Материалы на конкурс
За лучшую исследовательскую работу в области гиперкомплексных чисел

Г.С. Мельников

«Геометрия внутреннего сопряжения базовых кватернионов»

г. Санкт-Петербург
2003 г.

УДК 517.518.224+514.174

Раздел 1. Четырехмерный числовой аналог Евклидова пространства, сопряженного с пространством Минковского.

Возможность совмещения геометрии абсолютно симметричного по всем его характерным направлениям пространства H_4, с привычными представлениями об окружающем нас физическом пространстве-времени была намечена в работе Е.А. Каратаева (2002г.) [1], однако развиваемые им положения известны еще из алгебры Клиффорда и рассматривались в монографии Г. Казанова [30]. Эта возможность интерпретируется как следствия процедуры удвоения алгебры. С другой стороны, возможность совмещения геометрии пространства Минковского с неким четырехмерным числовым аналогом, как оказалось, также является следствием процедуры удвоения алгебры. Эти введенные положения докажем на кватернионном решении задачи математических бильярдов.

1.1. Кватернионное решение задачи математических бильярдов.

С задачей математических бильярдов и ее историей можно ознакомиться в популярной брошюре [2]. В результате попыток решения этой задачи были открыты многие разделы современной математики. Однако до работ [3…6] задача математических бильярдов в круге оставалась не решенной. Полное решение этой задачи в комплексных числах найдено в [6] на основе публикаций [3…5]. Последняя трактовка по описанию траекторий движения математической точки (бильярдного шара) в круговом отражателе дана в [7]. С последовательностью выводов решения задачи в комплексных числах можно ознакомиться по материалам настоящего конкурса [8]. Суть предложенного решения заключается в следующем:

- при рассмотрении числовых последовательностей мы♣ каждый раз обращаемся к дуально бесконечным последовательностям (1.1.), замыкаемым в их полюсах (1-4 родов), а общую классификацию чисел проводим в соответствии с табл.1.1.
- Дуально бесконечными последовательностями будем называть последовательности вида

$$U_{-\infty}, \ldots U_{-1}, U_0, U_1, \ldots U_{+\infty} \qquad (1.1.)$$

или коротко $\{U_{\pm p}\}$.

Ясно, что наиболее полно этим требованиям отвечает разложение аналитических функций в ряд Лорана [2]

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^{-k} \qquad (1.2.)$$

первый ряд в формуле (1.2.) представляет собой обычный степенной ряд (в общем случае - знакопеременный). Второй ряд называется главной частью ряда Лорана. В общем виде формулу (1.2.) можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k, \text{ где } c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta \qquad (1.3.)$$

♣ Подразумевая необходимость сотрудничества с читающими коллегами при анализе и выводах, в дальнейшем изложении приняты как безличная форма, так и форма ‘мы’ и “ Рассмотрим ”

Табл.1.1.

<table>
<tr><td rowspan="6">Гиперкомплексные числа</td><td rowspan="5">Комплексные числа (а также двойные и дуальные)</td><td rowspan="4">Вещественные числа</td><td rowspan="3">Рациональные числа</td><td rowspan="2">Целые числа</td><td>Отрицательные числа (противоположные натуральным числам)
-1,-2,-3,...,
-17,-1001,...</td><td>Числа
нуль и полюсы
0 и Θ
Где: Θ – полюсы 1,2,3,4 родов [65]</td><td>Натуральные числа (т.е. целые положительные): 1,2,3,4,...
17,...,1001,</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дробные и дробно-рациональные отрицательные числа: -1/2,-3/7,...-1111/5,...</td><td colspan="2">Дробные и дробно-рациональные положительные числа: 1/2,3/7,...1111/5,...</td></tr>
<tr><td colspan="3">Иррациональные отрицательные числа, трансцендентные отрицательные числа:
-√2,-1,-√5,...,-e, -(4-π),...</td><td colspan="2">Иррациональные положительные числа, трансцендентные положительные числа:
√2,1,√5,..., e, (4-π),...</td></tr>
<tr><td colspan="5">Мнимые числа
i,-i,-2+3i,...,1/2+√3/2i,a+bi</td></tr>
<tr><td colspan="2">Кватернионы
a+bi+cj+dk
a,b,c,d - действит.
i,j,k - символы</td><td colspan="2">Октавы
A+Bi+Cj+Dk+
EI+FJ+GK
где действит.:
A,B,C,D,E,F,G
i,j,k,I,J,K - символы</td><td>Поликомплексные системы чисел
$a_0+a_1i_1+a_2i_2+...+a_ni_n$
$a_0,a_1,...a_n$- действительные числа
$i_1,i_2,...i_n$ - некот. символы (не обязательно равные $\sqrt{-1}$, например $\sqrt{0}$, $\sqrt[k]{1}$, $\sqrt{-2}$ и $\sqrt{-3}$)</td></tr>
</table>

- световой луч, запущенный в полый отражающий цилиндр или монолитный оптически прозрачный цилиндр в плоскости Z=0 будет совершать многократные отражения, не выходя из кольцевой зоны от r до R где r = R·cos(π/k) - координата пересечения луча по нормали к оси X (z, y=0), а R - радиус отражающей криволинейной поверхности. В настоящее время достаточно полно описаны траектории движения лучей многократного отражения в круге (сфере)
- при этом установлено, что лучи света в отражающем круге образуют траектории, форма которых зависит от коэффициентов фрактальности и полностью ими обусловлена. Коэффициент фрактальности k определяет сектор круга Ω, который содержит в себе в качестве хорды длину свободного пробега луча от одного отражения до другого отражения от ограничивающей круговой поверхности

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi}{k} \qquad (1.4)$$

При k- целочисленных траектории распространения лучей в круге статические и представляют собой правильные вписанные в окружность многоугольники с числом вершин k. При k- рациональных и определяемых отношением целых не сократимых чисел

$$k = \frac{n}{m} \qquad (1.5)$$

траектории распространения света также статические и представляют собой фрактальные многоугольники, т.е. правильные звездчатые замкнутые многоугольники, имеющие n – вершин. Они формируются путём “заметания” лучом конечной площади в круге за m оборотов вокруг центра кривизны.

В случае k- трансцендентных, траектории луча динамические; и луч “заметает” бесконечную площадь. Трансцендентные траектории лучей - правильные незамкнутые фрактальные многоугольники с периодом равным бесконечности. В процессе формирования этих траекторий, точки текущих отражений никогда не вернутся в исходную точку первого отражения и никогда не накладываются на окружности друг на друга. Другими словами, можно утверждать, что при многократных отражениях от криволинейных поверхностей отражения, последняя (в нашем плоском случае окружность) выступает в качестве добавленной параметрической координаты. Ее заполнение точками отражения подчиняются общим принципам «решета» Эратосфена, аналитический вид которых был выведен в [3].

- **Кватернионное решение базируется** на доказательстве существования четырехмерного числового аналога связанных (сопряженных) дуально-бесконечных последовательностей вещественных чисел.

Это доказательство вытекает из еще более простой модели и задачи – разбиения единичного отрезка точкой. При сворачивании единичного отрезка в кольцо, приходим к распределению точек отражения в математических круговых бильярдах от окружности единичной длины $2\pi R$.

Вполне очевидно, что точка делит единичный отрезок в отношениях:

$\overset{\Rightarrow}{k} \Rightarrow 1/k$ и $\overset{\Leftarrow}{k} \Rightarrow 1\text{-}1/k=(k\text{-}1)/k$ здесь k- также как и в круговом бильярде - коэффициент фрактальности (дробления единичного отрезка AB)

Принимаем обозначение

$$\overset{\Rightarrow}{k} = k \tag{1.6}$$

при присвоении коэффициента фрактальности отрезку AC т.е. при перемещении точки дробления C от точки A в право и

$$\overset{\Leftarrow}{k} = \mathrm{k/(k\text{-}1)} \tag{1.7}$$

при перемещении точки дробления C от точки B влево. (Рис.1.1.)

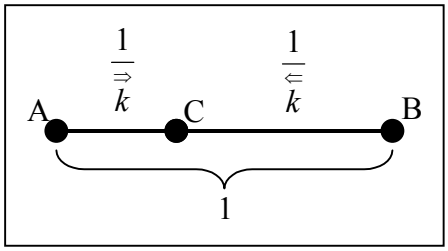


Рис.1.1. Присвоение коэффициентов фрактальности отрезкам прямой.

Ясно, что единичный отрезок прямой линии, без привлечения соседних отрезков мы можем разбить только на целые числа k.

- В случае, если коэффициент фрактальности выражается **дробно-рациональным числом** ***k=n/m*** для геометрической интерпретации этого дробления необходимо привлекать в рассмотрение m соседних отрезков единичной длины, а еще более наглядно это можно сделать на единичной окружности, т.к. при $\overset{\Rightarrow}{k} = n/m$, дуговой или фазовый (при R=1) множитель

$$\overset{\Rightarrow}{\Omega}_p(n,m) = \frac{2\cdot\pi\cdot R}{\overset{\Rightarrow}{k}(n,m)} = \frac{m\cdot(2\cdot\pi\cdot R)}{n} \tag{1.8}$$

Это соответствует тому, что m отрезков единичной длины мы разбиваем на n – частей. В этом случае левосторонние коэффициенты фрактальности могут быть выражены

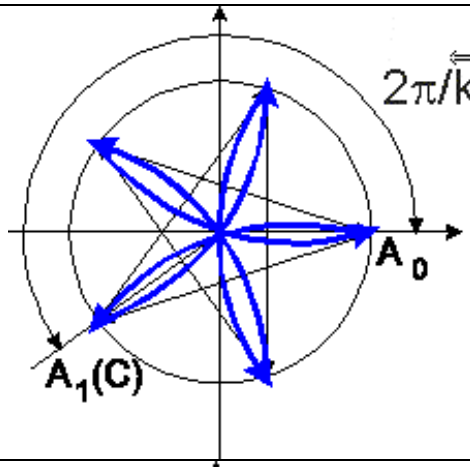
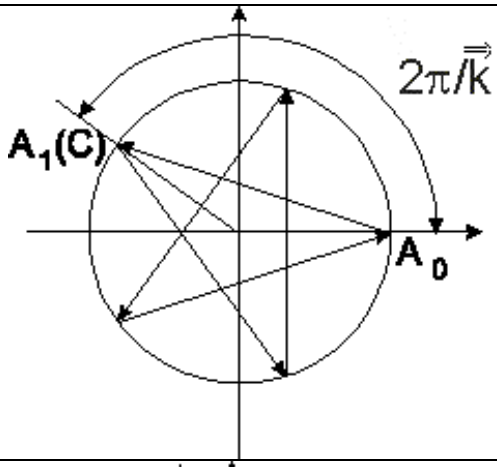
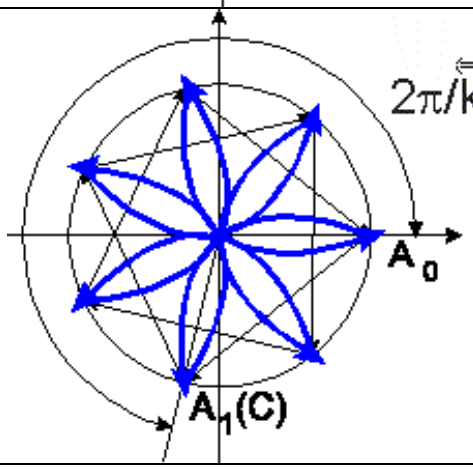
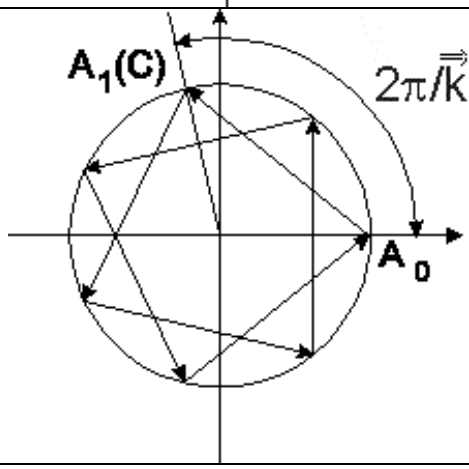
$$\overleftarrow{k}(n,m) = \frac{n}{m\cdot(\frac{n}{m}-1)} = \frac{n}{(n-m)}, \qquad (1.9)$$

а хордовый или фазовый множитель

$$\overleftarrow{\Omega}_p(n,m) = \frac{2\cdot\pi\cdot R}{\overleftarrow{k}(n,m)} = \frac{(n-m)\cdot(2\cdot\pi\cdot R)}{n} \qquad (1.10)$$

И можно говорить о том, что для левостороннего дробно-рационального деления единичной окружности мы имеем дело с делением (n-m) окружностей единичной длины на n частей.

Вполне очевидно, что начальные траектории бильярдных шаров с фазовыми множителями (1.8) и (1.10) будут направлены против часовой стрелки (1.8),- положительное направление дробления и по часовой стрелке (1.10),- отрицательное направление дробления, по одному и тому же звездчатому (фрактальному) многоугольнику из точки A_0, объединяющей точки A и B единичного линейного отрезка. Наглядное представление об этом дает Рис.1.2

$\overleftarrow{k}$	Левосторонние	$\overrightarrow{k}$	Правосторонние
5/3		5/2	
7/5		7/2	

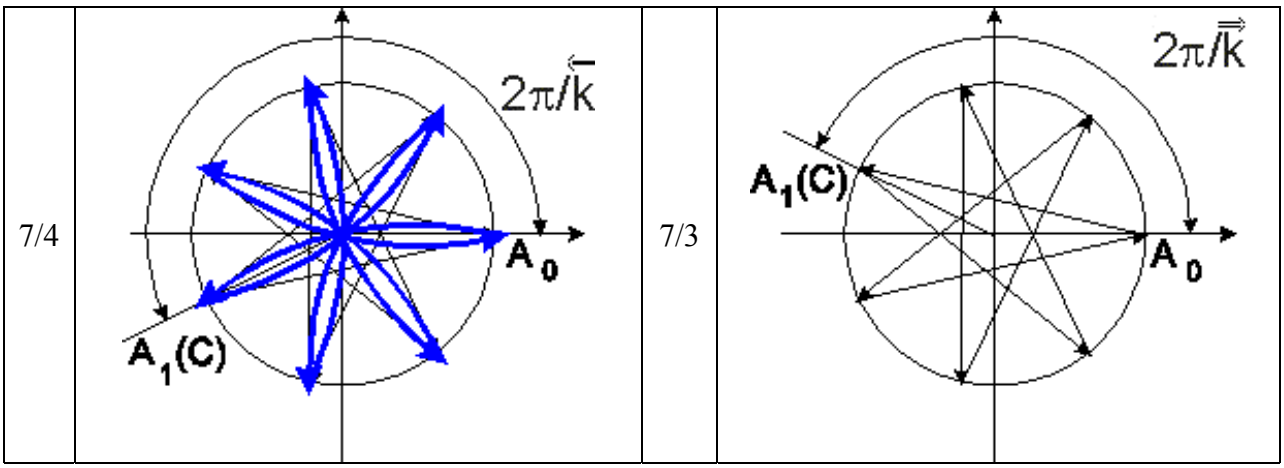


Рис.1.2. Траектории бильярдных шаров с фазовыми множителями (1.8) и (1.10)

Здесь особо следует оговорить, что при рассмотрении левосторонних траекторий с дробно-рациональными коэффициентами фрактальности необходимо внимательно интерпретировать постулируемое нами определение фрактальных многоугольников, а именно, - они формируются путём “заметания” лучом конечной площади в круге за m оборотов вокруг центра кривизны (при $\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ =***k=n/m***) и, соответственно, за *n-m* обходов вокруг центра кривизны (при $\overset{\Leftarrow}{k}(n,m)=\dfrac{n}{(n-m)}$). При такой интерпретации становится очевидным следующее утверждение – левосторонние вещественные дробно-рациональные числа $\overset{\Leftarrow}{k}(n,m)=\dfrac{n}{(n-m)}$ характеризуют не просто зеркально-симметричные линейные траектории относительно траекторий определяемых числами $\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ =*k=n/m,* а их векторы (треки распространения бильярдного шара), должны искривляться и проходить (или обходить) центр кривизны *n-m* раз.

Таким образом, линейная (Евклидова) система чисел (1.6) и дробно-рациональная (гиперболическая) (1.7) системы чисел в трехмерной координатной системе (две пространственных и одна пространственно-временная) порождают зеркально-симметричные линейные и криволинейные векторы в динамической системе математических бильярдов. Вид этих траекторий очевиден из Рис. 1.2.

Но гиперболическая зеркальная система чисел (1.7) и линейная (1.6) еще не полная система вещественных чисел

$\Re(\overset{\Rightarrow}{\kappa})\in[-\infty,...-\kappa,...0,...\kappa,...\infty]$ - правосторонняя фрактало- образующая вещественная числовая система

$$\overset{\Rightarrow}{\kappa}=k \qquad (1.11)$$

$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa})\in[-1,...\dfrac{\kappa}{\kappa-1},...\Theta,...-\dfrac{\kappa}{\kappa-1},...,1]$- левосторонняя фрактало- образующая вещественная числовая система, где: Θ – полюс 1-го рода [9]

$$\overset{\Leftarrow}{\kappa}=\frac{k}{k-1} \qquad (1.12)$$

Для получения завершенной системы - четырехмерного числового аналога, объединяющего пространства Евклида и пространства Минковского необходимо подойти к задаче кватернионного решения математических бильярдов в круге с позиций рассуждения Галилея при выводе уравнений маятника. (Рис 4.3 из брошюры [10])

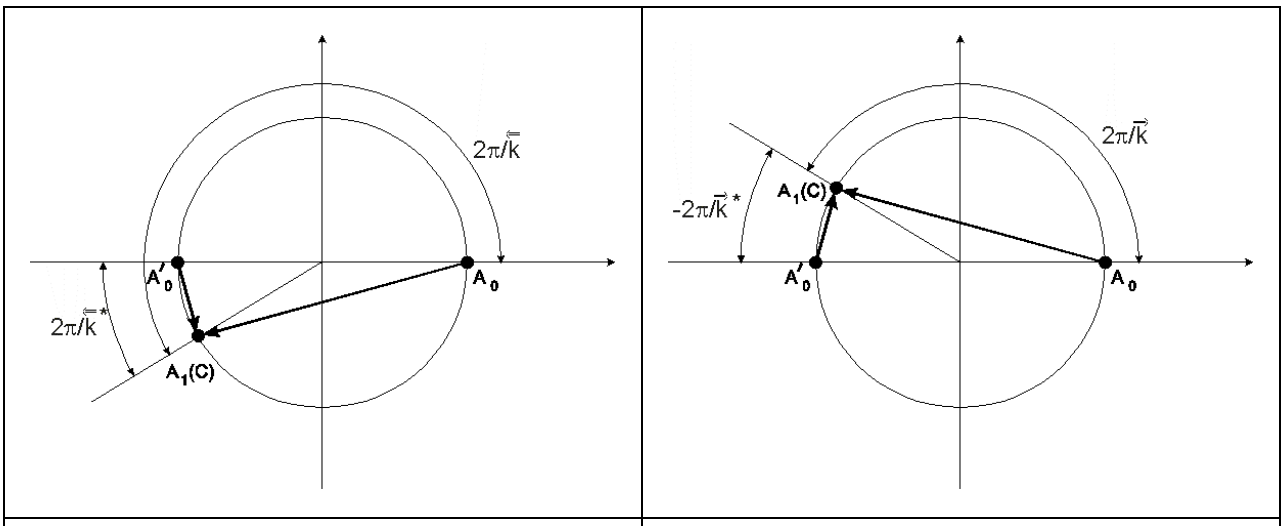
Вполне очевидно, что как для комплексного, так и для кватернионного решения задачи математических бильярдов необходимо учитывать ортогонально сопряженные векторы в круге, т.е. векторы для которых выполняется условие

$$\cos\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow}{\kappa}} = \sin\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow *}{\kappa}} \quad \text{и} \quad \sin\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow}{\kappa}} = \cos\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow *}{\kappa}} \tag{1.13}$$

и

$$\cos\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{\kappa}} = \sin\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow *}{\kappa}} \quad \text{и} \quad \sin\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{\kappa}} = \cos\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow *}{\kappa}} \tag{1.14}$$

Соблюдение этих условий просто решается из рассмотрения ортогонально сопряженных векторов Рис.1.3.



а	б

Рис. 1.3. Взаимное расположение левосторонних (а) и правосторонних (б) базового и ортогонально сопряженного векторов.

Из Рис. 1.3. б. простым решением

$$\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow *}{k}} = \pi - \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} = \frac{2\cdot\pi\,(k-2)}{2\cdot k} \tag{1.15}$$

находим для правосторонних векторов ортогонально сопряженных к базовому сопряженную правостороннюю фрактало- образующую вещественную числовую систему

$$\overset{\Rightarrow *}{\kappa} = -\frac{2\cdot k}{k-2} \tag{1.16}$$

И соответственно, из Рис. 1.3. а., решением

$$\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow *}{k}} = \pi - \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}} = \frac{\pi\,(k-2\cdot(k-1))}{k} = -\frac{2\cdot\pi\,(k-2)}{2\cdot k} \tag{1.17}$$

находим для левосторонних векторов ортогонально сопряженных к базовому - сопряженную левостороннюю фрактало- образующую вещественную числовую систему

$$\overset{\Leftarrow *}{\kappa} = \frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2} \qquad (1.18)$$

Другими словами известный числовой континуум вещественных чисел в своей структуре содержит две пары ортогональных систем вещественных чисел, т.е. - правосторонние числа $\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ и им ортогонально сопряженные вещественные числа $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ и левосторонние числа $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ и им ортогонально сопряженные вещественные числа $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$, для которых справедливы соотношения сведенные нами в Табл.1.2

Табл. 1.2

Базовая Евклидова правосторонняя система вещественных чисел (от точки А к точке С - вправо)	Базовая не Евклидова левосторонняя дробно-рациональная гиперболическая система вещественных чисел
$\Re(\overset{\Rightarrow}{\kappa}) \in [-\infty,\ldots-\kappa,\ldots 0,\ldots\kappa,\ldots\infty]$	$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa}) \in [-0,\ldots-\frac{\kappa}{\kappa-1},\ldots\Theta,\ldots+\frac{\kappa}{\kappa-1},\ldots,0]$
$\overset{\Rightarrow}{\kappa}=k$	$\overset{\Leftarrow}{\kappa}=\frac{k}{k-1}$
Сопряженная не Евклидова правосторонняя дробно-рациональная гиперболическая система вещественных чисел	Сопряженная не Евклидова левосторонняя дробно-рациональная гиперболическая система вещественных чисел
$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa}) \in [-0,\ldots-\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots\Theta,\ldots\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots,+0]$	$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa}) \in [0,\ldots+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots\Theta,\ldots-\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots,-0]$
$\overset{\Rightarrow *}{\kappa}=-\frac{2\cdot k}{k-2}$	$\overset{\Leftarrow *}{\kappa}=\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2}$

Предварительно назовем числа $\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ - ***вещественными правосторонними кватернионно- сопрягаемыми***,

А числа $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ - ***вещественными левосторонними кватернионно- сопрягаемыми***

Необходимо подчеркнуть, что речь идет не о векторах $\overset{\rightarrow}{\kappa}$ и $\overset{\leftarrow}{\kappa}$, а о вещественных числах, которые в рекуррентных последовательностях встраиваются в сеточные и решеточные конфигурации, для которых выполняются соотношения (1.13) и (1.14)

Графики и значения для чисел (1.16), (1.18) и (1.12) вне полюсов (соответственно $\Theta=2$, для $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$, $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ и $\Theta=1$, для $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$) приведены на Рис.1.5. и Рис.1.6, соответственно.

Из графиков видно, что системы чисел $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$, $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$ и $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ описываются дробно-рациональными гиперболическими функциями и соотносятся в математических круговых бильярдах с ортогональными и зеркальными мнимыми векторами. Так при рассмотрении траекторий в круговом бильярде для $\overset{\Rightarrow}{\kappa} \Rightarrow$ k=4, 5/2 и π (см. Рис.1.4) видно, что ортогонально дополняющие векторы при распространении лучей (бильярдного шара) по траекториям с k=4 образуют в круге свои дискретно формируемые траектории, совпадающие с самой реальной траекторией луча (бильярдного шара).

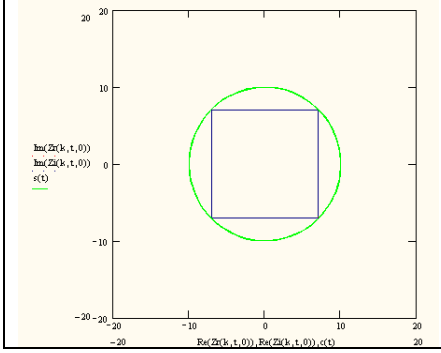
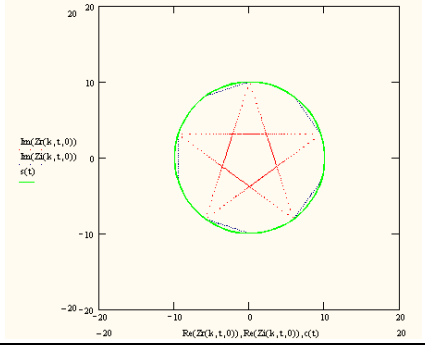
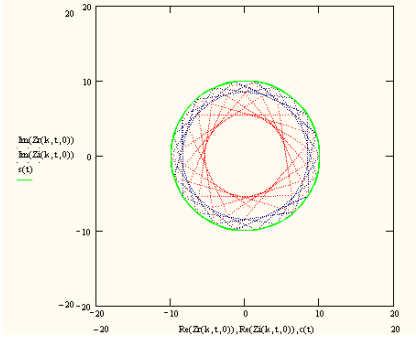
Рациональные и трансцендентные коэффициенты фрактальности k		
k=4	k=5/2	k=3,1415… t := 0,0.000000001 .. 0.000001
		

Рис.1.4. Примеры возможных модовых траекторий в Евклидовом круглом бильярде.

Для траекторий, характеризуемых рациональными коэффициентами фрактальности k=5/2 и трансцендентных k= π, ортогонально дополняющие векторы, характеризуемые вещественными числами $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$, образуют отличные от них траектории (на Рис.1.4 они показаны голубым цветом). Характерно, что ортогонально сопряженные к трансцендентным числам $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$, по определению дробной рациональности сами являются трансцендентными числами, например, ортогонально сопряженное число к основанию натурального логарифма $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}(e) = -\dfrac{2\cdot k}{k-2} = -\dfrac{2\cdot e}{e-2}$.

Все другие трансцендентные коэффициенты фрактальности, характеризующие динамические суб- моды в круговых бильярдах и составляющие доминирующую мощность числового континуума, для каждой из найденных числовых систем образуются посредством генерации трансцендентных чисел по алгоритму $\eta = k \pm (e, \pi, ...)$ и подстановкой η в каждое из выражений для найденных числовых систем Табл. 1.2.

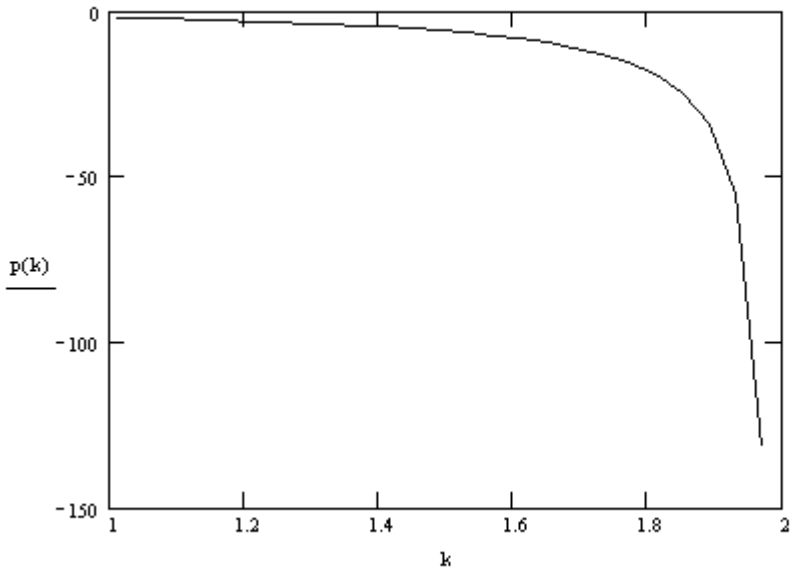
Тем самым мы доказали, что числа $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ и числа $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ не просто функции $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ = p(k) и $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ =l(k), а физически обоснованные параллельные, известной нам числовой системе, другие числовые системы

Введение различения возвратных и рекуррентных последовательностей, а также их совместный анализ с введенными дополнениями вещественных чисел числами $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$, $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$ и $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$, по-новому раскрывает систолические свойства двумерных и трехмерных рекуррентных тел и позволяет надеется на непосредственную реализацию феноменологических закономерностей в многослойных рекуррентных числовых структурах.

Принципы построения многослойных рекуррентных последовательностей линейного и нелинейного типов рассматриваются в работах [3, 11].

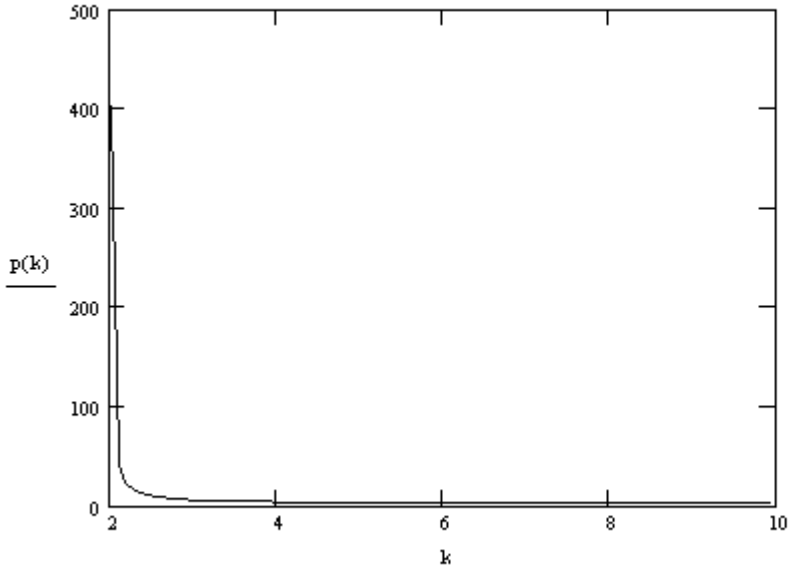
О математической природе зеркальных траекторий, характеризуемых вещественными числами $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ и $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$, мы будем подробнее говорить в разделе 1.1.1. Физическое обоснование с позиций интерпретации возможности одновременного существования электромагнитных колебаний с правой и левой тройкой электромагнитных векторов (E, H и k) дано в разделе 2.

$k := 1.01, 1.05 .. 2$ $\qquad p(k) := \frac{2 \cdot k}{k - 2}$



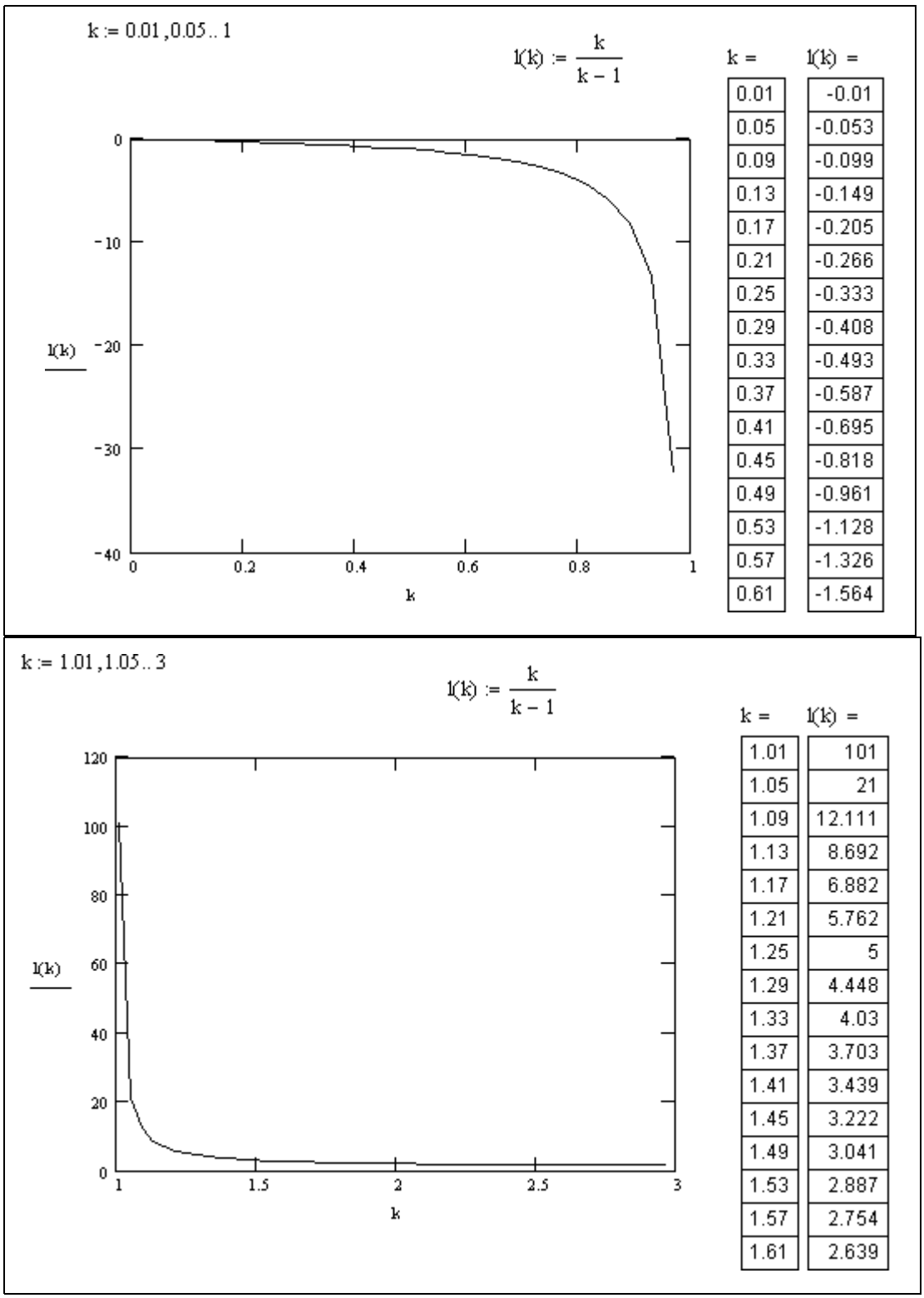
k =	p(k) =
1.01	-2.04
1.05	-2.211
1.09	-2.396
1.13	-2.598
1.17	-2.819
1.21	-3.063
1.25	-3.333
1.29	-3.634
1.33	-3.97
1.37	-4.349
1.41	-4.78
1.45	-5.273
1.49	-5.843
1.53	-6.511
1.57	-7.302
1.61	-8.256

$k := 2.01, 2.1 .. 10$ $\qquad p(k) := \frac{2 \cdot k}{k - 2}$



k =	p(k) =
2.01	402
2.1	42
2.19	23.053
2.28	16.286
2.37	12.811
2.46	10.696
2.55	9.273
2.64	8.25
2.73	7.479
2.82	6.878
2.91	6.396
3	6
3.09	5.67
3.18	5.39
3.27	5.15
3.36	4.941

Рис.1.5. График и первые значения $\overset{\Rightarrow *}{к}$ =p(k)



k =	l(k) =
0.01	-0.01
0.05	-0.053
0.09	-0.099
0.13	-0.149
0.17	-0.205
0.21	-0.266
0.25	-0.333
0.29	-0.408
0.33	-0.493
0.37	-0.587
0.41	-0.695
0.45	-0.818
0.49	-0.961
0.53	-1.128
0.57	-1.326
0.61	-1.564

k =	l(k) =
1.01	101
1.05	21
1.09	12.111
1.13	8.692
1.17	6.882
1.21	5.762
1.25	5
1.29	4.448
1.33	4.03
1.37	3.703
1.41	3.439
1.45	3.222
1.49	3.041
1.53	2.887
1.57	2.754
1.61	2.639

Рис.1.6. График и первые значения $\overleftarrow{\kappa} = l(k)$

Рассмотрим вопрос, - каким геометриям подчиняются векторные траектории в круговом бильярде, характеризуемые фазовыми множителями (1.8) и (1.10), с системой чисел $\overrightarrow{\kappa}, \overrightarrow{\kappa}^*, \overleftarrow{\kappa}, \overleftarrow{\kappa}^*$; Табл.1.2.

Для обоснования ответов на поставленную задачу обратимся к комплексной триаде тригонометрических функций введенных в [3,11, 12; см., так же 8].

Как показано в [8], за счет представления траекторий - плоских кривых вписанного и описанного квадратов в виде триады тригонометрических функций (Рис. 1.7.), можно

интерпретировать найденные системы чисел $\overset{\Rightarrow}{\kappa}, \overset{\Rightarrow *}{\kappa}, \overset{\Leftarrow}{\kappa}, \overset{\Leftarrow *}{\kappa}$; Табл.1.2. Физическое обоснование этой трактовки базируется на сравнении дифракционных откликов от дифракционных оптических транспарантов с круговой графикой с дифракционными откликами от линейных аналогов дифракционных элементов. В экспериментальных исследованиях показано, что дифракционные отклики от линейных аналогов повторяют только общую структуру дифракционных откликов по основным осям фрактализации. Фурье - фильтры в виде дифракционных транспарантов, построенных на графике из системы концентрических и разнесенных по полю транспаранта окружностей являются широкополосными фильтрами с богатым спектром дифракционных откликов по всему полю транспарантов, в отличие от узкополосных фильтров на транспарантах с линейчатыми дифракционными структурами. Какова математическая подоплека обнаруженного феноменологического эффекта покажут наши рассуждения приводимые ниже.

Введенная автором триада тригонометрических функций (Рис. 1.7.), замечательна соотношениями (1.19).

$$Sid_4(\Omega_p \cdot p) = \frac{Sin(\Omega_p \cdot p) + Sin_4(\Omega_p \cdot p)}{2} \quad \textbf{и} \quad Cod_4(\Omega_p \cdot p) = \frac{Cos(\Omega_p \cdot p) + Cos_4(\Omega_p \cdot p)}{2} \qquad (1.19)$$

Это соотношение, в совокупности с уравнениями геометрического поля пространственных частот, выведенных из решения задачи математических бильярдов в комплексных функционалах [6], позволяет описать все возможные векторные траектории бильярдного шара и их отображения во внешнее и внутренние пространства круглого бильярда.

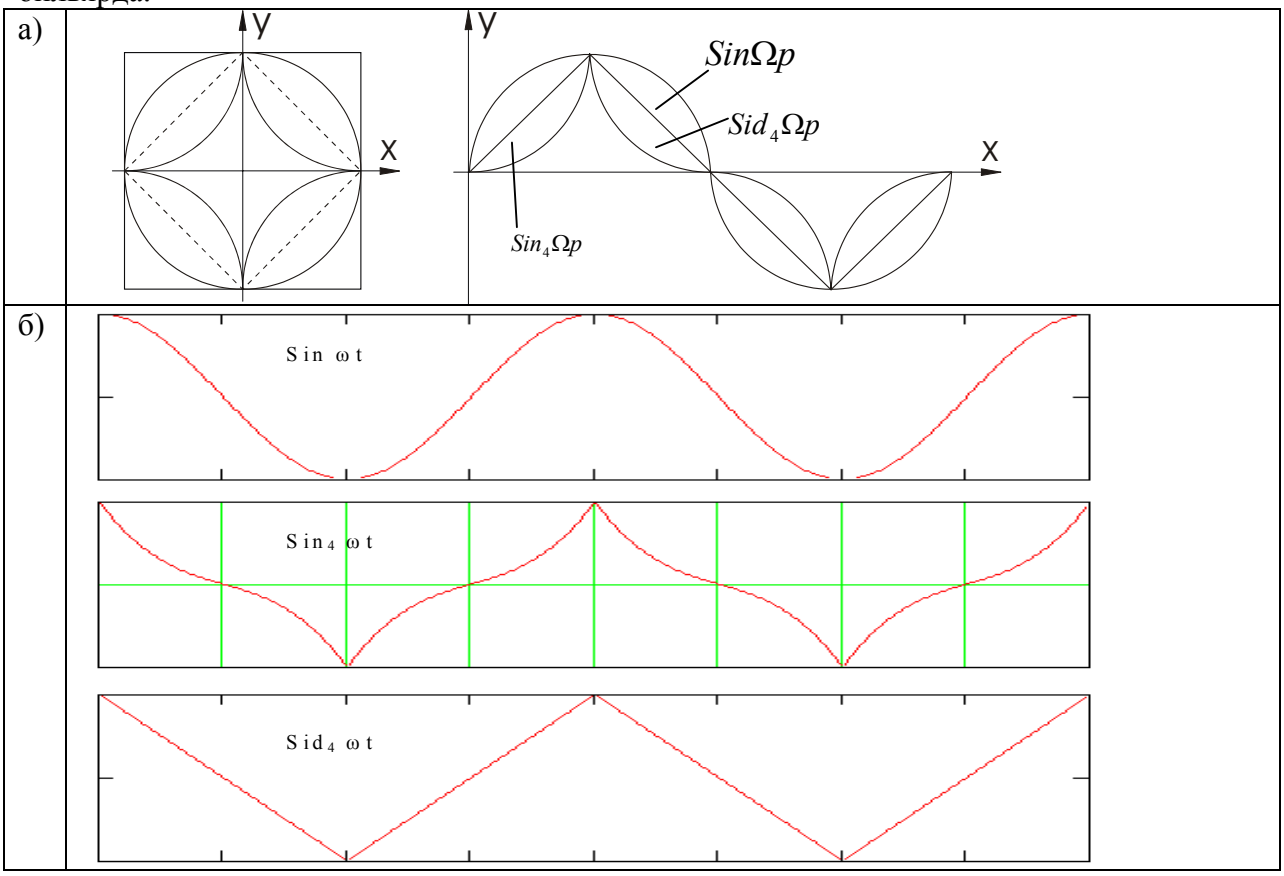


Рис. 1.7. Триада функций комплексной тригонометрии

а) фазовое представление;

б) частотное представление

На примере базового рисунка возможных траекторий с исходным вещественным коэффициентом фрактальности k=4, опишем систему плоских кривых, порождаемых четверкой связанных вещественных чисел $\overset{\Rightarrow}{\kappa} = 4$, $\overset{\Rightarrow *}{\kappa} = -4$, $\overset{\Leftarrow}{\kappa} = 4/3$, $\overset{\Leftarrow *}{\kappa} = 4$; Табл.1.2 (см. рис. 1.8), в комплексном представлении:

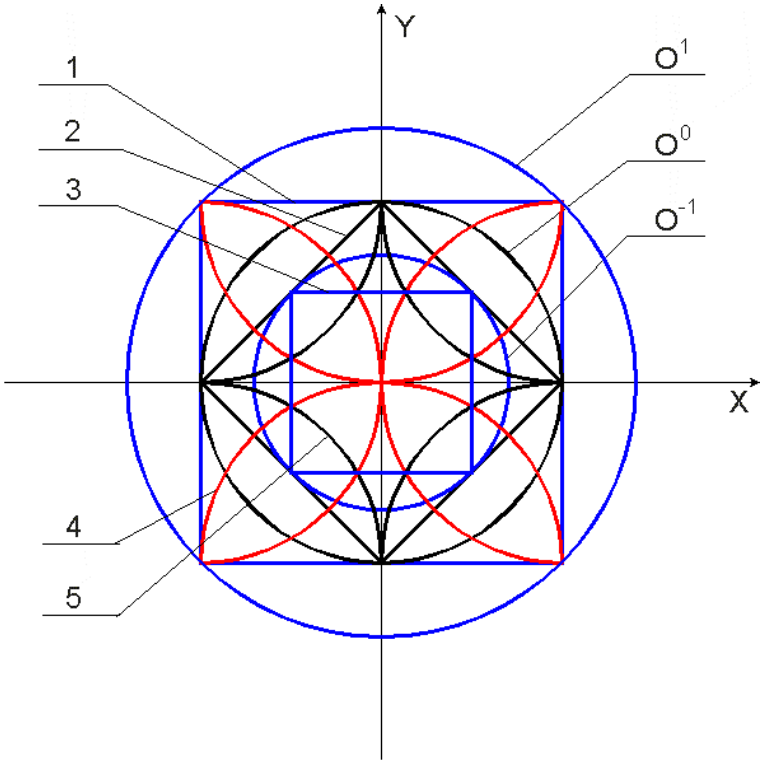


Рис. 1.8. Базовая система плоских кривых фрактального рисунка

0^0 — окружность радиуса R, являющаяся добавленной пространственно временной координатой, т.е. отражающей кривой круглого математического бильярда;

0^1 — окружность радиуса $\sqrt{2}\,R$, являющаяся внешней мнимой добавленной пространственно временной координатой, т.е. кривой внешнего отображения круглого математического бильярда;

0^{-1} — окружность радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}R$, являющаяся внутренней мнимой добавленной пространственно временной координатой, т.е. кривой внутреннего отображения круглого математического бильярда;

1—описанный квадрат (или квадрат, вписанный во внешнюю мнимую окружность 0^1);

2 — вписанный в окружность R диагонально ориентированный квадрат;

3 — квадрат, вписанный во внутреннюю мнимую окружность 0^{-1};

4 — 4-х лепестковая плоская кривая, образуемая полуокружностями радиуса R, построенными из точек пересечения X и Y со сторонами описанного квадрата в их серединах.

5 — астроидоподобная плоская кривая (назовем ее инвертированной окружностью) радиуса R

Каждая из этих кривых может быть описана в комплексной форме [6] через параметры:

к — коэффициент фрактальности,

p — текущее значение вершин (фазовая форма представления) или

t — текущее время (частотная форма представления)

c — скорость света

$j = \sqrt{-1}$

Для окружности радиуса *R* (окружность 0^0), эти выражения запишутся:

$$Z_{R(k,p)} = R \cdot \exp \cdot \left(j \cdot \frac{2\pi}{|c|} \cdot p \right) \tag{1.20}$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = R \cdot \exp \cdot \left(j \cdot \frac{\pi}{R \cdot Sin\, \pi / |c|} \cdot t \right) \tag{1.21}$$

— частотная форма представления

Для окружности радиуса $\sqrt{2} \cdot R$ (окружность 0^1), эти выражения запишутся:

$$Z_{R(k,p)} = \sqrt{2} \cdot R \cdot \exp \cdot \left(j \cdot \frac{2\pi}{|c|} \cdot p \right) \tag{1.22}$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = \sqrt{2} \cdot R \cdot \exp \cdot \left(j \cdot \frac{\pi}{R \cdot Sin\, \pi / |c|} \cdot t \right) \tag{1.23}$$

— частотная форма представления

Для окружности радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R$ (окружность 0^{-1}), эти выражения запишутся:

$$Z_{R(k,p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R \cdot \exp \cdot \left(j \cdot \frac{2\pi}{|c|} \cdot p \right) \tag{1.24}$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R \cdot \exp \cdot \left(j \cdot \frac{\pi}{R \cdot Sin\, \pi / |c|} \cdot t \right) \tag{1.25}$$

— пространственно-частотное представление,

Для описанного квадрата (плоская кривая 1):

$$Z_{R(k,p)} = \sqrt{2} \cdot R \cdot m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot (p-1) + \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.\ 26)$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = \sqrt{2} \cdot R \cdot m_{(k,t)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{4 \cdot R \cdot Sin\pi/4} \cdot (t-1) + \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.27)$$

— пространственно-частотное представление,

Для вписанного квадрата (плоская кривая 2):

$$Z_{R(k,p)} = R \cdot m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot p \right) \quad (1.28)$$

— фазовая форма представления,

$$Z_{R(k,t)} = R \cdot m_{(k,t)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{4 \cdot R \cdot Sin\pi/4} t \right) \quad (1.29)$$

— пространственно-частотное представление,

Для квадрата, вписанного во внутреннюю мнимую окружность 0^{-1} (плоская кривая 3):

$$Z_{R(k,p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R \cdot m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot (p-1) - \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.\ 30)$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R \cdot m_{(k,t)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{4 \cdot R \cdot Sin\pi/4} \cdot (t-1) - \frac{\pi}{4} \right) \quad (1.31)$$

— пространственно-частотное представление,

Для 4-х лепестковой плоской кривой, образуемой полуокружностями радиуса *R*, построенными из точек пересечения x, y в середине сторон описанного квадрата (плоская кривая 4):

$$Z_{R(k,p)} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot R\cdot m_{(k,p)}\cdot\exp\left(j\cdot\frac{6\cdot\pi}{4}\cdot(p-1)+\frac{\pi}{4}\right)-R\cdot\exp\left(j\cdot\frac{6\cdot\pi}{4}\cdot(p-1)+\frac{\pi}{4}\right) \quad (1.32)$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot R\cdot m_{(kt)}\cdot\exp\left(j\cdot\frac{3\cdot c\cdot\pi}{4\cdot R\cdot Sin\pi/4}\cdot(t-1)+\frac{\pi}{4}\right)-R\cdot\exp\left(j\cdot\frac{3\cdot c\cdot\pi}{4\cdot R\cdot Sin\pi/4}\cdot(t-1)+\frac{\pi}{4}\right)$$

(1.33)

— пространственно-частотное представление,

Для инвертированной окружности (плоская кривая 5) эти выражения принимают вид:

$$Z_{R(k,p)} = 2\cdot R\cdot m_{(k,p)}\cdot\exp\left(j\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot p\right)-R\cdot\exp\left(j\cdot\frac{2\pi}{4}\cdot p\right) \quad (1.34)$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = 2\cdot R\cdot m_{(k,t)}\cdot\exp\left(j\cdot\frac{c\cdot\pi}{4\cdot R\cdot Sin\pi/4}\cdot t\right)-R\cdot\exp\left(j\cdot\frac{c\cdot\pi}{4\cdot R\cdot Sin\pi/4}\cdot t\right) \quad (1.35)$$

— пространственно-частотное представление,

Для 4-х лепестковой плоской кривой, образуемой полуокружностями радиуса $\frac{1}{2}$*R*, построенными из точек пересечения x, y в середине сторон мнимого квадрата плоской кривой 3 (на Рис кривая не показана из соображений разрядки плотности рисунка):

$$Z_{R(k,p)} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot R\cdot m_{(k,p)}\cdot\exp\left(j\cdot\frac{6\pi}{4}\cdot(p-1)-\frac{\pi}{4}\right)-R\cdot\exp\left(j\cdot\frac{6\pi}{4}\cdot(p-1)-\frac{\pi}{4}\right) \quad (1.36)$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t)} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot R\cdot m_{(k,t)}\cdot\exp\left(j\cdot\frac{3\cdot c\cdot\pi}{4\cdot R\cdot Sin\pi/4}\cdot(t-1)-\frac{\pi}{4}\right)-R\cdot\exp\left(j\cdot\frac{3\cdot c\cdot\pi}{4\cdot R\cdot Sin\pi/4}\cdot(t-1)-\frac{\pi}{4}\right)$$

(1.37)

— пространственно-частотное представление,

где: $$m_{(k,p)} = \frac{Cos\,\pi/4}{Cos\left(\pi/4 \cdot (1 + 2p - 2ceil(p))\right)} \qquad (1.\ 38)$$

$ceil(p)$ — наибольшее целое от p.

и

$$m_{(k,t)} = \frac{Cos\,\pi/4}{Cos(\pi/4 \cdot \left(1 + \frac{c}{R \cdot Sin\,\pi/4} \cdot t - 2 \cdot ceil\left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\,\pi/4} \cdot t\right)\right))} \qquad (1.39)$$

Т.е. выражения параметров p и t связаны соотношением

$$p = \frac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\,\pi/4} \cdot t \qquad (1.40)$$

Как видно, выражения (1.20…1.40, а также 1.41, 1.42) представляют собой запись системы параметрических уравнений, описывающих каждую из плоских кривых в символьном виде. Введенные добавленные координаты 0^0 и 0^1, 0^{-1} позволяют рассматривать эти плоские кривые в фазовой плоскости.

Приведенные уравнения являются решениями макро- волновых уравнений комплекснозначных функций действительных и комплексных аргументов. Что позволяет разложить суммарное световое геометрическое поле по четырем типам пространственных частот, формируемых эквивалентной схемой транспаранта с четырехуровневым фрактальным рисунком высокой плотности.

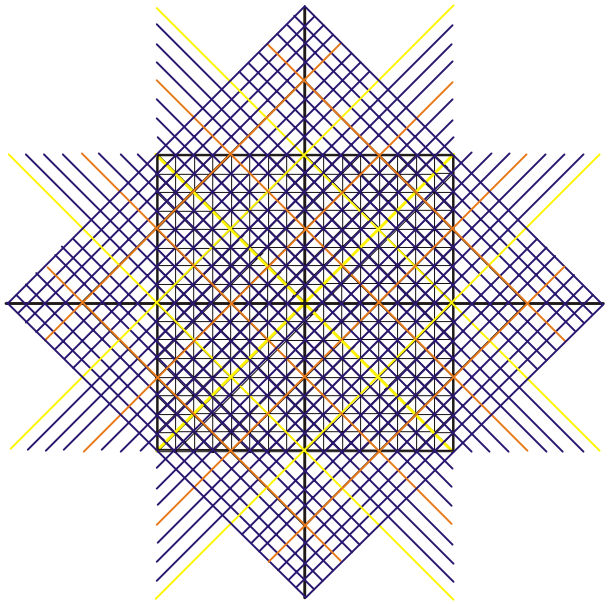


Рис. 1.9. Эквивалентная сдвоенная решетка фрактальной графики [15]

Общее выражение для эквивалентной сдвоенной дифракционной решетки, приведенной на рис. 1.9. примет вид:

$$Z_{R(k,p,q)} = \sum_q \frac{R}{2^q} \left\{ \begin{array}{l} \left[\exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot ceil(p-1) \right) + m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot (p-1) \cdot k^q \right) \right] + \\ + \sqrt{2} \left[\exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot ceil(p-1) \right) + m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot (p-1) \cdot k^q \right) \right] \end{array} \right\} \qquad (1.41)$$

— фазовая форма представления

$$Z_{R(k,t,q)} = \sum_q \frac{R}{2^q} \left\{ \begin{array}{l} \left[\exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \left(ceil \frac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\pi/4} \cdot t - 1 \right) \right) + m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\pi/4} \cdot t - 1 \right) \cdot k^q \right) \right] + \\ + \sqrt{2} \left[\exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \left(ceil \frac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\pi/4} \cdot t - 1 \right) \right) + m_{(k,p)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot \left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\pi/4} \cdot t - 1 \right) \cdot k^q \right) \right] \end{array} \right\}$$

— пространственно-частотное представление, (1.42)

Обозначения параметров, в выражениях (1.41) и (1.42), аналогичны принятым в выражениях (1.20…1.40).

Как известно из теории поля [13,14], если процессы, протекающие в системе, полностью описываются заданием двух переменных x и y, то они могут быть изображены в декартовой системе координат. При этом плоскость (x, y) называется фазовой плоскостью (здесь "фаза" означает "состояние") и фазовая плоскость – это плоскость состояний системы, а каждая точка называется изображающей точкой.

Так как x и y являются функциями времени x=x(t) и y=y(t), то с течением времени изображающая точка описывает в фазовой плоскости кривую, называемую фазовой траекторией. (Известный принцип построения фигур Лиссажу.) В нашем случае траектории движения бильярдного шара формируют фазовый портрет циклического процесса.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих различным значениям начальных условий, называется фазовым портретом системы.

Исследование поведения фазовых траекторий позволяет ответить на ряд важных вопросов, решение которых не может быть найдено целым рядом существующих приближенных методов.

Если система описывается не двумя, а тремя переменными (система третьего порядка) и т.д. *n*-переменными, то ее поведение можно рассматривать в фазовых пространствах x, y, z или X, Y, Z, … N.

Вполне очевидно, что реальные траектории бильярдного шара в пространстве с правосторонней тройкой электромагнитных векторов (E, H и k) и реальные части отображений этих траекторий в решениях задачи математических бильярдов в комплексной форме описываются в Евклидовых многослойных фазовых плоскостях, т.е. в плоских сечениях 3^x или *n* -мерных сфер (цилиндров). Так например, даже фрактальная сдвоенная решетка, Рис. 1.8., описывается системами уравнений (1.41, 1.42) где, также как и в уравнениях (1.26… 1.31), для фазовых множителей, нами использованы правосторонние вещественные числа $\overset{\Rightarrow}{\kappa}, \overset{\Rightarrow *}{\kappa}$. Напомним, что во всех приведенных выражениях для реальных траекторий мы базировались на исходных вещественных коэффициентах фрактальности *k*=4, и описывали систему плоских кривых, порождаемых четверкой связанных вещественных чисел $\overset{\Rightarrow}{\kappa}$=4, $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ = - 4, $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$=4/3, $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$=4. Заменив в выражениях (1.20…1.40) коэффициенты 4 и –4 на общие выражения из Табл.1.2

мы получим полное описание всех плоских кривых и ломанных траекторий на Евклидовой плоскости.

А представлением дробно-рациональных траекторий с $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$=4/3, $\overset{\Leftarrow^*}{\kappa}$=4 по типу их связи с числами $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ и $\overset{\Leftarrow^*}{\kappa}$ в правом столбце Табл.1.2 мы можем построить все кривые (отрезки «прямых» линий) на плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре.

1.1.1. Неевклидовы трактовки решений математических бильярдов в круге и *n*-мерных сферах

Детальное рассмотрение математических и физических оснований с позиций последних достижений по нано- структурному синтезу композитных материалов с отрицательными показателями преломления [16…24] привело к пониманию того, что дробно-рациональными числами $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ и $\overset{\Leftarrow^*}{\kappa}$ описываются процессы и траектории на неевклидовой плоскости. Вероятнее всего этими числами описываются процессы на плоскостях Лобачевского в интерпретации Пуанкаре [25,26], при комплексном решении задачи математических бильярдов в круге. И геометриями Минковского и Римана [28,29], а так же, обобщенной Римановой геометрией – геометрией Финслера, если система описывается не двумя, а тремя переменными (система третьего порядка) или n-переменными, при решении задачи математических бильярдов в *n*- мерных сферах.

Напомним основные определения вышеназванных геометрий:

-геометрия Лобачевского основана на тех же основных посылках, что и Евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных прямых, (пятый постулат). Нас будет интересовать интерпретация Пуанкаре, т.е. мы будем рассматривать плоскость Лобачевского, реализуемую внутренностью круга, а прямые – внутренними частями дуг окружностей, пересекающих основной круг ортогонально. В интерпретации Пуанкаре метрика вводится с помощью двойных отношений, причем величины углов на модели такие же, как и на плоскости Лобачевского (модель конформная).

- геометрия Минковского – геометрия конечномерного нормированного пространства, т.е. аффинного пространства, в котором введена метрика Минковского. Нас будет интересовать метрика инвариантная относительно параллельных переносов, при которой роль единичной сферы играет фиксированное центрально-симметричное выпуклое тело.

- в общем виде, Риманова геометрия - эллиптическая геометрия основанная на аксиомах, требования которых отличны от требований аксиом Евклидовой геометрии (в частности аксиомы параллельности). Особое значение для развиваемой нами модели играет сфера Римана - сфера в Евклидовом пространстве $\Re^3(\xi,\eta,t)$, на которую расширенная комплексная плоскость $\hat{C}$ отображается взаимно однозначно и конформно при помощи стереографической проекции.

- Финслерова геометрия – метрическое обобщение Римановой геометрии. Возникла вслед за введением общего определения длины вектора не ограниченного частным римановым определением в виде корня квадратного из квадратичной формы. Нас будут интересовать компоненты контравариантных векторов, касательных к многообразию M в точках отражения в математических бильярдах *n*- мерных сфер.[29].

Таким образом, исходя из предположений выдвинутых Павловым Д. Г. (см Пояснения к конкурсу) о возможности одновременного существования в окружающем нас физическом пространстве-времени четырехмерных систем, в которых одно направление является выделенным по отношению к трём другим можно предложить гипотезу и физически ее аргументировать, которая заключается в следующем:

- В силу существования триады комплексных тригонометрических функций см. Рис 1.7, связанных выражением (1.19) и доказанного выше факта существования четырех систем

связанных в математическом бильярде вещественных правосторонних ($\overset{\Rightarrow}{\kappa}, \overset{\Rightarrow *}{\kappa}$) и левосторонних ($\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ и $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$) чисел, разумно предположить, что, при кватернионном описании бильярдных траекторий в круге, для них неотъемлемыми являются две трактовки:

- Евклидова и
- не Евклидова.

• Кроме того, совершенно очевидно, что должны существовать пары комплексных отображений траекторий математических бильярдов в круге во внешнее и внутренние пространства относительно окружности (решение задачи на плоскости). И пары гиперкомплексных отображений во-внешнее и внутренние пространства шара, относительно его границы - сферы (решение 3D-задачи).

• Выбрав в качестве действительной величины гиперкомплексной функции для круга - Евклидовы векторы, характеризуемые коэффициентами фрактальности $\pm\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ мы, естественно, будем описывать все траектории с привлечением дискретных тригонометрических функций

$$Z_R\left(\overset{\Rightarrow}{k},p\right) = sid_{\overset{\Rightarrow}{k}}(\Omega_p \cdot p) = R \cdot m_{x,y\left(\overset{\Rightarrow}{k},p\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \cdot p \right) \qquad (1.43)$$

-фазовое представление и

$$Z_R\left(\overset{\Rightarrow}{k},t\right) = sid_{\overset{\Rightarrow}{k}}(\omega_p \cdot t) = R \cdot m_{x,y\left(\overset{\Rightarrow}{k},t\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{\overset{\Rightarrow}{k} \cdot R \cdot Sin\, \pi / \overset{\Rightarrow}{k}} \cdot t \right) \qquad (1.44)$$

-пространственно-частотное представление,

в силу $p = \dfrac{c}{2 \cdot R \cdot Sin\, \pi / \overset{\Rightarrow}{k}} \cdot t$

• Выбрав в качестве действительной величины комплексной функции для круга неевклидовы векторы – дуговые векторы на плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре внутри круга, характеризуемые коэффициентами фрактальности $\pm\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ мы будем описывать все траектории с привлечением дискретных тригонометрических функций $Sin_k(\Omega_p \cdot p) = 2 \cdot Sid_k(\Omega_p \cdot p) - Sin(\Omega_p \cdot p)$ - при фазовом представлении и $Sin_k(\omega_p \cdot t) = 2 \cdot Sid_k(\omega_p \cdot t) - Sin(\omega_p \cdot t)$ - при частотном представлении (Рис 1.7, выражение (1.19))

$$Z_G\left(\overset{\Leftarrow}{k},p\right) = \sin_{\overset{\Leftarrow}{k}}(\Omega_p \cdot p) = 2 \cdot R \cdot m_{x,y\left(\overset{\Leftarrow}{k},p\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}} \cdot p \right) - R \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}} \cdot p \right) =$$

$$= R \cdot (2 \cdot m_{x,y\left(\overset{\Leftarrow}{k},p\right)} - 1) \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}} \cdot p \right) \qquad (1.45)$$

-фазовое представление

$$Z_{G\left(\overset{\Leftarrow}{k},t\right)} = \sin_{\overset{\Leftarrow}{k}}(\omega_p \cdot t) = 2 \cdot R \cdot m_{x,y\left(\overset{\Leftarrow}{k}t\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{\overset{\Leftarrow}{k} \cdot R \cdot Sin\ \pi / \overset{\Leftarrow}{k}} \cdot t \right) - R \cdot \exp\left(j \cdot \frac{\pi}{R \cdot Sin\ \pi / \overset{\Leftarrow}{k}} \cdot t \right) =$$

$$= R \cdot (2 \cdot m_{\left(\overset{\Leftarrow}{k}t\right)} - 1) \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{\overset{\Leftarrow}{k} \cdot R \cdot Sin\ \pi / \overset{\Leftarrow}{k}} \cdot t \right) \qquad (1.46)$$

- пространственно-частотное представление,

Для того, что бы при прочтении не возникало двояких толкований, рассмотрим выражения (1.43) … (1.46) с точки зрения анализа символьной записи этих выражений.

$Z_{R\left(\overset{\Rightarrow}{k},p\right)}; Z_{G\left(\overset{\Leftarrow}{k},p\right)}$-двух параметрические комплексные функционалы от комплексных параметров (при вещественных $\pm\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ и $\pm\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ - дискретные значения); и текущих значениях вещественных параметров *p*; при *p= ceil(p)* – точки начала и конца векторов (отрезков бильярдных траекторий от одного отражения до другого отражения).

Выражения (1.43) и (1.44) являются представлениями непрерывной последовательности непараксиальных лучевых траекторий или последовательности траекторий векторов, у которых конец предыдущего вектора совпадает с началом последующего, при их отражениях в круговом бильярде.

Эти выражения в радиоэлектронике характеризуются как выражение амплитудно-фазовой модуляции. Рассмотрим ех по- членно.

Действительно экспоненциальные части выражений (1.43) и (1.45) представляют собой функцию

$$f(\Omega \cdot p) = R \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \cdot p \right) = R(\cos(\frac{2\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \cdot p) + j \cdot (\sin(\frac{2\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \cdot p)) \qquad (1.47).$$

Они характеризуют вращение центрированного вектора с модулем |R| против часовой стрелки, при котором вершины вектора $f(\Omega \cdot p)$, при *p=ceil(p)* совпадают с точками деления единичной окружности на вещественные числа $\overset{\Rightarrow}{\kappa} = k$

Примечание:

Из теории аналитических функций, наше выражение, $f(\Omega \cdot p)$, записанное для окружности единичного радиуса *R*=1 в комплексной плоскости $\overset{\circ}{C}$, интерпретируется так:

- если $\overset{\Rightarrow}{k} = k$ - натуральное число и *c* – комплексное число, то $\sqrt[k]{c}$ (корень *k* –степени из *c*) есть решение уравнения $z^k = c$. При этом справедливо утверждение: при $c \neq 0$ существует ровно *k* различных корней *k*-й степени из *c*. Они определяются формулами

$$\sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{|c|}(\cos\frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot p}{k} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot p}{k}) \qquad (1.48)$$

где $\sqrt[k]{|c|}$ - арифметический корень из положительного числа $|c|$, $\varphi = \arg c$ и *p*=0,1,2, …, *k*-1 , но мы имеем дело с системой точек, следовательно, в известном выражении (1.48) $\varphi = \arg c$=0.

Математически это утверждение можно интерпретировать так, завернув в кольцо отрезок *AB*, (Рис.1.1) мы объединили точки *A* и *B* в одну точку A_0 и, далее, единичный отрезок делим на системы точек, положение

которых определяется циклическим фазовым множителем $\Omega_p = \frac{2\cdot\pi}{k}\cdot p$. Тем самым, во всех наших параметрических представлениях мы перешли от комплексной плоскости $\overset{\circ}{C}$ к обычной Евклидовой плоскости с полным переносом всех символьных представлений плоскости $\overset{\circ}{C}$ на реальную физическую плоскость.

В этом случае, реальная часть задачи математических бильярдов в круге описывается задачей отыскания арифметических корней *k* – степени из положительного числа 1, т.е. $\sqrt[k]{1}$.

В частности для системы непараксиальных лучей (векторов, Рис 1.8) точки их начала и конца для линейных векторов Евклидовой плоскости можно представить в виде♣:

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt[4]{1})_{p=0} = \cos 0 + j\cdot\sin 0 = 1\\
&(\sqrt[4]{1})_{p=1} = \cos\frac{2\cdot\pi}{4} + j\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{4} = j\\
&(\sqrt[4]{1})_{p=2} = \cos\pi + j\cdot\sin\pi = -1\\
&(\sqrt[4]{1})_{p=3} = \cos\frac{6\cdot\pi}{4} + j\cdot\sin\frac{6\cdot\pi}{4} = -j
\end{aligned}
\qquad (1.49)
$$

где: $j = \sqrt{-1}$

Представляет интерес другая, - неизвестная трактовка, а именно, как математически характеризовать кватернионную пару чисел $\overset{\Rightarrow}{k}$ и $\overset{\Leftarrow}{k}$?

Логически очевидно, что экспоненциальная часть выражения (1.43), т.е. функция $f(\overset{\Rightarrow}{\Omega}_p\cdot p)$ имеет зеркальное (относительно оси *X*) отображение в экспоненциальной части выражения (1.45), т.е.

$$f(\overset{\Leftarrow}{\Omega}_p\cdot p) = R\cdot\exp(j\cdot\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}}\cdot p) = R\cdot(\cos(\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}}\cdot p) + j\cdot\sin(\frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}}\cdot p)) \qquad (1.50),$$

а, следовательно, для неё мы также можем дать трактовку по отысканию арифметических корней $\overset{\Leftarrow}{k} = \frac{k}{k-1}$ – “левосторонней” степени из положительного числа 1, (если примем *R*=1), т.е. $\sqrt[\overset{\Leftarrow}{k}]{1}$ и по аналогии с (1.49)

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt[\frac{4}{3}]{1})_{p=0} = \cos 0 + j\cdot\sin 0 = 1\\
&(\sqrt[\frac{4}{3}]{1})_{p=1} = \cos\frac{6\cdot\pi}{4} + j\cdot\sin\frac{6\cdot\pi}{4} = -j\\
&(\sqrt[\frac{4}{3}]{1})_{p=2} = \cos 3\pi + j\cdot\sin 3\pi = -1\\
&(\sqrt[\frac{4}{3}]{1})_{p=3} = \cos\frac{2\cdot\pi}{4} + j\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{4} = j
\end{aligned}
\qquad (1.51)
$$

Таким образом, останавливаясь на трактовке функционалов (1.43 и 1.45), рассматриваемых для дискретных значений $p = ceil(p)$, т. е. -наименьших целых чисел, характеризующих текущий фазовый параметр *p*, мы можем констатировать, что

♣ Все вышесказанное в первой части Примечания можно рассматривать как ответ на полемический вопрос Елисеева, заданный в рубрике” О друге Елисееве” на Форуме сайта :www.hypercomplex.ru.

Этот ответ можно найти в любой серьезной монографии по теории аналитических функций, смотри, например, [32] или в инженерном справочнике [33] на страницах 36-37.

экспоненциальные части этих выражений позволяют рассматривать их кватернионное описание в соответствии с векторной алгеброй Клиффорда [30] или более поздней трактовкой алгебры сопряжений, намеченной в работах [1,34]

В приведенных трактовках и заключена гносеология различий символьных представлений экспоненциальных членов в уравнениях геометрического поля пространственных частот, в сравнении с символьной записью уравнений Максвелла, например, для случая символьного описания плоской монохроматической волны, у которой все величины пропорциональны $e^{i(kz-\omega t)}$, и которая в классическом представлении может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned}[kE] &= \frac{\omega}{c}\mu H \\ [kH] &= -\frac{\omega}{c}\varepsilon E\end{aligned}\right\} \qquad (1.52)$$

Поэтому надо различать интегральный аргумент $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T}$ (где T – период электромагнитного колебания [сек], а ω выражается в Гц=1/сек), используемый в классических уравнениях электродинамики, в сравнении с используемыми автором пространственно- частотными $\omega_{\overset{\Rightarrow}{p}}$, $\omega_{\overset{\Leftarrow}{p}}$ и фазовыми аргументами $\Omega^{\Rightarrow}_{p} = \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}}$ и $\Omega^{\Leftarrow}_{p} = \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}}$

Для уравнений электродинамики, для точек дискретных значений *t,* параметр φ в выражении (1.48), $\varphi = \arg c \neq 0$, а он в точности равен ω .

$\varphi = \omega = \frac{2\cdot\pi}{T}$, в отличие от нашей трактовки, в которой мы обращаемся к анализу аргументов $\omega_{\overset{\Rightarrow}{p}}$, $\omega_{\overset{\Leftarrow}{p}}, \Omega^{\Rightarrow}_{p}, \Omega^{\Leftarrow}_{p}$ как фазовым функциям $f(kz)$ экспоненциальной формы Максвелла.

Т. е. мы оперируем не с полной электромагнитной волной (1.52), а расчленяем ее на четыре фазовые характеристики от текущих параметров *p* и *t* при заданных начальных условиях

$$\Omega^{\Rightarrow}_{p_0}\cdot p = \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}}\cdot 0 = 0 \text{ и } \Omega^{\Leftarrow}_{p_0}\cdot p = \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}}\cdot 0 = 0 \text{ и } \Omega^{\Rightarrow}_{p_1}\cdot p = \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \text{ и } \Omega^{\Leftarrow}_{p_1}\cdot p = \frac{2\cdot\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}}. \qquad (1.53)$$

Сами текущие значения (геометрические места точек в пространствах времени) определяются вторым (модуляционным) сомножителем в выражениях (1.43) и (1.45)

$$m_{x(k,p)} = \frac{\cos(\pi/k)}{\cos\left(\pi/k\cdot(1+2p-2ceil(p))\right)} \qquad (1.54)$$

Эта функция является амплитудно-фазовой комплексной тригонометрической функцией модуляции реальных частей выражений (1.43…1.46) и формирует прямую линию в полярной системе координат, в которой, по сути дела, представляются параметрические описания фазовых плоскостей внутри круга;

Но существует, как оказалось, еще и другая модуляционная функция:

$$m_{y(k,p)} = \frac{\sin(\pi/k)}{\sin\left(\pi/k\cdot(1+2p-2ceil(p))\right)} \qquad (1.55)$$

- амплитудно-фазовая комплексная тригонометрическая функция модуляции мнимых частей выражений (1.43…1.46), которая формирует “прямые” линию во внешней сфере полярной системе координат и описания внешних процессов в фазовых плоскостях.

В результате можно констатировать, что модуляционные функции для Евклидовой плоскости объединяются так же комплексным функционалом

$$m_{x,y}(k,p) = m_{x(k,p)} + i \cdot m_{y(k,p)} \qquad (1.56)$$

Их графики представлены на Рис . 1.10., а график гиперболического модуляционного функционала представлен на Рис 1.11. с фрагментом программы в MathCad 2000 Professional

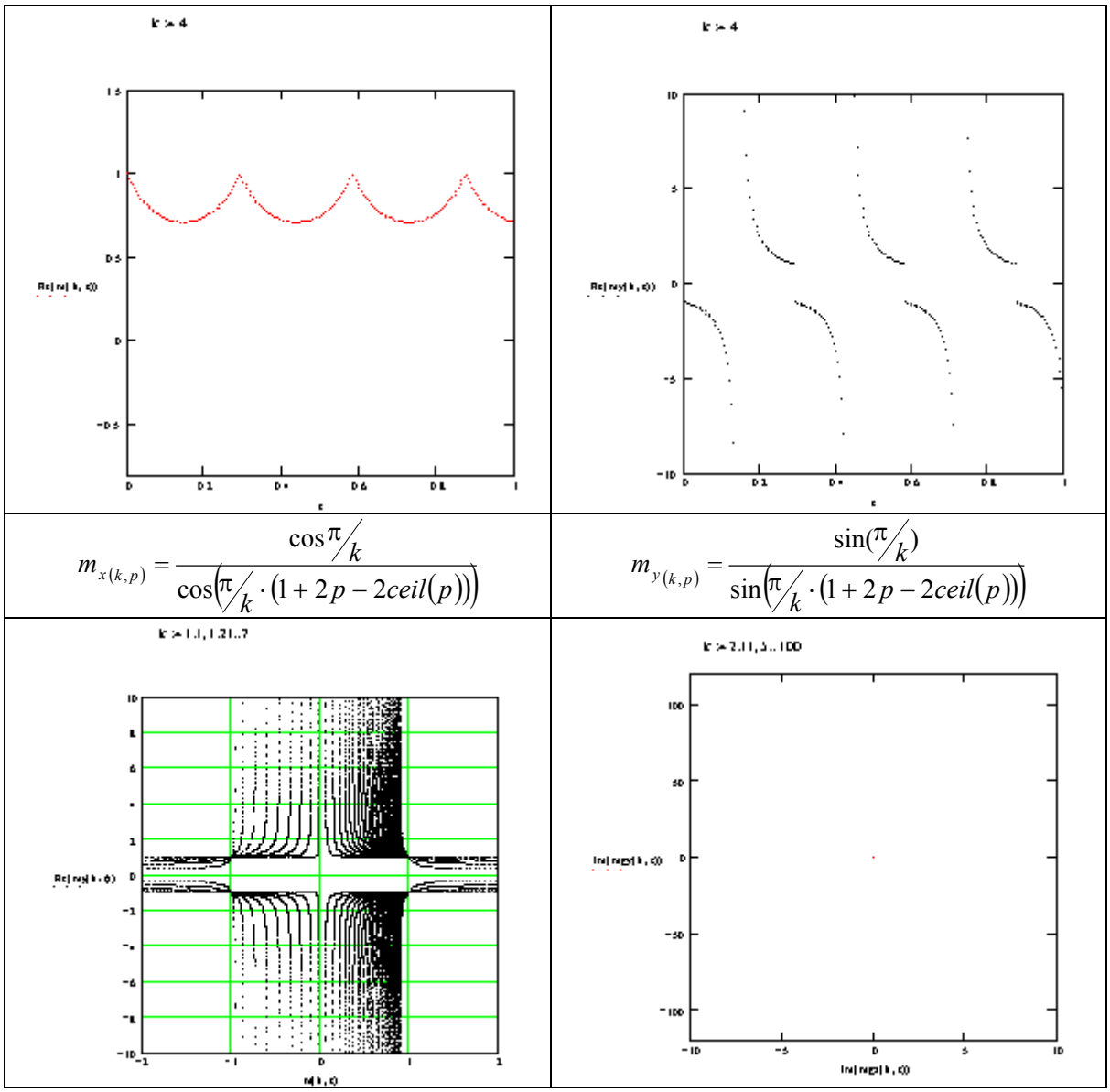


Рис.1.10. Графики комплексных функций амплитудно-угловой модуляции $m_{x(k,p)}$ и $m_{y(k,p)}$ для Евклидовой плоскости в зависимости от времени (верхняя строка) и их параметрическое представление $m_{x,y}(k,p)$ для реальных и мнимых частей в фазовой плоскости (нижняя строка).

Результаты моделирования модуляционных функций для гиперболической плоскости Минковского в интерпретации Пуанкаре

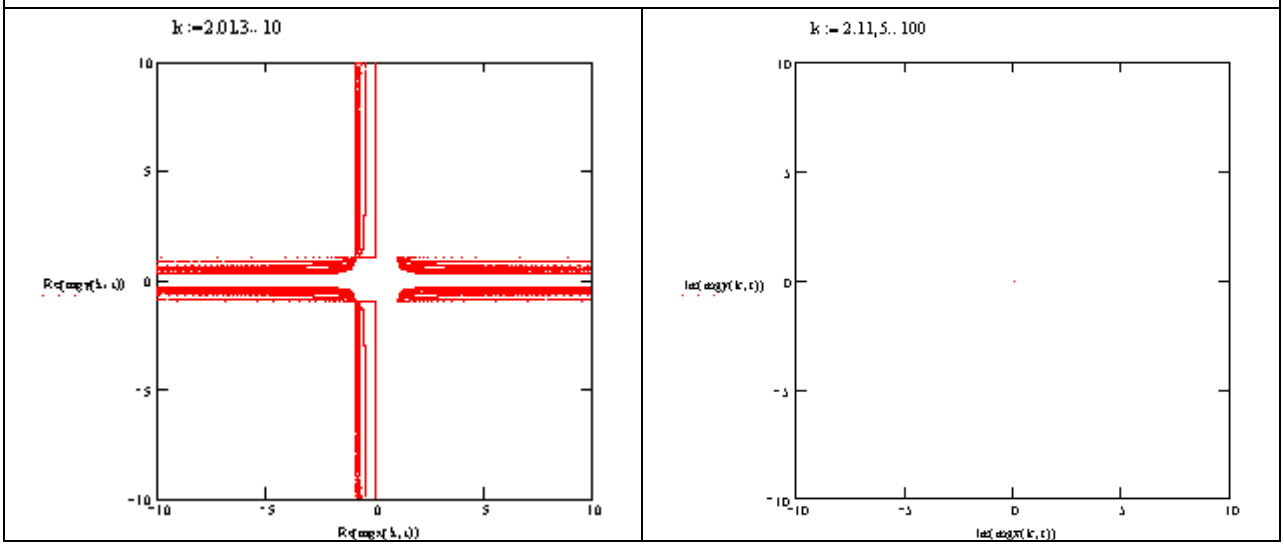
Фрагменты программы в MathCad 2000 Professional

$$m(k,t) := \frac{\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{k}\cdot\left[1+\frac{c}{R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}\cdot t-\left(2\cdot \mathrm{ceil}\left(\frac{c}{2\cdot R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}\cdot t\right)\right)\right]\right]}$$

$$my(k,t) := \frac{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{k}\cdot\left[1+\frac{c}{R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}\cdot t-\left(2\cdot \mathrm{ceil}\left(\frac{c}{2\cdot R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}\cdot t\right)\right)\right]\right]}$$

$$mgx(k,t) := \frac{\cos\left(\frac{\pi}{kl(k)}\right)}{\cos\left[\frac{\pi}{kl(k)}\cdot\left[1+\frac{c}{R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{kl(k)}\right)}\cdot t-\left(2\cdot \mathrm{ceil}\left(\frac{c}{2\cdot R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{kl(k)}\right)}\cdot t\right)\right)\right]\right]}$$

$$mgy(k,t) := \frac{\sin\left(\frac{\pi}{kl(k)}\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{kl(k)}\cdot\left[1+\frac{c}{R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{kl(k)}\right)}\cdot t-\left(2\cdot \mathrm{ceil}\left(\frac{c}{2\cdot R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{kl(k)}\right)}\cdot t\right)\right)\right]\right]}$$



(1.56)

Рис.1.11. График параметрического представление комплексных функций амплитудно-угловой модуляции $m_{gx(k,t)}$ и $m_{gy(k,t)}$. для реальных и мнимых частей в фазовой плоскости Минковского в интерпретации Пуанкаре.

Анализ результатов математического моделирования, комплексных функций амплитудно-угловой модуляции $m_{x(k,p)}$ и $m_{y(k,p)}$; $m_{gx(k,t)}$ и $m_{gy(k,t)}$ показывает, что их численные значения образуют свои рекуррентные числовые системы. Из результатов

видно, что эти функции, также – по-парно ортогональны и, тем самым, они также могут быть интерпретированы как системы связанных векторов. Характерно, что параметрический анализ мнимых частей выражений (1.54…1.56) , выявляет факт непринадлежности центра окружности этим числовым системам, определяемым на интервалах:

-для $m_{r_{x,y}}(k,p)$, $m_{g_{x,y}}(k,p)$ $x \in |0...+1\ |\cdots|1...2|\cdots|2...\infty\ ]$, $y \in |\pm 1...\pm\infty\ ]$ для интервала $x \in |-1...1|$ и $y \in |0...\pm 1\ ]$ для интервала $x \in |\pm 1...\pm\infty|$. При этом установлено, что числа 0, 1 и 2 являются полюсами в числовых системах, характеризующих комплексные функции амплитудно-угловой модуляции $m_{x(k,p)}$ и $m_{y(k,p)}$; $m_{gx(k,t)}$ и $m_{gy(k,t)}$

Эти интервалы лучше анализировать на увеличенном масштабе параметрических графиков Рис.1.11.б.

Следует обратить внимание на мнемоническое правило различения графиков функционалов $m_{r_{x,y}}(k,p)$ и $m_{g_{x,y}}(k,p)$. Для правосторонних числовых систем $\overset{\Rightarrow}{k}$, для которых используются графики функционалов $m_{r_{x,y}}(k,p)$ сгущение кривых вдоль оси У происходит справа , а для левосторонних числовых систем $\overset{\Leftarrow}{k}$, для которых используются графики функционалов $m_{g_{x,y}}(k,p)$, сгущение кривых наблюдается вдоль оси У слева. Анализ этих тонкостей в данном изложении материала, на мой взгляд, излишен.

k := 1.1, 1.21 .. 7

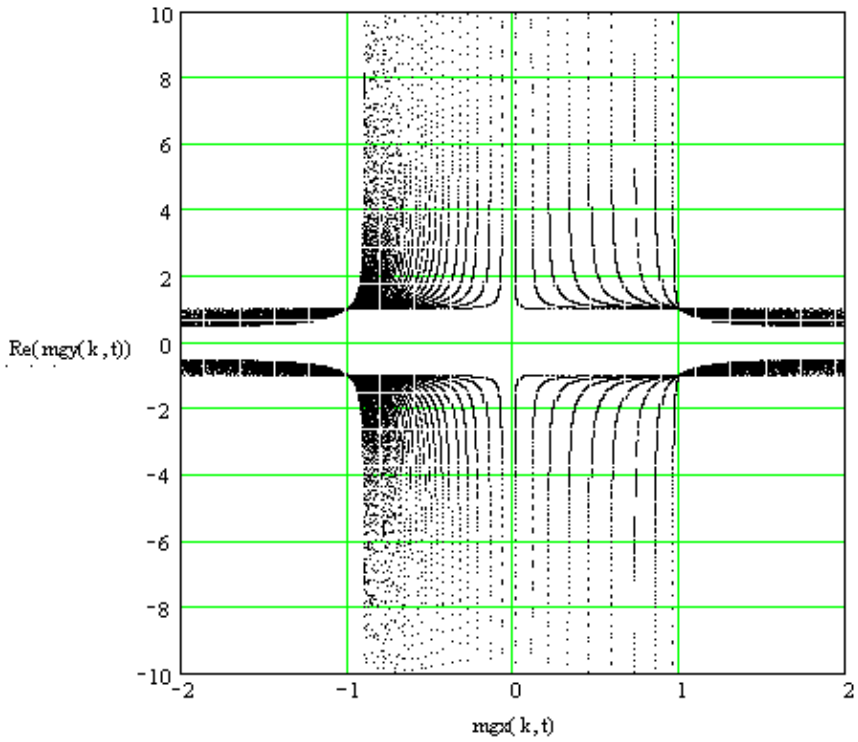


Рис.1.11.б. График параметрического представление гиперболических комплексных функций амплитудно-угловой модуляции $m_{gx(k,t)}$ и $m_{gy(k,t)}$. для реальных частей в фазовой плоскости Минковского в интерпретации Пуанкаре в увеличенном масштабе.

Результаты моделирования уравнений (1.43 и 1.45) и представление Евклидовых и неевклидовых векторов, иллюстрируется на Рис.1.11 и Рис.1.12, соответственно

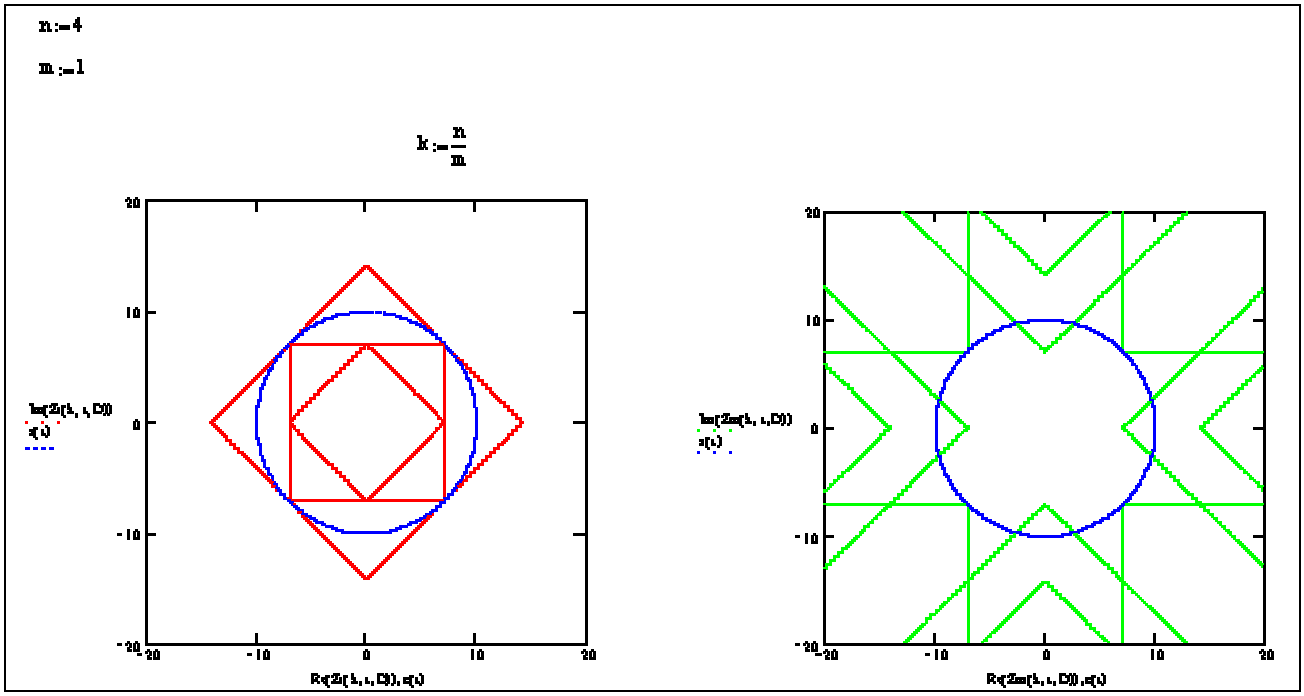


Рис.1.11. Моделирование линейных векторов с $\vec{к}$ =4, (Рис.1.11. а) и $\vec{к}^{*}$ =-4 в Евклидовой плоскости и комплексные отображения в смежных слоях Евклидовых плоскостей D є [-1,0,1], (Рис.1.11. б)

Фрагмент программы в MathCad 2000 Professional

$$Zm(k,t,D) := R \cdot my(k,t) \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{D} \cdot e^{i \cdot \left[\frac{2\pi \cdot \left(1 - \frac{c}{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \cdot t\right)}{k} + \pi \cdot \mathrm{floor}\left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \cdot t\right) + \frac{D \cdot \pi}{2} + (1-D) \cdot \frac{\pi}{k}\right]}$$

$$Zr(k,t,D) := R \cdot m(k,t) \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{D} \cdot e^{i \cdot \left[\frac{2\pi \cdot \left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \cdot t - 1\right)}{k} + \frac{\pi(D+1)}{2} + \frac{\pi(1-D)}{k}\right]}$$

$$Zmg(k,t,D) := R \cdot mgy(k,t) \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{D} \cdot e^{i \cdot \left[\frac{2\pi \cdot \left(1 - \frac{c}{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \cdot t\right)}{k} + \pi \cdot \mathrm{floor}\left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \cdot t\right) + \frac{D \cdot \pi}{2} + (1-D) \cdot \frac{\pi}{k}\right]}$$

$$Zgr(k,t,D) := 2 \cdot Zr(k,t,D) - R \cdot \left[\left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)\right)^{D} \cdot e^{i \cdot \left[\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2 \cdot R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \cdot t - 1\right)}{k} + \frac{\pi \cdot (D+1)}{2} + \frac{\pi \cdot (1-D)}{k}\right]}\right]$$

$$ZD(k,t,D) := Zr(k,t,D) + i \cdot Zm(k,t,D) \qquad (1.57)$$

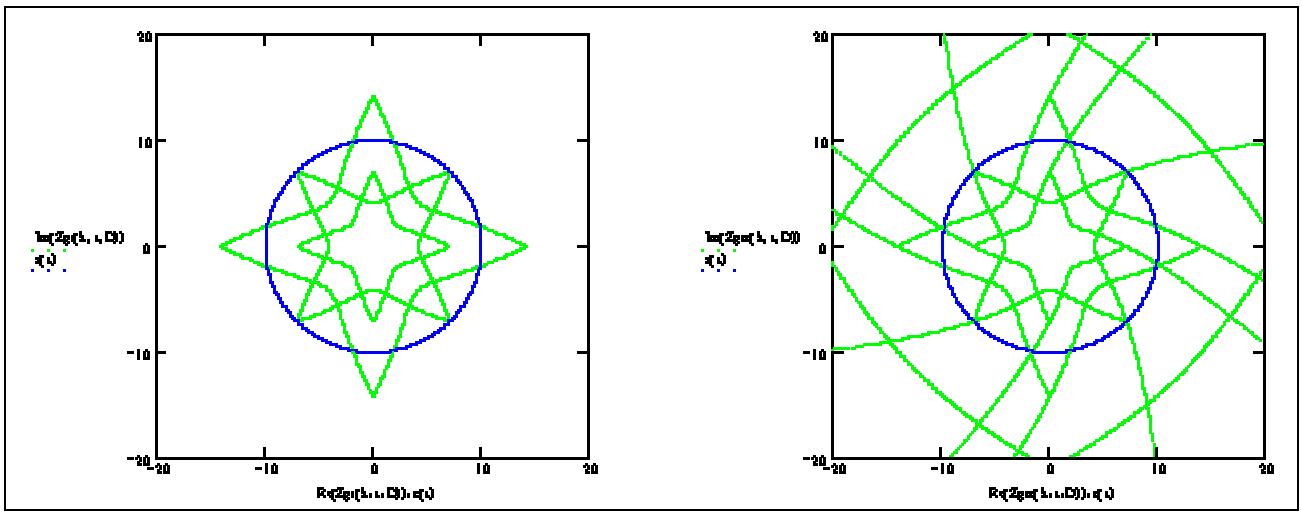


Рис.1.12. Моделирование нелинейных векторов с $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ =4/3 (Рис.1.12. а) и $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$ =4 в плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре и комплексные отображения в смежных слоях плоскостей Лобачевского в круге, для слоев D є [-1,0,1], (Рис.1.12. б)

Как видно из Рис. 1.11. и Рис. 1.12., комплексные отображения реальных векторов, характеризуемых правосторонними коэффициентами фрактальности $\overset{\Rightarrow}{\kappa}$ =4, (при D=0), определяются в круге, как для Евклидовой, так и для плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре с $\overset{\Leftarrow}{\kappa}$ =4/3.
Комплексные отображения мнимых нелинейных векторов, характеризуемых правосторонними ортогонально-сопряженными коэффициентами фрактальности $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ =-4, (при D є [-1,0,1]), определяются вне круга, для Евклидовой плоскости.

А ортогонально-сопряженные векторы для плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре, с $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$ =4 отображаются как в круге, так и вне круга. Другими словами, векторы, характеризуемые ортогонально сопряженными линейными коэффициентами фрактальности $\overset{\Rightarrow *}{\kappa}$ и гиперболическими коэффициентами фрактальности $\overset{\Leftarrow *}{\kappa}$, делят внешнюю область круга с центром в бесконечно удаленной точке.

Остается решить вопрос, как связать комплексные функционалы (1.43…1.46) для всеобъемлющего 3D-описания геометрического поля математических бильярдов в сфере, через представление в виде поликомплексной числовой системы?

1.1.2 Анализ возможных вариантов построения гиперкомплексных $3D$-фрактальных конфигураций

На основе вводимого предположения: все объемные конфигурации, вероятно, формируются триадой сопрягаемых друг с другом пар правильных Платоновых тел. По аналогии с кристаллографическим определением – «сингонии», будем называть такие пары Платоновых тел – фрактониями.

Это определение построено по принципу соединения: fractional (англ.) – дробный и onia – суффикс, характеризующий объемные фундаментальные конструкции.

В результате можно назвать следующую триаду иррационально сочленяемых пар правильных объемных тел – фрактоний:

- Тетраэдр – тетраэдр, - первая фрактония;
- Октаэдр – куб, - вторая фрактония;
- Икосаэдр – додекаэдр, - третья фрактония.

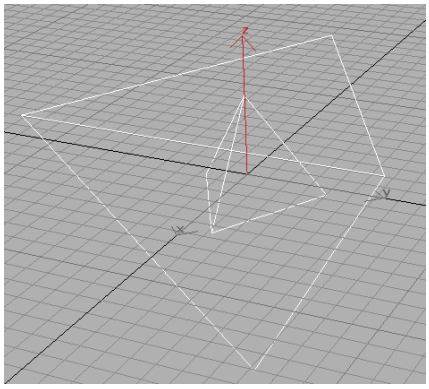
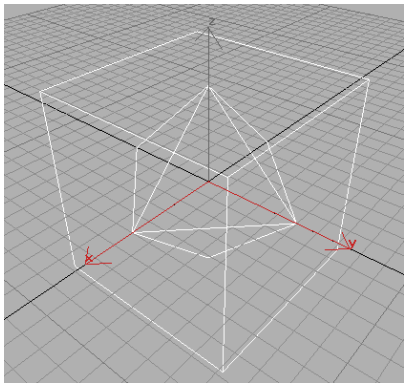
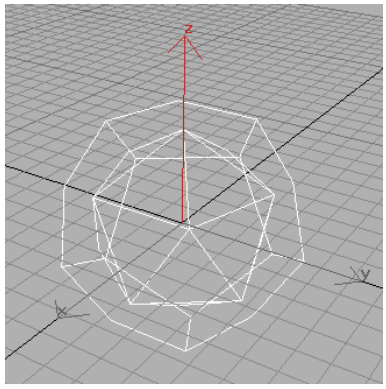
		
Фрактония 1. Тетраэдр-тетраэдр	Фрактония 2. Октаэдр-куб	Фрактония 3. Икосэдр-додекаэдр

Рис. 1.13. Три базовые основы возможных фрактальных топологий.

Докажем наше предположение, посредством рассмотрения геометрического построения этих пар в пространстве, как результат фрактального разворота, как во внешнее – центробежное, так и во внутреннее – центростремительное направления.

Действительно, если рассматривать принципы объемной фрактализации исходя из введенной в [3,6] модели конфигурации пространства, как фрактальной структуры последовательно вложенных друг в друга (по принципу «матрешки») сферических пространственно-временных оболочек, можно констатировать следующие утверждения:

- Четырехмерное «пространство-время» хорошо описывается комплекснозначными функциями комплексных аргументов, математический аппарат, который назван геометрическим полем пространственных частот (ГППЧ).[5…8]
- Уравнение геометрического поля пространственных частот [6] выведены на основе объемных кватернионных представлений, но базируются на строгом решении плоскостной задачи математических бильярдов в круге

Как следует из проведенных исследований и возможностей построения $2D$-фрактальных конфигураций, а так же первых подходов к осознанию законов формирования электронограмм и дифракционных свойств объемных кристаллических решеток [3,12,15], в качестве наиболее продуктивного математического аппарата, при построении физико-математической модели $3D$- фрактальных конструкций,

целесообразно использовать основные уравнения геометрического поля пространственных частот (ГППЧ), модифицированные в настоящем исследовании в уравнения (1.43…1.46).

Напомним, что основные уравнения геометрического поля пространственных частот выведены из рассмотрения модели анализа фокусирующих свойств оптической сферы и сферических оболочек [6… 8], при анализе комплексных отображений векторных величин в меридиональных и сагиттальных сечениях названных элементов.

Т.е. базовой основой явилось полное решение задачи математических бильярдов в круге с описанием комплексных отображений векторных траекторий в круге во всеобъемлющем пространстве внешнее и внутреннее по отношению к поверхности сечения сферы.

Однако еще в [6] отмечалось, что построение уравнений ГППЧ требует рассмотрения кватернионных гиперкомплексных систем. Однако, до углубленной проработки этих положений автор в тот период еще не был готов. В настоящем время рассмотрим и согласуем общие позиции, на которых предполагается строить физико-математическую модель гиперкомплексных $3D$ - фрактальных конфигураций.

Напомним, что развитие теории алгебр начинается с работы В. Гамильтона о кватернионах, напечатанной в 1843 году [31].

Однако алгебра кватернионов является алгеброй над полем действительных числе, т.е. величины $a_1, a_2 ... a_n$, являющиеся коэффициентами в выражении $a_1\dot{r}_1 + a_2\dot{r}_2 + ... + a_n\dot{r}_n$ для элементов n-мерной алгебры являются действительными числами.

При построении $3D$ - фрактальных конфигураций нам придется рассматривать $3D$ алгебры над полем комплексных чисел.

Однако, как показывает предварительный анализ эту математическую конструкцию необходимо будет еще более усложнять до алгебры над полем комплексных функционалов типа (1.43…1.46).

К этому выводу можно подойти с позиций анализа трансформации операций фрактального разворота с растяжением векторов в трех ортогональных сечениях $3D$ фрактоний.

В трехмерном представлении они перейдут в $3D$ конфигурации с дискретным растяжением и плавным преобразованием рациональных конфигураций в иррациональные. Они, в свою очередь, будут превращаться в рациональные и т.д. до бесконечности (Рис. 1.14.). При этом мы будем использовать внутренние произведения (для центростремительных направлений), и внешние произведения (для центробежных направлений).

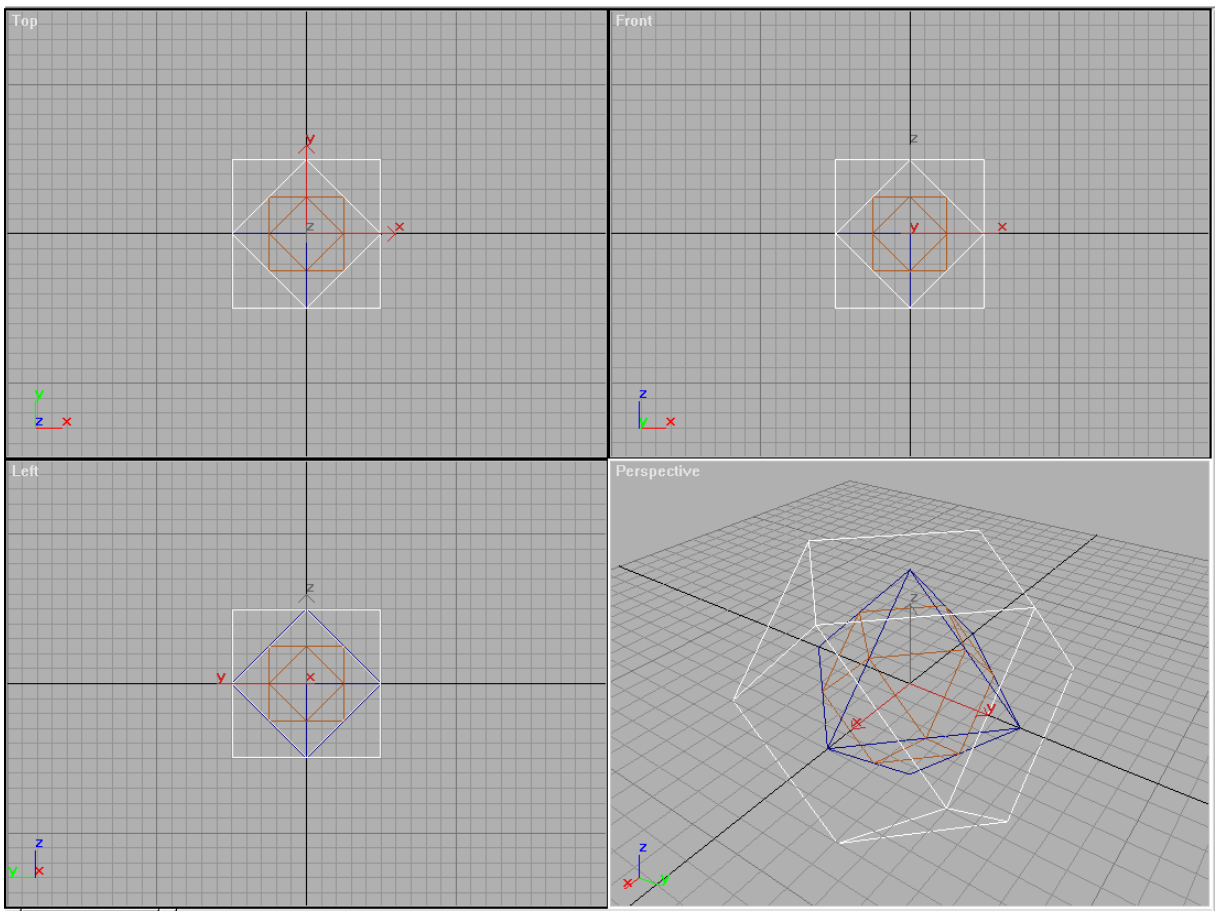


Рис. 1.14. Пример преобразования рациональных конфигураций в иррациональные путем фрактального разворота

Вероятнее всего, при построении $3D$- фрактальных конфигураций нам придется рассматривать $3D$ алгебры над полем комплексных чисел.

Как построить такие алгебры для фрактоний I и III класса (см. рис. 1.13 а и с) пока не ясно. Более понятно построение $3D$ алгебры матриц над полем комплексных чисел для конфигураций порождаемых II фрактонией. Как известно [31] для таких матриц порядка «n» размерность такой алгебры равна $4n^2$. В связи, с чем подойдем к построению $3D$- фрактальных конфигураций исходя из следующего предварительного анализа

- фрактальные конфигурации соответствующие кубической кристаллической сингонии или II фрактонии фрактальных структур, в своей основе содержат дробление пространства по принципу абсолютного куба [8], имеющего 13 осей симметрии. Как доказано в препринте [11] это число определяется выражением

$$N = \frac{\Gamma + P + B}{2} \qquad (1.58)$$

где Γ- число граней (6 шт.), определяющих направление координатных осей $3D$- пространства

P- число ребер (12 шт.)

B - число вершин (8 шт.)

- При этом оси, проходящие через грани абсолютного куба, в которые вписываются вершины октаэдра, с рациональными высотами будут определять направления фрактализации (клонирования) в пространстве рациональных компонент $3D$- фрактальных конфигураций

- А оси, проходящие через середины ребер в абсолютном кубе будут определять направления фрактализации (клонирования) в пространстве иррациональных компонент $3D$ - фрактальных конфигураций
- Особое значение при выводе законов построения $3D$ - фрактальных конфигураций будут играть 4 диагональных оси (8 направлений) проходящих через вершины абсолютного куба или точки пересечения биссектрис в серединах треугольных граней куба октаэдра.

На наш взгляд эти направления являются, если можно так выразиться, основными направлениями комплексных информационных осей.

Покажем это на примере рассмотрения определения кватернионов, - комплексных числа с делением, вида

$$a + bi + cj + dk \tag{1.59}$$

с известным законом умножения

$$\begin{aligned} &i^2 = -1, \cdots j^2 = -1, \cdots k^2 = -1 \\ &i \cdot j = k \qquad j \cdot i = -k \\ &j \cdot k = i \qquad k \cdot j = -i \\ &k \cdot i = j \qquad i \cdot k = -j \end{aligned} \tag{1.60}$$

который в виде мнемонического правила можно представить в виде изображения тремя точками окружности, расположенными по направлению движения часовой стрелки. При этом произведение любых двух числе из тройки i, j, k равно третьему, если движение от первого ко второму происходит по часовой стрелке, и равно третьему со знаком минус, если движение происходит против часовой стрелки.

Используемую мнемонику в представлении таблицы умножения кватернионов можно рассмотреть с позиции представления векторной части кватернионов в модели $3D$ - фрактальных структур.

Для чего, будем рассматривать тройку векторов i, j, k ориентированными соответственно по осям x, y и z (рис 1.15)

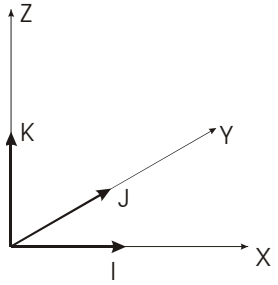
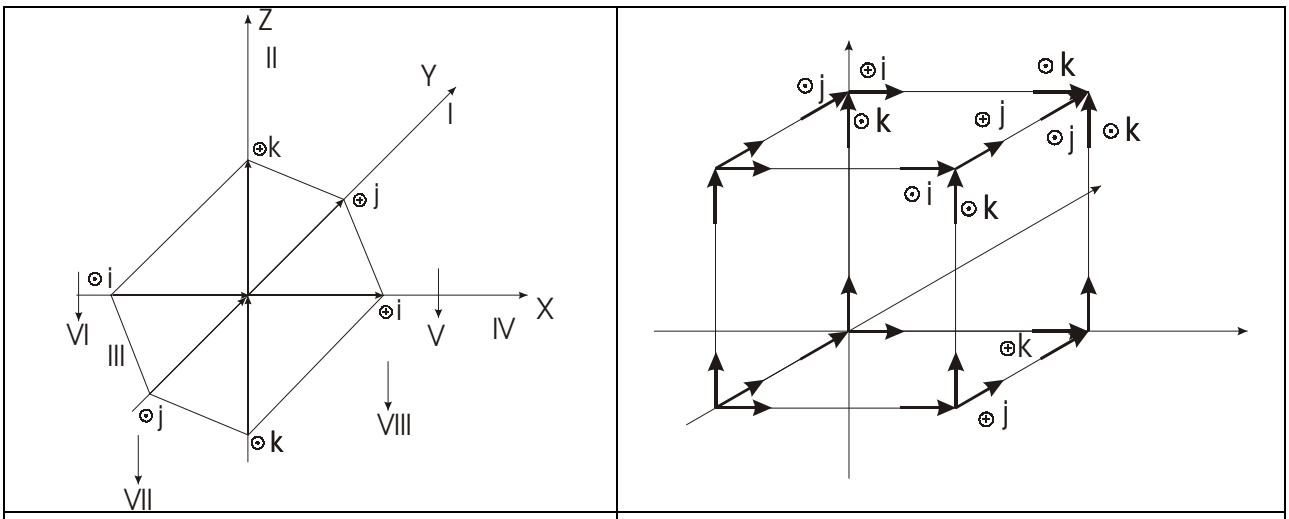


Рис 1.15. Ориентация мнимых векторов i, j, k по координатам пространства.

В этом случае в плоскостях треугольных граней кубооктаэдров можно эти тройки векторов представлять со знаком «+», если на вектор мы смотрим по положительному направлению ⊕ или со знаком «-», если вектор направлен на наблюдателя ⊙.

Для всех шестнадцати направлений наблюдения

- 8 направлений для центробежных отображений векторов
- 8 направлений для центростремительных направлений векторов i, j, k можно построить свои сочетания векторов. Пояснение вышеприведенных представлений можно показать на примере рис. 1.16 а и б.



а) Для центробежных отображений | б) для центростремительных представлений

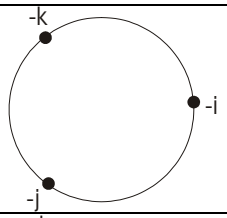
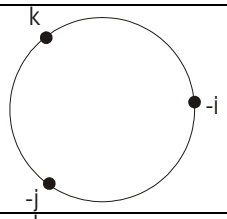
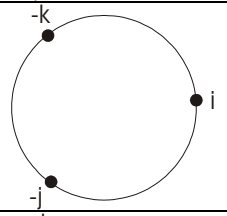
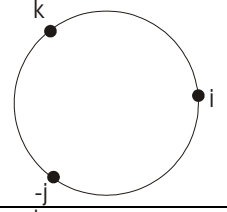
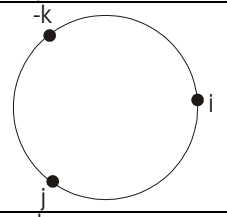
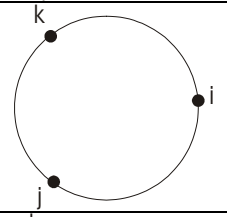
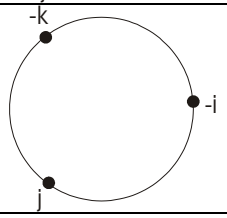
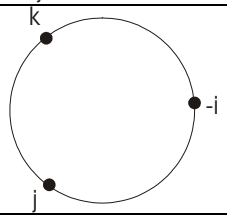
Рис. 1.16. Пояснение к центробежным и центростремительным отображениям векторов при построении алгебры над полем комплексных чисел.

В результате для центробежных представлений (фрактального разворота точки нуля) можно построить мнемоническую таблицу умножения для кватернионов в каждой из восьми частей пространства разбиваемого плоскостями zx, zy и xy на октанты.

Табл. 1.3.а. (для центробежного представления)

Номер октанта		Номер октанта	
I	k, i, j	V	-k, i, j
II	k, -i, j	VI	-k, -i, j
III	k, -i, -j	VII	-k, -i, -j
IV	k, i, -j	VIII	-k, i, -j

Табл. 1.3.б. (для центростремительного представления)

Номер октанта		Номер октанта	
I′		V′	
II′		VI′	
III′		VII′	
IV′		VII′	

Из анализа предложенной системы таблиц умножения кватернионов по октантам в центробежном и центростремительном направлениях легко просматривается следующая связь:

- в силу того, что нумерация октантов нами начинается с верхнего полупространства от октанта с положительными направлениями единичных векторов i, j, k против часовой стрелки с переходом в нижнее полупространство (октант V находиться под октантом I), то из табл 1.2. и табл 1.3 видно, что таблицы умножения будут идентичны для диагонально противоположных октанов.

Так таблице умножения в I октанте – центробежного будет соответствовать VII’ октанту для центростремительных направлений и т.д. (Табл. 1.4.)

Табл. 1.4.

октанты по центро-бежным направлениям	знак эквива-лентной таблицы умножения	октанты по центростре-мительным направлениям
I	⇔	VII′
II	⇔	VIII′
III	⇔	V′
IV	⇔	VI′
V	⇔	III′
VI	⇔	IV′
VII	⇔	I′
VIII	⇔	II′

Вероятнее всего, в конечном счете, минимизация векторных свойств (эквивалентность таблиц умножения) получается при описании конфигураций пространства векторной частью поликомплексных систем, т.е. при построении расширенной алгебры над полем комплексных чисел.

Однако в данном исследовании остановимся на кватернионных и октавных описаниях, с использованием четырех числовых систем (Табл. 1.2.) и модифицированных уравнений геометрического поля пространственных частот, выражения (1.43…1.46).

Напомним:

- Х. Грассман (1809-1877гг) [31] ввел понятие внешнего, а затем и внутреннего произведения для мультивекторов, тем самым наиболее близко подошел к созданию исчисления, позволяющего оперировать геометрическими величинами по правилам алгебры.
- У.К. Клиффорд (1845-1879) объединил эти две разные схемы в рамках единой алгебры, охватывающей и обычное векторное исчисление в пространстве трех измерений [30]. Конструкция такой алгебры предполагает, что заданы векторное пространство E_n размерности n над полем действительных чисел и квадратичная форма на E_n. Тогда внутреннее произведение $a \cdot b$ (или $b \cdot a$) двух векторов по определению есть значение симметричной билинейной формы, а внешнее произведение или бивектор $a \wedge b$ можно рассматривать как геометрический объект.

Если a и b неколлинеарные, то $a \wedge b$ представляет собой ориентированную плоскость, натянутую на векторы a и b.

Тогда Клиффордово произведение векторов a и b, при обозначении его просто в виде ab принимает вид:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \qquad (1.61)$$

где (в соответствии с [30]):

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \qquad (1.62)$$

и

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \qquad (1.63)$$

При построении математической модели $3D$ фрактальных структур нам необходимо базироваться на алгебре Клиффорда.

- Отображения системы связанных векторов во внешнее и внутреннее пространства базируются на фундаментальной триаде определения комплексной величины, а именно:
  - Комплексное число это вектор,
  - Комплексное число это координатная точка на комплексной плоскости, (геометрическое построение которой осуществляется параллельным переносом произвольного вектора в центр координат комплексной плоскости с отметкой координатной точки как вершины перенесенного вектора),
  - Комплексное число – это оператор поворота

Общее определение кватернионных форм предполагает операцию удвоения.

По аналогии с [1] , будем рассматривать алгебру кватернионов Q, образуемых из алгебры комплексных чисел $\overset{\circ}{C}$ некоммутативным удвоением:

$$Q = \overset{\circ}{C}_1 + \overset{\circ}{C}_{2.} \cdot i \qquad (1.64)$$

Процедура некоммутативного удвоения неоднозначна: можно выполнить удвоение также как:

$$Q = \overset{\circ}{C}_1 + i \cdot \overset{\circ}{C}_{2.} \qquad (1.65)$$

В первом случае будет получена система с правым законом умножения, $i \cdot j = \kappa$, а во втором - с левым законом умножения $i \cdot j = -\kappa$ (не путать $\kappa = \sqrt{-1}$ с k-коэффициентом фрактальности) (см. Табл. 1.3 и Табл. 1.4.).

Очевидно, что промоделированные в программе MathCad 2000 Professional уравнения (1.57), в этом случае, в 3D- гиперкомплексном виде примут вид:

$$Z_{R,G} = R \cdot \left(\frac{(2 \cdot \sin \frac{\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}})^d}{2} \cdot \left[Z_{xr(p,\overset{\Rightarrow}{k},d)} + j \cdot Z_{yr(p,\overset{\Rightarrow}{k},d)} \right] + i \cdot \frac{(2 \cdot \sin \frac{\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}})^d}{2} \cdot \left[Z_{xg(p,\overset{\Leftarrow}{k},d)} + j \cdot Z_{yg(p,\overset{\Leftarrow}{k},d)} \right] \right) \tag{1.66}$$

где:

$$Z_{x,r\left(p,\overset{\Rightarrow}{k},d\right)} = m_{x\left(\overset{\Rightarrow}{k},p\right)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \cdot p + \frac{d \cdot \pi}{2} - \frac{d \cdot \pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \right), \tag{1.67}$$

, (1.68)

$$Z_{y,r\left(p,\overset{\Rightarrow}{k},d\right)} = m_{y\left(\overset{\Rightarrow}{k},p\right)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \cdot p + \frac{d \cdot \pi}{2} - \frac{d \cdot \pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \right)$$

или в пространственно частотном представлении левая часть выражения (1.66), стоящая в квадратных скобках примет вид (1.69).

$$Z_{R\left(\overset{\Rightarrow}{k},t,d\right)} = m_{x,y\left(\overset{\Rightarrow}{k},t\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{\overset{\Rightarrow}{k} \cdot R \cdot Sin\ \pi / \overset{\Rightarrow}{k}} \cdot t + \frac{d \cdot \pi}{2} - \frac{d \cdot \pi}{\overset{\Rightarrow}{k}} \right) \tag{1.69}$$

Необходимость введения фазового сдвига, связанного с системой поворотов на углы $\varphi(d,\overset{\Rightarrow}{k}) = \frac{d \cdot \pi}{2} - \frac{d \cdot \pi}{\overset{\Rightarrow}{k}}$ в пространстве, можно понять из анализа Рис. 1.14 и из рассмотрения более детального вывода комплексной формы решения задачи математических бильярдов в круге, выполненного в [8}, (раздел 2.2, Рис 2.3)
А для правой части выражения (1.66) можно записать:

$$Z_{G\left(\overset{\Leftarrow}{k},p,d\right)} = m_{g\,x,y\left(\overset{\Leftarrow}{k},p\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}} \cdot p \right) - \exp\left(j \cdot \frac{2\pi}{\overset{\Leftarrow}{k}} \cdot p \right) \tag{1.70}$$

-фазовое представление

$$Z_{G\left(\overset{\Leftarrow}{k},t,d\right)} = m_{g\,x,y\left(\overset{\Leftarrow}{k}\,t\right)} \cdot \exp\left(j \cdot \frac{c \cdot \pi}{\overset{\Leftarrow}{k} \cdot R \cdot Sin\ \pi / \overset{\Leftarrow}{k}} \cdot t \right) - \exp\left(j \cdot \frac{\pi}{R \cdot Sin\ \pi / \overset{\Leftarrow}{k}} \cdot t \right) \tag{1.71}$$

-пространственно-частотное представление.
Без учета пространственных поворотов, формула (1.66), на основании уравнения (1.48) принимает минимально компактный символьный вид:

$$Z_{R,G}(k,t,d) = R \cdot \frac{\sqrt[2d]{2}}{2} \left(\vec{m}_{r(x,y)}(\overset{\Rightarrow}{k},t) \cdot \sqrt[\overset{\Rightarrow}{k}]{1} + \sqrt{-1} \cdot \overset{\leftarrow}{m}_{g(x,y)}(\overset{\Leftarrow}{k},t) \cdot \sqrt[\overset{\Leftarrow}{k}]{1} \right) \tag{1.72}$$

где:

- $\overrightarrow{m}_{r\,x,y}(k,p) = m_{x(k,p)} + i \cdot m_{y(k,p)}$ и
- $\overleftarrow{m}_{g\,x,y}(k,p) = m_{g\,x(k,p)} + i \cdot m_{g\,y(k,p)}$ (1.73)

Как видно, выведенные уравнения (2.9) и (2.15) представляют собой Клиффордово произведение комплекснозначных векторных функционалов, для которых:

- левая часть характеризует внутреннее произведение текущих векторов (бильярдного шара) $\overrightarrow{m}_{r(x,y)}(\overset{\Rightarrow}{k},t)\cdot\sqrt[\overset{\Rightarrow}{k}]{1}$, т.е. *k*-непараксиальных правосторонних векторов в круге - $\overrightarrow{m}_{r(x,y)}(\overset{\Rightarrow}{k},t)\cdot$ с *k*-векторами нормированного базиса, приведенного к центру круга $\sqrt[\overset{\Rightarrow}{k}]{1} = (\cos\frac{0+2\cdot\pi\cdot p}{k} + j\cdot\sin\frac{0+2\cdot\pi\cdot p}{k})$ и описывает Евклидову часть геометрического поля пространственных частот объекта пространства-времени - сферы.
- правая часть уравнения (2.9) характеризует внешнее произведение текущих левосторонних векторов (бильярдного шара) т.е. *k*-непараксиальных левосторонних векторов в круге $\overleftarrow{m}_{r(x,y)}(\overset{\Leftarrow}{k},t)$ с *k*-векторами нормированного базиса, приведенного к бесконечно удаленной точке вне круга $\sqrt[\overset{\Leftarrow}{k}]{1} = (\cos\frac{0+2\cdot\pi(k-1)\cdot p}{k} + j\cdot\sin\frac{0+2\cdot\pi\cdot p}{k})$ и описывает не Евклидову часть геометрического поля пространственных частот объекта пространства-времени - обобщенной сферы. В целом, уравнения (2.9) и (2.15) есть, соответственно – кватернионное и октавные описания (т.к. $\sqrt[2]{-1} = \pm i$) основного уравнения геометрического поля пространственных частот, то есть структурообразующего поля пространства-времени.

Заключение

В исследовании с элементарных позиций деления единичного отрезка точкой *C* и решения задачи математических бильярдов, последовательно вводятся 4 числовых структуры числового континуума:

-

Базовая Евклидова правосторонняя система вещественных чисел (от точки А к точке С - вправо)	Базовая не Евклидова левосторонняя дробно-рациональная гиперболическая система вещественных чисел
$\Re(\overset{\Rightarrow}{\kappa}) \in [-\infty,\ldots-\kappa,\ldots 0,\ldots\kappa,\ldots\infty]$	$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa}) \in [-0,\ldots-\frac{\kappa}{\kappa-1},\ldots\Theta,\ldots+\frac{\kappa}{\kappa-1},\ldots,0]$
$\overset{\Rightarrow}{\kappa} = k$	$\overset{\Leftarrow}{\kappa} = \frac{k}{k-1}$
Сопряженная не Евклидова правосторонняя дробно-рациональная гиперболическая система вещественных чисел	Сопряженная не Евклидова левосторонняя дробно-рациональная гиперболическая система вещественных чисел
$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa}) \in [-0,\ldots-\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots\Theta,\ldots\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots,+0]$	$\Re(\overset{\Leftarrow}{\kappa}) \in [0,\ldots+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots\Theta,\ldots-\frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2},\ldots,-0]$
$\overset{\Rightarrow}{\kappa}^{*} = -\frac{2\cdot k}{k-2}$	$\overset{\Leftarrow}{\kappa}^{*} = \frac{2\cdot\kappa}{\kappa-2}$

- а, так же, две базовые трансцендентные гиперболические функции – камплексные функционалы
- $\overrightarrow{m}_{r_{x,y}}(k,p) = m_{x(k,p)} + i \cdot m_{y(k,p)}$ и
- $\overleftarrow{m}_{g_{x,y}}(k,p) = m_{g_{x(k,p)}} + i \cdot m_{g_{y(k,p)}}$ (1.74)

и выводятся кватернионные формы решения 3D- задачи математических бильярдов и отображения траекторий, как во внешнее, так и во внутреннее пространство элементарного объекта пространства-сферы.

Тем самым доказан закон формирования базовых кватернионов, характеризующих все циклические процессы пространства-времени.

В исследовании, кроме того, найдены модельные представления по построению поличисловых гиперкомплексных систем, которые еще требуют дальнейших исследований.

Математический анализ и результаты 3D- моделирования в профессиональных программах автор готов изложить в устном докладе. В этом же докладе, будут изложены физические обоснования уравнений (1.43…1.46) и общей формы уравнения геометрического поля пространственных частот (1.66) в сравнении с известными физическими теориями:

- по сингулярной оптике (оптики вихрей) М. Бери [35],
- теорией пространственно-временного осциллятора О. Сундена [36],
- теорией и практикой создания композитных материалов с отрицательным показателем преломления (так называемых материалов с правой тройкой векторов E,H.k) В.Г. Веселаго и J. Pendry [16…24] и
- попыткой создания единой теории поля В. Косыевым [37]

В завершении хочу выразить свою признательность за помощь в исседованиях моему коллеге А.А. Ошарину.

Литература:

1. Каратаев Е. А. Внутреннее сопряжение кватернионов. http://karataev.nm.ru./intconj/index.html
2. Гальперин Г.А., Земляков А.Н. "Математические бильярды", М.: -"Наука", 1990, 287 с.
3. G.S.Melnikov "Gnosiology of fractality - fractal optics". Manuscript of Technical Program. SPIE′s International Symposiym “Optoelectronics′97 (Photonics West) 3010,p.80 (3010-11), // Proc. SPIE -1997.-Vol.3010, P.58-68.
4. Мельников Г.С.,Ларионов С.А.,Михеев П.А.,Цветков Е.А.// Изв.А.Н.,Серия физическая.М., 1995. т. 59, N 12. С.143..150.
5. Мельников Г.С., Ларионов С.А., Михеев П.А., Цветков Е.А."Способ создания временных задержек светового потока". Патент РФ N 2109257 G01 J 9/00, G02 B 27/14 по Заявке N 95114222/25 от 07. 08. 1995. Официальный Бюллетень Российского Агенства по Патентам и Товарным Знакам “Изобретения” N 11 (II ч), 2108694-2109417, стр.298-299, 20.04.1998г.; Патент N 2109257 зарегистрирован в Государственном реестре изобретений 20 апреля 1998 года.
6. Г.С. Мельников, К основам фрактальной оптики. А: Комплексное геометрическое поле, описывающее траектории действительных и мнимых лучей в оптической сфере. “Оптический журнал”, Рег.№ 13131 от 10.03.1999г. Г.С. Мельников, К основам фрактальной оптики. Б: Комплексное геометрическое поле двухслойной сферы. “Оптический журнал”, рег. № 13189 от 11.05.1999 г.
7. Г.С. Мельников. Фрактальная гносеология порядка и хаоса числового континуума и пространства-времени. В сб. Вероятностные идеи в науке и философии.

(Материалы региональной конференции с участием иностранных ученых), РИЦ НГУ, 2003, 32…34сс
8. Г.С. Мельников. Гиперкомплексные числа и фракталы пространства времени. Материалы на конкурс «За лучшую исследовательскую работу в области гиперкомплексных чисел (Тема 2)», 2003г.
9. М.М. Постников. Устойчивые многочлены. М., Наука, 1981г.
10. А.Т. Филиппов. Многоликий солитон., Из-во Наука, М.,1986г.
11. . Мельников Г.С. и др. Цифровая обработка сигналов на систолических процессорах /Под ред. Дубова Я.А. — Львов, 1991, 71 с. (Препринт НТЦ по высокопроизводительным вычислительным системам «Интеграл» № 9–91).
12. Г.С. Мельников, И.Н. Серов, А.В. Алексейцев Компьютерно-синтезированные голограммы на транспарантах Фонда Развития Новых Медицинских Технологий «AIRES» с графическими фрактальными рисунками высокой плотности. В сб. Аналитическое программирование информационно-обменных процессов активных биологических форм**.,** издано ФРНМТ “AIRES”**,** Санкт-Петербург 2001.
13. В.В. Никольский. Теория электромагнитного поля. Издание 3, Из-во «Высшая школа», М., 1964 г., 384 с.
14. И.А. Большаков, Л.С. Гуткин, Б.Р. Левин, Р.П. Стратанович. Математические основы современной радиоэлектроники. М., «Советское радио», 1968г., 206с.
15. Г.С. Мельников, А.А. Ошарин. Экспериментальное подтверждение выводов по физико-математическому моделированию решетчатых и шаровых упаковок пространства и моделированию уравнений геометрического поля пространственных частот. Материалы на конкурс “За лучшую исследовательскую работу в области гиперкомплексных чисел (Тема 4)”, 2003г.
16. В.Г.Веселаго. О свойствах веществ с одновременно отрицательными значениями диэлектрической (ε) и магнитной (μ) восприимчевостей; Физика Твердого Тела – Том 8, Выпуск №12, 1966г, стр. 3571.
17. В.Г.Веселаго. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ. Успехи Физических Наук, 1967г, том 92, Выпуск№3, стр. 517.
18. В.Г.Веселаго, М.В. Глушков, А.А. Рухадзе. Физика Твердого Тела – Том 8, Выпуск №24, 1966г.
19. В.Г.Веселаго, Е.Г. Рудашевский. Физика Твердого Тела - Том 8, 1968г, стр. 2862.
20. J.B.Pendry. Negative Refraction Makes a Perfect Lens. Physical Review Letters -- October 30, 2000 - Volume 85, Issue 18, pp. 3966-3969.
21. Pendry, J. B., Holden, A. J., Robbins, D. J. & Stewart, W. J. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47**,** 2075–2084 (1999).
22. Shelby, R. A., Smith, D. R. & Schultz, S. *Science* 292**,** 77–79 (2001).
23. Smith, D. R., Schurig, D. & Pendry, J. B. Some of the waves emitted or reflected Appl. Phys. Lett. 81**,** 2713–2715 (2002).
24. Chiyan Luo, Stiven G. Jonson, J.D. Joannopoulos, J.B. Pendry All-angle negative refraction without negative effective index. Physical Review B, Volume 65, 201104(R), May 2002, pp. 201104-1…201104-4
25. Лобачевский Н.И., Полное собрание сочинений т.1-5, М.,-Л., 1946-1951.
26. Нут Ю.Ю. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. М., 1961г.
27. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. , 2-изданиме ч. 1-2, 1976г.
28. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом. М., 1971г.
29. Математическая энциклопедия , т 1…5, Из-во «советская энциклопедия», М., 1977…1985г.г.
30. Г. Казанова. Векторная алгебра, Из-во “Мир”, М.,1979 г.,118с
31. И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. Гиперкомплексные числа. Из-во «Наука», ГРФМЛ, М., 1973г. 143с.

32. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. Из-во : “Наука”, ГРФМЛ, М.,1977г.
33. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Из-во : “Наука”, ГРФМЛ, М.,1970г
34. Каратаев Е.А. Сопряжения в гиперкомплексных алгебрах. М. 2002г. http://karataev.nm.ru/conj/index.html
35. Berry, Michael V. Geometry of phase and polarization singularities illustrated by edge diffraction and the tides Proceedings of SPIE Volume: 4403 , p.1…12 5/2001 Second International Conference on Singular Optics (Optical Vortices): Fundamentals and Applications.
36. О. Сунден. Пространственно-временной осциллятор как скрытый механизм в основании физики. Из-во СпбГУ, С.-Петербург, 1999г.
37. В. Косыев. Единая теория поля пространства и времени. И-во “Арабеск”, Н.Новгород, 2000г.