорционален полному времени:  $Q \cdot t$ . Однако на основе этого предположения еще никому не удалось предсказать сток реки в наступающем году по значениям расхода воды в предыдущие годы.

Если же считать, что расходы воды в каждом году — последовательность случайных величин, не связанных друг с другом, то суммарный расход воды  $Q$  окажется пропорционален  $t^{0.5}$ . Именно так и полагал Харст, приступая к статистической обработке временного ряда

да расходов (паводков) на Ниле с 622 по 1469 г. Однако подсчеты, выполненные ученым, опровергли и эту гипотетическую зависимость. Оказалось, что суммарный сток Нила соответствует соотношению

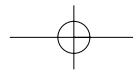


*Вячеслав Иосифович Найденов, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией поверхностных вод Института водных проблем РАН. Область научных интересов — теплофизика, механика жидкостей и газов, тепломассообмен в водных средах. В настоящее время занимается нелинейными задачами в гидрологии. Неоднократно публиковался в «Природе».*

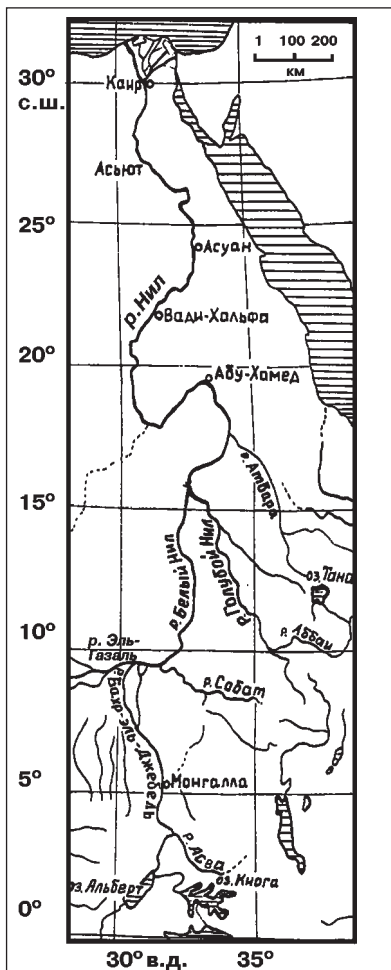


*Ирина Аркадьевна Кожевникова, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Занимается статистическим и спектральным анализом временных рядов, статистикой случайных процессов, моделированием стохастических процессов. Автор монографии «Стохастическое моделирование процессов» (М., 1990).*

<sup>1</sup> Hurst H. // Trans. Amer. Soc. of Civil Eng. 1951. V.116. P.770—808.



## ГЕОФИЗИКА



Нил и его притоки.

$Q_{\text{л}}^{f0.7}$ . Это соотношение и получило название закона Харста, а показатель степени  $H$  — показателя Харста. Немного забегаая вперед, отметим, что этот показатель непосредственно определяет важные характеристики и других случайных процессов: дисперсию, низкочастотную асимптотику спектра и т.д. Существует целый ряд способов нахождения величины  $H$ , причем анализируемая физи-

ческая величина совсем не обязательно должна быть аддитивной, как в данном примере.

Мы вычислили показатели Харста для некоторых гидрологических и климатических временных рядов (за период инст-

рументальных наблюдений более 100 лет). Для стока Волги этот показатель составляет 0.752, Днепра — 0.621, Немана — 0.647, Дуная — 0.837; для годовых поступлений воды в Каспийское море — 0.767, оз. Балхаш — 0.711, Большое Солёное — 0.682, Чад — 0.690, Чаны — 0.813; для ширины годовых колец сосны и дуба соответственно — 0.764 и 0.676; для средне-годовых температур воздуха Северного полушария — 0.825, температур Москвы и Санкт-Петербурга соответственно — 0.749 и 0.653.

Интересно отметить близость величин  $H$  для стока Волги и приращений уровня Каспийского моря (0.752 и 0.767), что объясняется очень высокой корреляцией (0.86) между соответствующими временными ря-

дами. Косвенно это указывает на правильность оценок.

Анализ других временных рядов, связанных с климатом, например урожайности пшеницы, привел к следующим значениям показателя Харста: во Франции — 0.5, Германии — 0.82, Великобритании — 0.67, Канаде — 0.76, США — 0.72.

Вот уже 50 лет гидрологи всего мира не могут ответить на вопрос: каков физический механизм эффекта Харста? Не случайно в докладе одного из ведущих ученых в области геофизики В. Клемеша на Международном конгрессе по стохастической гидрологии (Москва, ноябрь 1998 г.) прозвучал вопрос: “Феномен Харста — загадка?”<sup>2</sup>. Попробуем разобраться в этом явлении, которое, судя по всему, имеет глобальный характер в геофизике, обратив-

шись к некоторым примерам, начиная с паводков Нила.

## Половодья Нила

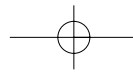
Диодор Сицилийский, путешествуя по Египту, дивился паводку на Ниле (шириной до 100 км) как явлению просто “невероятному”: “Около времени летнего солнцестояния, когда во всех реках уровень понижается (следует понимать во всех реках средиземноморского бассейна. — В.Н., И.К.), в Ниле вода начинает прибывать”<sup>3</sup>. Это явление объясняется тем, что река берет начало очень далеко от Средиземного моря и Египта.

В верхней половине течения Нил (здесь на протяжении 900 км он носит название Бахр-Эль-Джебел) пересекает зоны влажных, типичных и опустыненных саванн, где принимает крупные притоки; слева — Эль-Газаль, справа — Асва, Собат, Голубой Нил и Атбара. Далее Нил течет по тропической и субтропической полупустыне, не имея ни одного постоянного притока на протяжении 3000 км, и, естественно, беднеет из-за сильного испарения. В пустынной, сахарной зоне реки вся жизнь людей была тесно связана с паводками “отца вод”. Египет был полностью “порабощен” рекой, бывшей в то же время благословенным даром природы, без которого само существование страны стало бы невозможным. Режим Нижнего Нила зависит исключительно от расхода двух главных рукавов его верхнего течения: Белого и Голубого Нила.

Белый Нил наполняет нижнее течение реки относительно небольшим количеством воды, но непрерывно, в течение все-

<sup>2</sup> Клемеш В. Geophysical time series and climatic change // Stochastic models of hydrological processes and their applications to problems of environmental preservation. Moscow, November 23—27. 1998. P.127—130.

<sup>3</sup> См.: Моретт Ф. Экваториальная Восточная и Южная Африка. М., 1951.

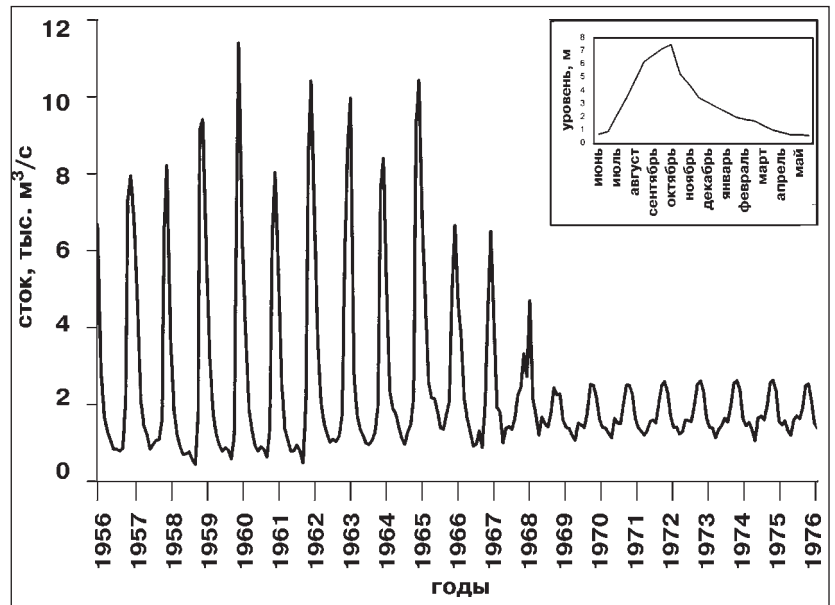


го года. Голубой Нил (точнее совокупность всех эфиопских водотоков), наоборот, представляет собой мощный, но сезонный фактор и главную причину половодий. В северной части Эфиопского массива бывает только один значительный период дождей (их приносят муссоны с Индийского океана) — с июня по сентябрь, с максимумом в июле—августе. Из-за конденсации паров на прохладных вершинах массива эти осадки исключительно обильны. Мощные потоки влаги стекают в Нижний Нил не только по руслу Голубого Нила и его прямых притоков, но по всей системе рек Собата и Атбары.

В январе, когда обычно заканчивается прохождение вод Голубого Нила, среднее и нижнее течение реки зависят исключительно от расхода Белого Нила. Объем воды, переносимой паводками, превышает три четверти всего стока за год (90 из 120 млрд м<sup>3</sup>). В разгар половодья расход Нила в Нижнем Египте достигает 13 тыс. м<sup>3</sup>/с. Ежегодно в долине реки на всей затопляемой территории откладывается плодородный красный аллювий — 1.5 кг на 1 м<sup>2</sup> (он и придает красноватый цвет водам Нила). Его толщина достигает 10—15 м. Во время паводка через этот слой просачивается вода, благодаря чему образовался горизонт грунтовых вод, служащий постоянным источником питания реки, расход которой даже в месяцы наиболее низкого уровня вод составляет 900 м<sup>3</sup>/с.

Длительность времени добегания воды до русла Нила, задержка ее в почвах, грунтах, подземных водоносных горизонтах — вот причины медленного спада половодий, который продолжается восемь месяцев, в то время как подъем — всего четыре.

Мы предположили, что именно продолжительный спад воды и является причиной эффекта Харста. Для того чтобы



Типичный гидрограф р. Нил за 20-летний период (1956—1976). Отчетливо видно быстрое повышение расхода воды с последующим, более медленным спадом. До построения Асуанской плотины отношение максимального расхода воды к минимальному достигало 15, что значительно превосходит этот показатель для других рек Африки, например Конго. После пуска Асуанской ГЭС (1967) гидрологический режим реки резко изменился. На врезке: средний уровень воды Нила в Нижнем Египте в год нормального половодья. Понижение уровня реки в годы нормального и сильного половодья начинается в середине октября, поскольку максимум дождей в Эфиопии приходится на середину августа. К концу ноября половодье заканчивается и начинается постепенное снижение уровня воды, река пополняется только небольшим количеством вод Белого Нила.

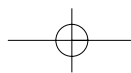
это доказать, нам понадобятся некоторые сведения из теории случайных процессов.

## Фрактальное броуновское движение

Взвешенные в воде мельчайшие частицы участвуют в беспорядочном и очень оживленном движении. Его исследовал Р. Броун в 1827 г., и в честь ученого оно получило название броуновского. Однако его удов-

летворительное объяснение отсутствовало вплоть до 1905 г., когда А. Эйнштейн опубликовал свое математическое описание этого процесса, которое можно считать началом стохастического моделирования природных явлений. Первая математически строгая теория броуновского движения построена Н. Винером в 1918 г. С того момента у него появился синоним: “винеровский процесс”.

С точки зрения математики броуновское движение — непрерывный гауссовский слу-



## ГЕОФИЗИКА

чайный процесс  $X=(X_t)_{t \geq 0}$ ,  $X_0=0$ , с нулевым средним и дисперсией  $DX_t=t$ . Автокорреляционная функция его приращений —  $\delta$ -функция Дирака, что означает полное отсутствие коррелирующих в последовательных значениях приращений величины  $X_t$  и постоянство спектра на всех частотах ( $f(\omega)=const$ ,  $\omega$  — частота). Спектр такого вида часто называется “белым шумом” и успешно применяется для моделирования многих климатических и гидрологических процессов. Однако попытка его использования для объяснения эффекта Харста потерпела неудачу: суммарный расход воды в этом случае приводит к уже упомянутой зависимости  $Q \sim t^{0.5}$ . Не спасает положение и применение случайных процессов с конечным, не нулевым, как в винеровском процессе, временем корреляции: В.Феллером доказано, что и в этом случае получается та же зависимость<sup>4</sup>.

А.Н. Колмогоров в 1940 г. впервые рассмотрел случайные процессы с дисперсией  $DX_t=t^{2H}$ ,  $t \geq 0$ ,  $0 \leq H \leq 1$  и назвал их

спиралями Винера<sup>5</sup>. Так появилось обобщение винеровского процесса, которое впоследствии развивалось Б.Мандельбротом<sup>6</sup>.

Непрерывный гауссовский случайный процесс  $X=(X_t)_{t \geq 0}$  на-

зывается фрактальным броуновским движением с показателем Харста  $H$ , если дисперсия этого процесса следует соотношению  $DX_t=t^{2H}$ ,  $t$  — время,  $0 < H < 1$ .

Автокорреляционная функция приращений фрактального броуновского движения затухает по степенному закону (характерное время корреляции

этого процесса бесконечно), а его спектр при низких частотах следует соотношению  $f_H(\omega) \sim \omega^{1-2H}$ . Другими словами, этот процесс имеет бесконечную память.

При  $0.5 < H < 1$  фрактальный шум называется “черным шумом”. Его спектральная плотность имеет неограниченный пик на нулевой частоте.

Случайные процессы со спектральной плотностью  $|\omega|^{-\alpha}$ ,

где  $\alpha$  принимает значения от 0.8 до 1.4, также называют фликкер-шумом (от англ. flicker — мерцание, трепетание, дрожание, короткая вспышка). Такой шум характерен для транзисторов, речи и других источников звука, потока автомобилей на шоссе, землетрясений и гроз; нормальный период сердцебиения человека имеет флуктуации, спектральная плотность которых изменяется по этому же закону.

Подчеркнем, что фликкер-шум можно считать “черным шумом” только при  $0 < \alpha \leq 1$ ; при

$1 < \alpha < 1.4$  фликкер-шум — нестационарный процесс.

Если использовать для моделирования расходов Нила процесс фрактального броуновского движения, то соответствующий показатель Харста равен 0.7. Таким образом, эффект Харста получает математическую интерпретацию: колебания стока Нила — случайный процесс с бесконечной памятью. Однако эта аппроксимация — формальна, так как нет ответа на главный вопрос: какие законы физики ответственны за эффект Харста?

## Дождевые паводки

Чтобы объяснить эффект,

воспользуемся результатами стохастического моделирования колебания речного стока в паводочный период, выполненного на кафедре гидрологии суши географического факультета МГУ<sup>7</sup>. На основе материала многолетних наблюдений за стоком более 50 рек различных регионов мира получены статистические закономерности колебаний паводочного стока и разработана стохастическая (вероятностная) модель этого процесса.

Она основана на следующей аппроксимации расхода воды во времени (гидрографа):

$$Q(t) = \sum_{j=1}^s Q_j \varphi(t-t_j),$$

где  $s$  — число паводочных пиков,  $t_1, \dots, t_s$  — даты прохождения максимальных расходов воды,  $Q_1, \dots, Q_s$  — значения этих максимальных расходов, самостоятельно формируемых каждым паводком и накладывающихся на спад предыдущих, а  $\varphi(t-t_j)$  — функция формы паводка, определяющая его динамику ( $\varphi(0)=1$ ).

Модель апробирована для рек Ченчон у г.Анджу (Северная Корея), Ломницы (Украинские Карпаты), Читы, для многих рек бассейна Амура и др.

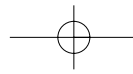
Для нас очень важно, что результаты упомянутых исследований доказывают: распределения вероятностей паводочных пиков и дат их прохождения достаточно хорошо соответствуют распределению Пуассона, с одним и тем же параметром, который не зависит от времени. В последние годы этот подход широко используется для описания последовательностей прохождения различных синоптических ситуаций, определяющих условия формирования стока и выпадения осадков. Таким образом, правомерна постановка задачи об определении спектра такого

<sup>4</sup> Feller W. // Ann. Math. Statist. 1951. V.22. P.427—432.

<sup>5</sup> Колмогоров А.Н. // ДАН. 1940. Т.26. №2. С.115—118.

<sup>6</sup> Mandelbrot B.B., Ness J.W. van // SIAM Review. 1968. V.10. №4. P.422—437.

<sup>7</sup> Христофоров А.В., Круглова Г.В., Самборский Т.В. Стохастическая модель колебаний речного стока в паводочный период. М., 1998.



Типичные гидрографы рек с паводочным режимом. а — Ченчон (г. Анджу, КНДР, 1957 г.); б — Чита (с. Бургень, Читинская обл., 1957 г.); в — Ломница (с. Перевозец, Украинские Карпаты, 1981 г.); г — Гумиста (пос. Ачадара, Черноморское побережье Кавказа, 1980 г.); д — Себау (пос. Баглия, Алжир, 1971—1972 гг.). Отчетливо видна экспоненциальная форма спада паводка горных рек (в, г, д), вследствие чего эффект Харста в паводочном режиме отсутствует.

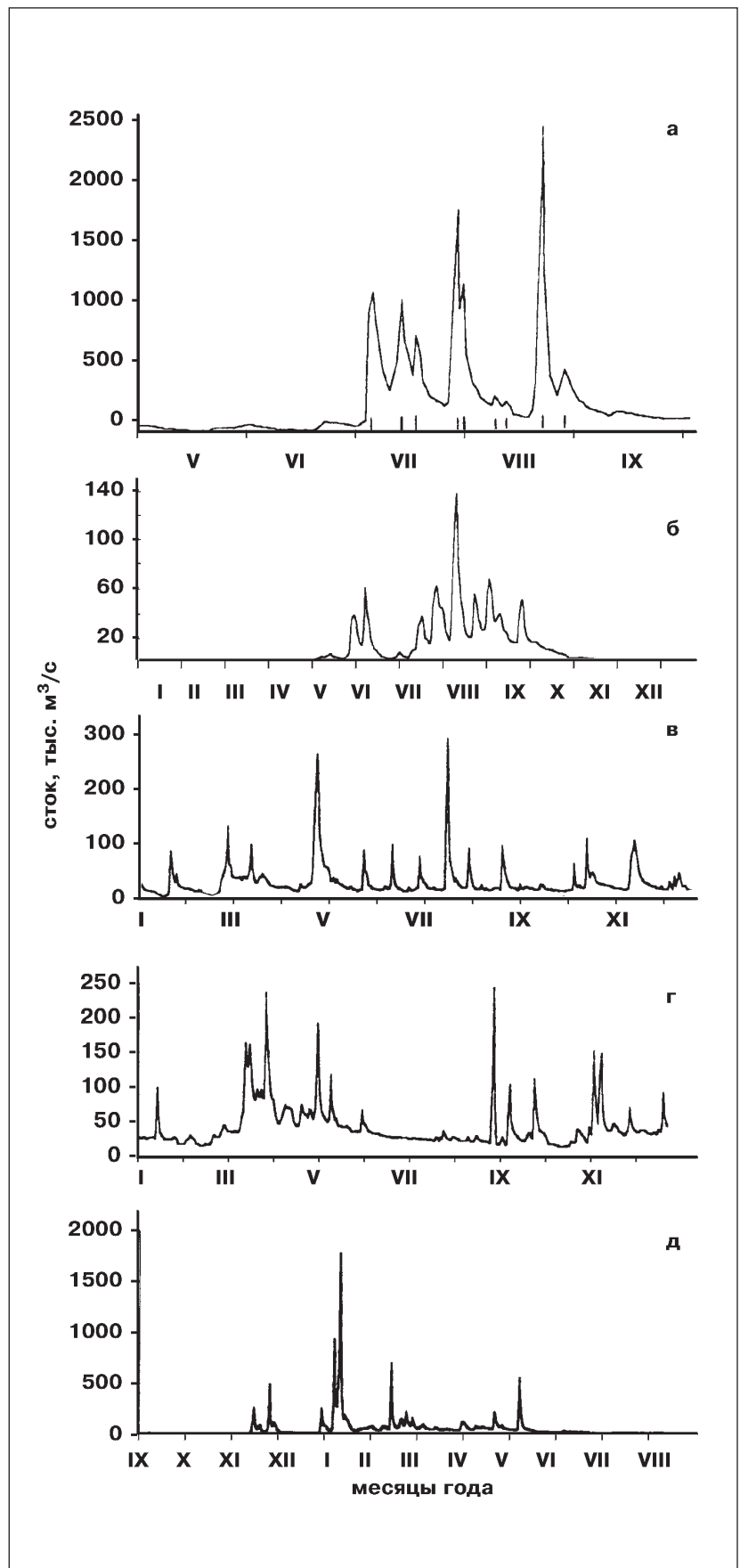
случайного процесса, как сток  $Q(t)$ .

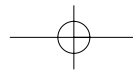
О подробностях нахождения корреляционной функции и спектра импульсного случайного процесса (этот процесс случайный, так как максимальные расходы, происходящие в случайные моменты времени пуассоновского потока событий, сами являются случайными величинами) любознательный читатель сможет узнать в других работах<sup>8</sup>.

Оказалось, что характер спектра существенно зависит от функции формы паводка, точнее от того, как он спадает. Так для горных рек это происходит очень быстро, поэтому уместна аппроксимация экспонентой  $\varphi(t) = e^{-\beta t}$ . В этом случае спектр

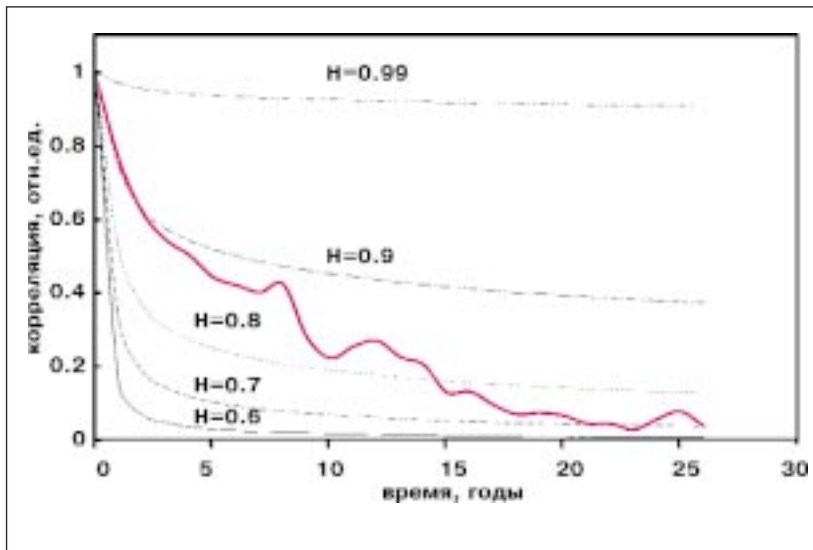
процесса  $f(\omega) \rightarrow const$  при  $\omega \rightarrow 0$  и

эффект Харста у паводочного режима отсутствует. Напротив, при медленном спаде паводка, когда оправдана аппрок-





## ГЕОФИЗИКА



Корреляционная функция среднегодовых величин стока Нила (цветная линия) и корреляционные функции фрактального броуновского движения, соответствующие разным значениям показателя Харста.

симация медленно меняющейся функцией, например  $f(t) = (1 + 2t\beta)^{-0.5}$ , спектр  $f(\omega) \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow 0$ , явление Харста характерно.

Механизм формирования паводочного шлейфа (чрезвычайной распластанности гидрографа стока) характерен для больших рек за счет продолжительного времени бассейнового добега и за счет задержки воды в почвогрунтах. Продолжительный же спад воды — фактор усиления корреляции между расходами воды в разные моменты времени.

Таким образом, возможная причина эффекта Харста в паводках Нила — их медленный спад в период отсутствия дождей.

## Циклоны

Другой возможный пример

<sup>8</sup> Рытов С.М. Случайные процессы. М. 1976.; Малахов А.Н. //Радиотехника и электроника. 1959. Т.4. Вып.1. №54. С.54—62.

геофизического процесса, в котором может возникать эффект Харста, — циклоническая деятельность, способствующая межширотному обмену воздуха и служащая важнейшим элементом общей циркуляции атмосферы. Циклогенез (рождение и эволюция циклонов) существенно влияет и на погодные, и на гидрологические процессы в земной климатической системе. Экспериментальное выявление устойчивых статистических закономерностей глобального циклогенеза и возможной годовой и межгодовой эволюции этого процесса могло бы стать фундаментальной основой для создания физических моделей климата.

Недавние исследования, выполненные в Институте космических исследований РАН, дают основание полагать, что эффект Харста может возникать и в атмосферных процессах<sup>9</sup>.

Обработав временные ряды

по тропическим циклонам над акваториями Северного и Южного полушарий за 1883—1997

гг., авторы этих работ доказали существование устойчивых пуассоновских законов распределения их интенсивности. Более того, оказалось, что числа одновременно действующих тропических циклонов на промежутке времени  $t$  составляют пуассоновский процесс с устойчивым параметром.

Для нас представляют большой интерес нелинейные процессы эволюции интенсивных вихревых возмущений в атмосфере. Хорошо известно, что продолжительность существования отдельного циклона сильно колеблется от нескольких дней до двух недель (иногда больше). Далее циклон может полностью разрушиться или попасть в более крупную атмосферную циркуляцию. Если предположить, что скорость диссипации циклона (выравнивание температурных градиентов и уменьшение влажности) находится в степенной зависимости от времени, то в сочетании с пуассоновским характером циклогенеза это приводит к импульсному процессу, спектр которого похож на спектр «черного шума».

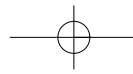
## Модель дождей

Мы рассмотрели некоторые подходы к математическому объяснению эффекта Харста. Однако они не отвечали на вопрос: откуда может взаться степенная (медленная) релаксация динамической системы? А разобраться в этом явлении — значит построить простую физико-математическую модель гидрологического процесса, демонстрирующую эффект Харста.

Обратимся к важным составляющим гидрологического цикла суши — осадкам и динамике влажности почвы.

Будем считать, что число дождей за интервал  $[t_0, t_0 + T]$

<sup>9</sup> Покровская И.В., Шарков Е.А. // ДАН. 1993. Т.331. №5. С.625—627.



подчиняется закону Пуассона (закону редких событий). Промежутки времени, разделяющие моменты выпадения дождей (последовательно наступающие события пуассоновского потока), — независимые случайные величины, имеющие распределение с параметром  $\lambda$

(число дождей в сутки). Вероятность того, что продолжительность периода без дождя  $t_{k+1} - t_k = \Delta_k$  меньше  $t$ , равна

$$P\{\Delta_k < t\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Предположим, что период без дождя гораздо больше продолжительности дождя, что показывает, например, анализ гидрометеорологических наблюдений на Нижне-девицкой воднобалансовой станции (Воронежская обл.) за 28 лет<sup>10</sup>.

Представим количество осадков в виде суперпозиции простейших импульсов

$$p(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q \delta(t - t_k),$$

где  $q$  — количество осадков, выпадающих за один дождь,  $t$  — время,  $\delta(t)$  — дельта-функция.

Для такого процесса среднее  $\overline{p(t)} = q\lambda$ , корреляционная

функция  $R(\tau) = q^2 \lambda \delta(\tau)$ , спектр

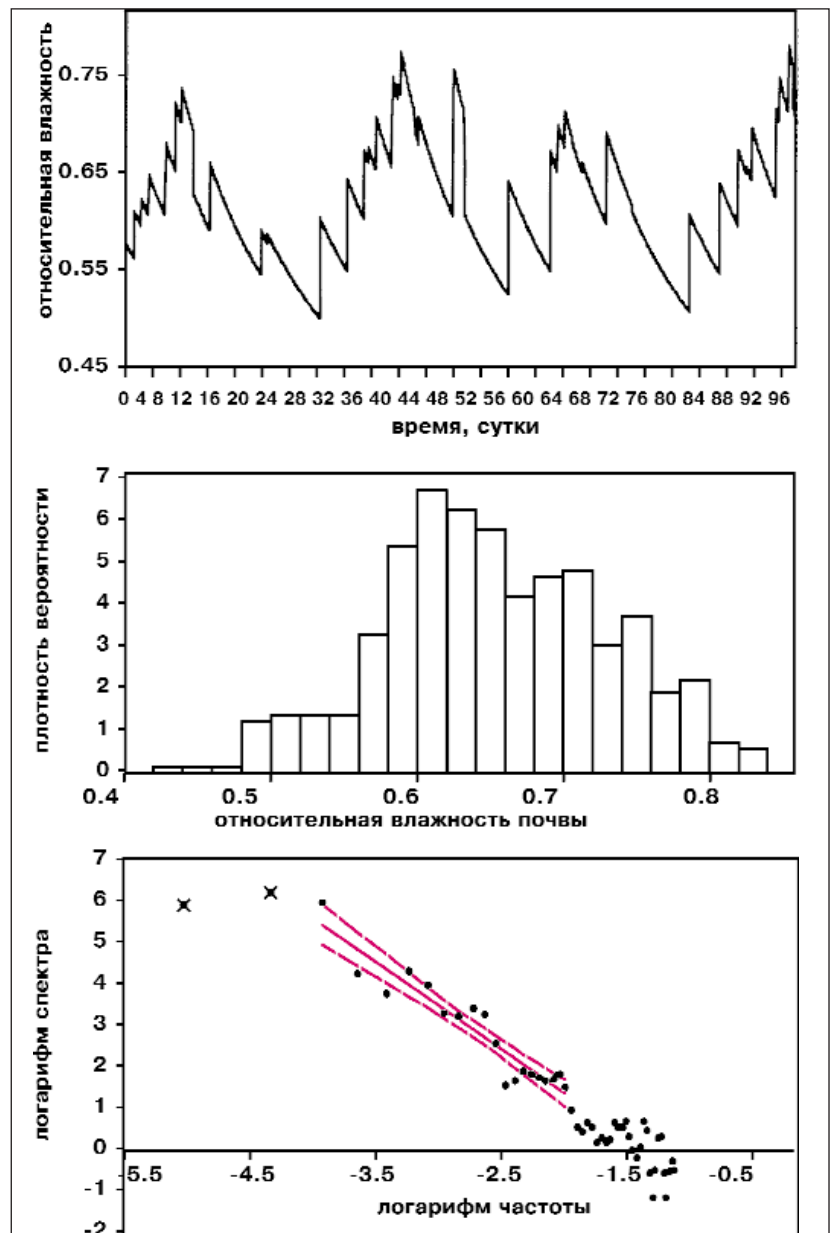
$f(\omega) = 2q^2 \lambda$ . Таким образом,

время памяти процесса осадков равно нулю, спектр на всех частотах постоянен и явление Харста отсутствует.

## Динамика влажности почвы

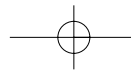
После выпадения дождя объемная влажность почвы резко увеличивается. Дальнейшая судьба этой влаги такова: одна часть за счет процессов инфильтрации поступает в

<sup>10</sup> Кучмент Л.С., Гельфан А.М. Динамико-стохастические модели формирования речного стока. М., 1993.

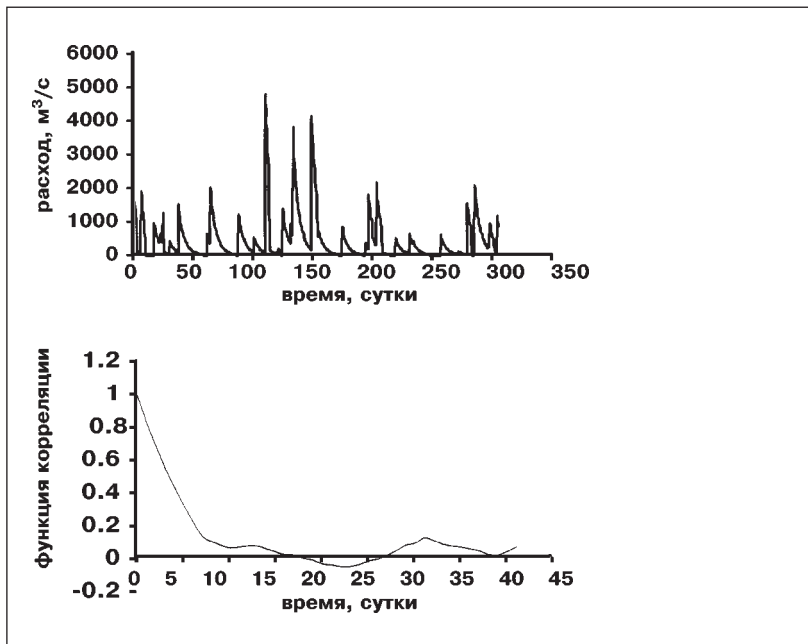


Некоторые характеристики динамики влажности почвы: вверху — результат математического моделирования динамики как случайного процесса. Модельная зависимость похожа на беспорядочно «сшитые» куски всплесков в случайные моменты времени, с последующими спадами; в середине — плотность вероятности амплитуд влажности почвы, которая соответствует реализации, показанной на верхнем рисунке; внизу — поведение спектральной плотности этого процесса на низких частотах. Цветная прямая — линия регрессии между логарифмом спектра и логарифмом частоты; штриховые цветные — линии, ограничивающие доверительную область. Линия регрессии ограничивает область частот, для которой характерна степенная зависимость  $f(\omega) \sim \omega^{-0.72}$ . При низких частотах ( $\ln \omega < -4$ ) эффект Харста вырождается из-за линейной зависимости скорости испарения от влажности. Чем меньше скорость испарения по сравнению со скоростью инфильтрации, тем более протяженна область, где справедлив закон Харста.

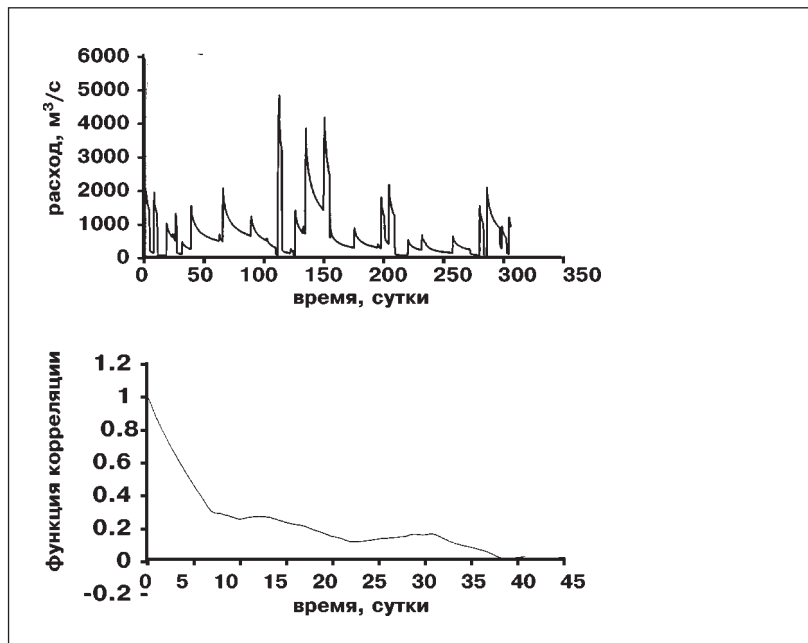




## ГЕОФИЗИКА



Характерная реализация паводочного режима с экспоненциальной формой гидрографа и ее корреляционная функция. Быстрое затухание корреляционной функции указывает на отсутствие эффекта Харста.



Характерная реализация паводочного режима со степенной формой гидрографа и ее корреляционная функция. Слабое (по сравнению с экспонентой) затухание корреляции в случае степенной формы гидрографа указывает, что для такого паводочного режима характерен эффект Харста.

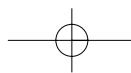
грунтовые воды, другая испаряется, третья образует поверхностный сток. Коэффициент инфильтрации (доля влаги осадков, перешедшая в грунтовые воды) для большинства водосборов основных рек России больше 0.6 (например, для бассейнов Оки — 0.85, Москвы — 0.79, Печоры — 0.66), поэтому процессы инфильтрации очень важны для понимания генезиса речного стока.

Многочисленные натурные исследования показали линейную зависимость скорости испарения (транспирации) от влажности почвы в случае дерново-подзолистых суглинков, если на них выращивались тимофеевка, озимые рожь и пшеница<sup>11</sup>.

Если составить уравнение водного баланса верхнего слоя почвы, то в левой части окажется скорость изменения влажности почвы, а в правой — сумма трех объемов влаги: выпадающей с осадками, испаряющейся и поступающей в грунтовые воды в единицу времени.

Процесс изменения влажности почвы, описанный этим уравнением, диссипативный (стекание воды и ее испарение) и существенно нелинейный, так как количество влаги, поступающей в грунтовые воды, определяется влажностью, которая сама по себе является степенной функцией<sup>12</sup> влажности с показателем  $n_3=5$ . Количество испаряющейся влаги также зависит от влажности, но линейно. Физика нелинейных диссипативных систем обнаруживает большое разнообразие их поведения и свойств. Исследование данного процесса показало, что он способен объяснить и эффект Харста. Интегрирование уравнения водного баланса верхнего слоя почвы приводит к следующему импульсному процессу:

<sup>11</sup> Вершинин П.В., Мельникова М.К., Мичурин Б.Н. и др. Основы агрофизики. Под ред. А.П.Июффе. М., 1959.



$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \varphi(t-t_k),$$

где  $\varphi(t-t_k)$  — функция формы импульса,  $\theta_k$  — относительные

амплитуды процесса, зависящие от характеристик влажности и пористости почвы. Подробно эта процедура описана в наших статьях<sup>13</sup>.

Если скорость инфильтрации значительно превосходит скорость транспирации, спектр процесса, определенного уравнением водного баланса верхнего слоя почвы, расходуется на низких частотах. Это явление объясняется сильной степенной зависимостью коэффициента влагопроводности от влажности, благодаря чему релаксация влажности после выпадения дождя к своему равновесному значению происходит очень медленно и спадает по степенному закону. Для функции формы импульса в качестве точного решения уравнения водного баланса в верхнем метровом слое почвы мы получили зависимость:

$$\varphi(t) \sim t^{\frac{1}{1-n}}.$$

Эта функция медленно убывает со временем, что приводит к расходимости спектра на низких частотах. Такая динамика влажности почвы и скорости инфильтрации соответствует многочисленным наблюдениям. Например, скорость инфильтрации, будучи высокой в начале дождя (6 см/ч), затем резко снижается (через 2 ч она уже 1.5 см/ч), далее этот темп замедляется и скорость инфильтрации следует зависимости  $t^{0.5}$ .

Если отношение скорости

испарения к скорости инфильтрации мало, спектр процесса имеет достаточно протяженный участок, на котором выполняется соотношение  $f(\omega) \sim \omega^{-\alpha}$  (см.

выше). Этот результат был получен, например, при  $\alpha=0.72$ ,

$H=0.5(\alpha+1)=0.86$ . Если, наоборот,

отношение скорости испарения к скорости инфильтрации велико, функция формы импульсного процесса приближается к экспоненте и эффект Харста “вырождается”. Следовательно, в построенной модели влагопереноса нелинейный процесс инфильтрации способствует возникновению эффекта Харста; линейный процесс испарения разрушает его.

На величину показателя Харста более всего влияет величина  $n$ , характеризующая степень зависимости коэффициента влагопроводности от влажности. Увеличение  $n$  приводит к замедлению релаксации влажности почвы, слабому затуханию корреляционной функции случайного процесса, что в свою очередь способствует росту показателя  $H$ .

Таким образом, эффект Харста объясняется медленной (степенной) релаксацией вязкой жидкости в пористой среде от момента выпадения осадков до момента попадания воды в замыкающий створ речного бассейна.

Эффекты медленной релаксации вязкой жидкости в пористой среде характерны для большинства задач нестационарной и нелинейной фильтрации и отражают природные закономерности.

\* \* \*

Подведем итоги. Огромный (2.8 млн км<sup>2</sup>) бассейн Нила представляет собой нелинейную, неравновесную и нестационарную природную систему. Потоки солнечного тепла и вла-

ги с Индийского океана постоянно выводят ее из состояния равновесия. В соответствии со вторым законом термодинамики (законом возрастания энтропии) природная система за счет процессов диссипации (вязкого течения и теплопроводности) релаксирует к состоянию с более высокой энтропией, причем эта релаксация происходит довольно медленно. Вот эту интересную особенность функционирования бассейна Нила и подметил британский климатолог Г.Харст.

Авторы благодарят члена-корреспондента РАН А.Н.Ширяева за поддержку исследований в области математического моделирования процессов с бесконечной памятью.

**Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Гранты 97-01-00261, 99-05-64905. ■**

<sup>12</sup> Г л о б у с А. М. Почвенно-гидрофизическое обеспечение агроэкологических математических моделей. Л. 1987; П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., 1977.

<sup>13</sup> Н а й д е н о в В. И., К о ж е в н и к о в а И. А. // Теорет. основы хим. технологии. 1999. Т.34. №6. С.30—33; К о ж е в н и к о в а И. А. // Обзорение прикл. и пром. математики. 1997. Т.4. Вып.3. С.353—355.