Научно-технический центр по высокопроизводительным
вычислительным системам «Интергал»

Цифровая обработка сигналов на систолических процессорах

Г.С. Мельников

Препринт № 9-91

Львов - 1991

1. Систолические структуры для анализа рекурентных последовательностей.

1.1. Дискретные пространственно-инвариантные преобразования в систолических числовых матрицах.

Традиционные методы пространственно-инвариантных преобразований изображений на видеомониторах с линейными развертывающими функциями по координатам x и y [1] как, оказалось, имеют дискретные аналоги в случае применения дискретных развертывающих функций, а также с успехом могут быть использованы для пространственно-инвариантных преобразований в систолических вычислительных структурах.

Автором в 1984 году в результате анализа Карданова движения было предложено для упрощенного и, кроме того, более точного описания пространственно-инвариантных преобразований: на видеомониторах с дискретными развертывающими функциями и в систолических матрицах ввести понятие некруговых тригонометрических функций и, как результат их дискретизации, ввести дискретные тригонометрические функции [2].

Основное понятие об этих функциях дают временные диаграммы рис. I.
Если по аналогии с гармоническими тригонометрическими функциями радиус-вектор перемещать против часовой стрелки не по окружности, а по правильному k-угольнику, вписанному (описанному) в нее, то проекции этого радиус-вектора на оси x и y во времени опишут ломаные (кусочно-линейные) функции, напоминающие Sin ωt и Cos ωt, но имеющие изломы в моменты времени, когда радиус-вектор достигает n-ой вершины k-угольников. Эти диаграммы соответствуют неким функциям. Введя обозначение этих функций

$f_1(k,\phi_0) = \sin_{k,\phi_0} \omega t$ и $f_2(k,\phi_0) = \cos_{k,\phi_0} \omega t$

и назвав их k-угольным синусом и k-угольным косинусом, по аналогии с Кардановым движением и описанием гипоциклического движения (см. рис. 2) были получены выражения:

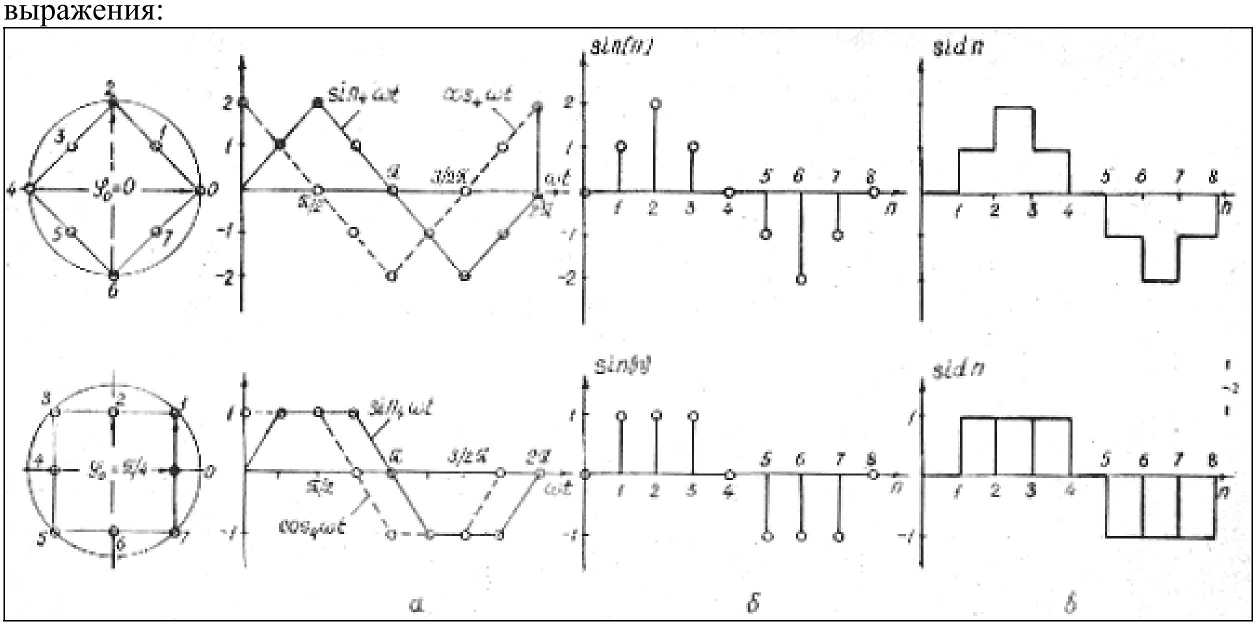


Рис. 1а. Некруговые тригонометрические функции (а) и тригонометрические функции дискретного времени (б) и (в) с k=4.

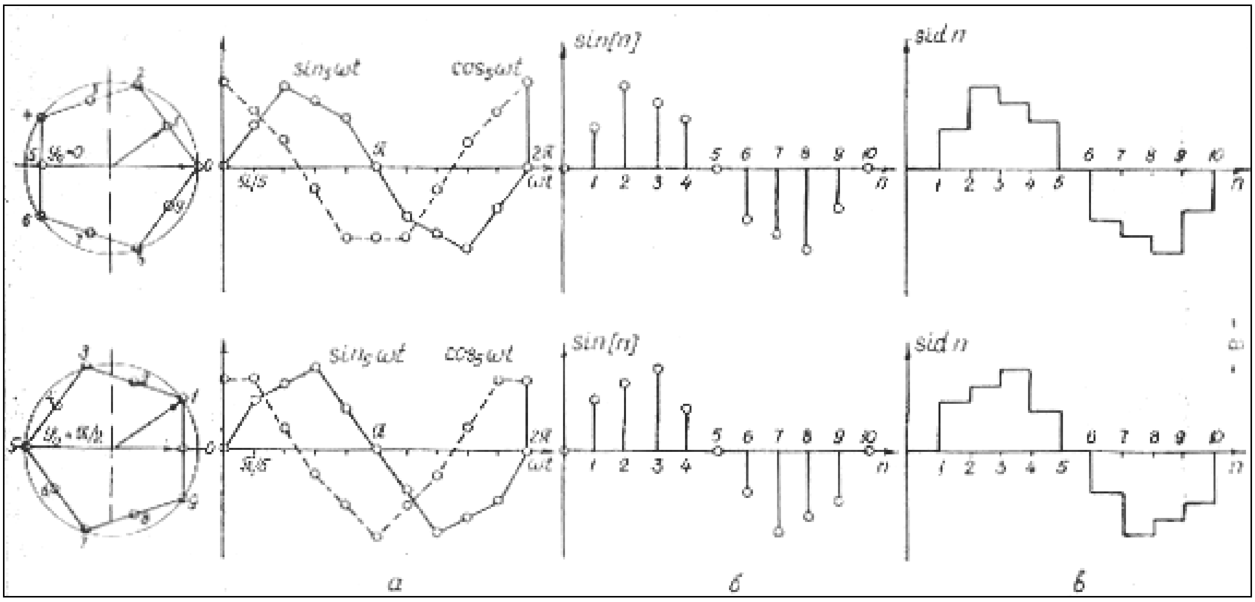
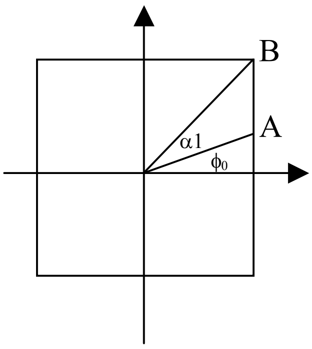


Рис. 1б. Некруговые тригонометрические функции (а) и тригонометрические функции дискретного времени (б) и (в) с k=5.

Рис.2



$$\alpha_k = \frac{2\pi}{k}; k, n, \varepsilon, a; 0 \le \phi_0 \le \frac{\pi}{k};$$

$$A((R\cos\frac{2\pi n}{k}+\phi_0);(R\sin\frac{2\pi n}{k}+\phi_0));$$

$$B((R\cos\frac{2\pi(n+1)}{k}+\phi_0);(R\sin\frac{2\pi(n+1)}{k}+\phi_0));$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_a}{x_b-x_a}=\dfrac{y-y_a}{y_b-y_a} \\ \dfrac{x}{\cos\omega t}=\dfrac{y}{\sin\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-R\cos(\frac{2\pi n}{k}+\phi_0)}{R\left[\cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{k}+\phi_0\right)-\cos\left(\frac{2\pi n}{k}+\phi_0\right)\right]}= \\ \dfrac{x}{\cos\omega t}=\dfrac{y}{\sin\omega t} \end{cases}$$

$$=\frac{y-R\sin\left(\frac{2\pi n}{k}+\phi_0\right)}{R\sin\cdot\left[n\left(\frac{2\pi(n+1)}{k}+\phi_0\right)\right]-R\sin\left(\frac{2\pi n}{k}+\phi_0\right)}\Rightarrow$$

$$x = R\frac{\cos\frac{\pi}{k}\cdot\cos\omega t}{\cos\left(\omega t-\frac{\pi(2n+1)}{k}-\phi_0\right)} \qquad y=R\frac{\sin\frac{\pi}{k}\cdot\sin\omega t}{\sin\left(\omega t-\frac{\pi(2n+1)}{k}-\phi_0\right)} \qquad (1)$$

и в окончательном виде:

$$Sin_{k,\phi_0}\omega t = \frac{\sin\dfrac{\pi}{k}}{\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi\,(2n+1)}{k} - \phi_0\right)}\sin\omega t \tag{2}$$

$$Cos_{k,\phi_0}\omega t = \frac{\cos\dfrac{\pi}{k}}{\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi\,(2n+1)}{k} - \phi_0\right)}\cos\omega t \tag{3}$$

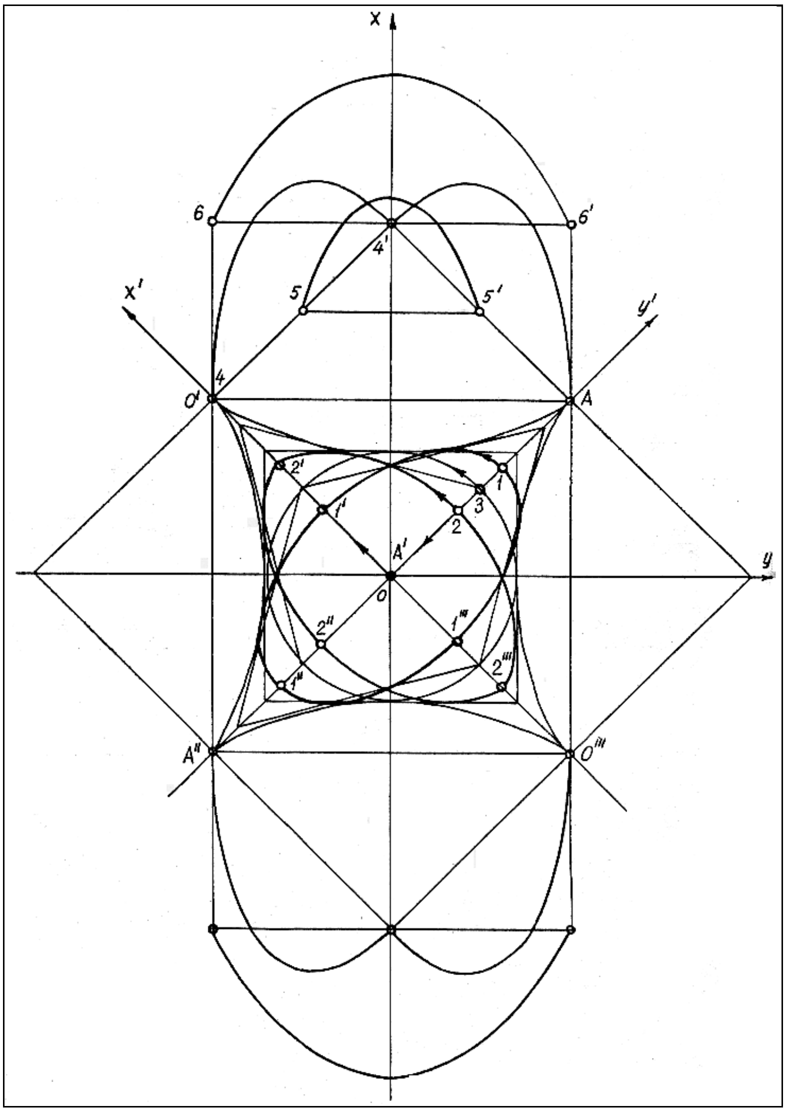


Рис 2. Траектории движения различных точек материального тела при Кардановом движении двух фиксированных точек 0 и А по осям x' и y'.

При этом n=0,1,2,…; $\phi_0 \in [0, \dfrac{\pi}{k}]$; k=3,4,5,…; $\omega t \in [\dfrac{2\pi n}{k} + \phi_0; \dfrac{2\pi\,(n+1)}{k} + \phi_0]$

Применяя методы временной дискретизации k-угольных тригонометрических функций в [2], были получены выражения для описания k-угольных дискретных

тригонометрических функций, которые мы обозначим $Sid_k\xi$ и $Cod_k\xi$ - синус дискретный и косинус дискретный.
Здесь ξ - дискретное время, $\xi\in\{N\}$, где N - целые действительные числа дуально бесконечной числовой оси.

Для $k = 4$ и $\phi_0 = \pi/4$

$$Sid_4\xi = \frac{Sin\frac{\pi\xi}{4}}{Sin\left[\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{2}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\xi-1}{2}-\frac{\xi-1}{2^{n+1}}\right)\right]} \tag{4}$$

$$Cod_4\xi = \frac{Cos\frac{\pi\xi}{4}}{Cos\left[\frac{\pi}{2}\frac{\xi}{2}-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\xi-1}{2}-\frac{\xi-1}{2^{n+1}}\right)\right]} \tag{5}$$

Как видно из рис. 1а (правый нижний график) $Sid_4\xi$, $Cod_4\xi \in\{-1,0,1\}$и представляют собой рекуррентные периодические последовательности. Действительно,

$Sid_4\xi = U_{-K},\ldots,U_0=0, U_1=1, U_2=1, U_3=1, U_4=0, U_5=-1, U_6=-1, U_7=-1, U_8=0,\ldots$ (6)
$Cod_4\xi = V_{-K},\ldots,V_0=1, V_1=1, V_2=0, V_3=-1, V_4=-1, V_5=-1, V_6=0, V_7=1, V_8=1,\ldots$ (7)

Уравнения (6) и (7) – восьмого порядка рекуррентности, т.к.
$U_{\xi+8}=0*U_{\xi+7}+0*U_{\xi+6}+0*U_{\xi+5}+\ldots+0*U_{\xi+1}+1*U_{\xi}$ (8)
$V_{\xi+8}=0*V_{\xi+7}+0*V_{\xi+6}+0*V_{\xi+5}+\ldots+0*V_{\xi+1}+1*V_{\xi}$ (9)

В результате дискретные тригонометрические функции при поэлементном умножении с другими рекуррентными полями и телами будут приводить к образованию новых функций или преобразованию старых. Так, например, в случае жесткой синхронизации опроса центрального элемента (пикселя) матрица памяти на кадр изображения с центральным элементом рекуррентной последовательности, формирующей дискретные развертывающие функции цифрового монитора, позволяют программировать пространственно-инвариантные преобразования цифрового телевизионного изображения (повороты на дискретные углы, кратные $\pi/4$, и сдвиги изображений по осям x и y) в соответствии с выражением:

$$\beta\,(\overset{v,p}{\underset{\xi}{X}}) \Rightarrow M_{n,k} = (n\pm v)Sid_4\xi + (k\pm\rho)Cod_4\xi \tag{10}$$

где n - ступенчатая развертывающая функция по оси *y* видеомонитора,
k - ступенчатая развертывающая функция по оси *x* видеомонитора,
v - сдвиг вдоль оси *y* видеомонитора,
ρ - сдвиг по оси *x* видеомонитора,
ξ - дискретное значение поворотов матричного изображения на углы, кратные $\frac{\pi}{4}:\phi = \frac{\pi\cdot\xi}{4}$

Здесь знак (+) для v, ρ , ξ соответствует ковариантному смещению по осям *x* и *y* и повороту против часовой стрелки, а знак (-) соответствует контравариантному смещению и повороту по часовой стрелке.

Введенные дискретные тригонометрические функции, реализуемые в двоичной избыточной системе, обладают большинством свойств гармонических тригонометрических функций. Различие между ними заключается только в том, что первые применимы к систолическим матричным преобразованиям, а последние действуют на всем континууме.

1.2. Рекуррентные последовательности в систолических вычислительных структурах.

Возможности построения систолических вычислителей [4, 5] с применением двоичной избыточной системы {-1,0,1}, [6] позволяют добиться существенного выигрыша в быстродействии выполнения арифметических и алгебраических операций, если проблемно-ориентированная вычислительная среда позволит выполнять на своих процессорных элементах (ячейках) операции параллельного сдвига, переноса и, хотя бы, параллельного поэлементного суммирования и вычитания, а, по возможности, умножения и деления по всему пространству систолического тела.

Под систолическим телом, также как в работах [4, 5, 6], будем подразумевать многомерную архитектуру параллельных вычислительных средств, отличающуюся следующими особенностями:

- каждый элемент входных данных одновременно используется для вычисления нескольких результатов при относительно небольшом объеме операций «ввода-вывода»
- высокая производительность достигается благодаря параллельному использованию значительного числа относительно простых процессорных элементов (ячеек)
- в каждой систолической матрице используется, как правило, один тип ячеек
- информационные и управляющие связи между ячейками систолической матрицы отличаются простотой и регулярностью.

Особыми требованиями к систолической структуре применительно к выполнению арифметических и алгебраических операций на рекуррентных последовательностях и полях являются следующие особенности:

- в общем виде, матричные структуры рассматриваются в виде трехмерных сеточных полей размером (2n+1) x (2k+1) x (2m+1) элементов
- матрица должна обеспечивать замещение информации в элементах $\pm n$, $\pm k$, $\pm m$ информацией, содержащейся в элементах $(n\pm1)$, $(k\pm1)$, $(m\pm1)$, включая строки и столбцы на краях матрицы. При этом пространственно-инвариантные преобразования систолических полей с угловой дискретностью π/q, . где q – коэффициент геометрической конфигурации или q - угольности элемента систолической матрицы, легко реализуется с помощью введения дискретного синуса $Sid_q t$ и дискретного косинуса $Cod_q t$, вводимых автором ниже [8] .

В данной работе описываются с общих позиций возвратные и рекуррентные последовательности применительно к систолическим матрицам. Существующая теория возвратных последовательностей [9] является обобщением понятий арифметической или геометрической прогрессии и, как частные случаи, охватывает степенные последовательности действительных и комплексных чисел, любые периодические последовательности, последовательности коэффициентов частного от деления двух многочленов, последовательности чисел Фибоначчи и т.д., направленных в одну сторону по числовой оси. Вводимые рекуррентные последовательности направлены как в область отрицательных чисел, так и область положительных чисел.

Запишем последовательности в виде:

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_k, \ldots$ или $\{U_k\}$ (11)

Если существует натуральное число ρ числа $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ (действительные или мнимые, причем $a_\rho \neq 0$) такие, что, начиная с некоторого номера Υ и для всех следующих номеров

$U_{k+\rho}=a_1U_{k+\rho-1}+a_2U_{k+\rho-2}+a_3U_{k+\rho-3}+\ldots+a_\rho U_k$, где $(k\geq\Upsilon\geq1)$, (12)

то последовательность (11) называется возвратной последовательностью, а соотношение (12) - возвратным уравнением определенного порядка [9]. Например, последовательность чисел Фибоначчи

$U_1=1, U_2=1, U_3=2, U_4=3, U_5=5, U_6=8, \ldots$ (13)

есть возвратная последовательность второго порядка, т.к.

$U_{k+2}=U_{k+1}+U_k$ (14)

Это уравнение справедливо для членов последовательности (13), начиная с номера ϒ = 3.

Наряду с последовательностью (13) известна последовательность (15), полученная путем продолжения последовательности (13) в противоположную сторону по оси действительных чисел [10]:

13,-8,5,-3,2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,... (15)

Для последовательности (15) возвратное уравнение (14) справедливо по всей области существования чисел Фибоначчи (без ограничения по номеру ϒ), если, например, числу 0 последовательности (15) присвоить номер индекса k = 0, т.е. перейти к последовательности

$\ldots U_{-k},U_{-k+1},U_{-k+2},\ldots,U_{-1}, U_0, U_1, U_2,\ldots, U_k,\ldots$ или $\{U_{\pm k}\}$ (16)

Для любых возвратных последовательностей типа (11) могут быть найдены их продолжения, т.е. дуально бесконечные последовательности типа (16).

Новым, в данной работе и работах [7, 8] является распространение известной теории возвратных последовательностей одного аргумента (определенного на положительной полуоси) на дуально бесконечные последовательности типа (16), вводимые в многомерные систолические матричные структуры. При этом последовательности

$\{U_{\pm n}\};\{U_{\pm k}\}$ и $\{U_{\pm m}\}$ (17)

рассматриваются применительно к строкам и столбцам одномерных матриц. Последовательности

$\{U_{\pm n, \pm k}\};\{U_{\pm m,\pm k}\}$ и $\{U_{\pm n,\pm m}\}$ (18)

рассматриваются на взаимно ортогональных плоскостях систолического тела. А последовательности

$\{U_{\pm n,\pm k,\pm m}\}$ (19)

где n - строки, k - столбцы, m - слои, рассматриваются в трехмерной систолической матрице.

В дальнейшем последовательности типа (16), (17), (18), (19) будем называть рекуррентными, если они удовлетворяют уравнению (12), а само уравнение (12) будем называть рекуррентным уравнением порядка ρ, справедливым во всей области существования

$n, k, m, \in \{-\infty, +\infty\}$.

Для рекуррентных последовательностей можно доказать основную теорему (доказательство опущено):

суперпозиция двух и более рекуррентных последовательностей (16), (17), (18), (19), сдвинутых друг относительно друга на любой интервал при использовании операций поэлементного сложения и вычитания, вновь образуемых матриц, снова приводит к рекуррентным последовательностям того же порядка по всем осям рекуррентности (об осях рекуррентности смотри [7]). При этом нулевые члены последовательностей могут перемещаться по систолическому пространству вновь образованной последовательности и даже могут принимать по абсолютной величине и знаку новые значения.

Действительно, поэлементное сложение и вычитание, например одномерных рекуррентных последовательностей Фибоначчи при сдвиге одной из них вправо (влево) на k элементов приводит к следующему:

Таблица 1.

	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
	…		13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	…
Σ			15	-9	6	-3	3	0	3	3	6	9	15	24	39	63	…
Δ	…		-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47	…

Как видно, суммирование сдвинутых на 4 элемента прогрессий приводит к получению исходной прогрессии, сдвинутой на 2 элемента и умноженной на коэффициент 3, а разность приводит к образованию новой прогрессии типа Фибоначчи с нулевым элементом равным I и сдвинутой вправо относительно исходной на I элемент. Таким способом может быть получено бесконечное число рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному уравнению (14).

Зададимся целью, навести структурную упорядоченность в основных рекуррентных последовательностях, проводя аналогию с известной теорией возвратных последовательностей [9] . Результаты сравнительного анализа сведены в таблицу 2.

Таблица 2.

Характе-ристика	Тип, поря док	Возвратные последовательности	Рекуррентные последовательности	Примечание
1	2	3	4	5
Название	1	1.1.1. Геометрическая прогрессия	1.1.2. Дуально бесконечная прогрессия	Используется для построения мультипликат. полей
Последов.		$U_1 = a$, $U_2 = aq$, $U_3 = aq^2$, $U_4 = aq^3$,…, $U_k = aq^{k-1}$	$U_{-\infty} = aq^{-\infty}$,…, $U_0 = aq^0$,…	
Уравнение		$U_{k+1}=qU_k$ Для всех $k \geq 2$	$U_{k+1} = qU_k$ $-\infty \leq k \leq \infty$	
Название	1	1.2.1. Возвратно-степенная последов.	1.2.2. Рекуррентно-степенная	Используется для построения мультипликат. полей
Вид		$U_1 = a, U_2 = a^q, U_3 = a^{q2}, \ldots$ $U_k = a^{q^{k-1}}, \ldots$	$U_{-\infty} = a^{q^{-\infty}}, \ldots$ $U_k = a^{q^{-k}}, \ldots$ $U_\infty = a^{q^\infty}, \ldots$	
Уравнение		$U_{k+1} = U_k^q, \ldots$	$U_{k+1} = U_k^q, \ldots$	
Название	2	2.1.1 Арифметическая последовательность	2.1.2. Рекуррентная арифмет. прогрессия	Является основной построения всех систолич. тел
Вид		$U_1 = a$, $U_2 = a+d$, $U_3=a+2d$,…, $U_k=a+(k+1)d$	…$U_{-k} = a - kd$,… $U_0 =a$,…, $U_1 = a + d$, …, $U_k = a + kd$,…	
Уравнение		$U_{k+2} = 2U_{k+1} - U_k$ $a_1 = 2$, $a_2 = -1$	$U_{k+2} = 2U_{k+1} - U_k$ Для всех $k \in \{-\infty;\infty\}$	

Название	2	2.2.1. Последоват. Фибоначчи	2.2.2. Рекуррент. последовательности Фибоначчи	Широко используются в природн. систолич. структурах, являются основой гармонии в природе, архитектуре, искусстве
Вид		$U_1 = 1$, $U_2 = 1$, $U_3 = 2$, $U_4 = 3$, $U_5 = 5,\ldots$ Для $U_k \geq 3$	$\ldots U_{-2} = 2c\text{-}b$, $U_{-1} = b\text{-}c$, $U_0 = c$, $U_1 = b$, $U_2 = c+b$, $U_3 = c+2b,\ldots$	
Уравнение		$U_{k+2} = U_{k+1} + U_k$ Для всех $k \geq 3$	$U_{k+2} = U_{k+1} + U_k$ Для всех $k \in \{-\infty;\infty\}$	
Название	3	3.1.1. Последоват. квадратов натур. чисел	3.1.2. Последоват. квадратов действ. чисел	Частный пример
Вид		$U_1 = 1^2$, $U_2 = 2^2$, $U_3 = 3^2$, $\ldots$, $U_k = k^2,\ldots$	$\ldots$, $U_k = (-k)^2$ $U_0=0,\ldots$, $U_k = k^2$	
Уравнение		$U_{k+3} = 3U_{k+2}\text{-}3U_{k+1}+U_k$ Для $k \geq 4$	$U_{k+3} = 3U_{k+2}\text{-}3U_{k+1}+U_k$ Для $k \in \{-\infty;\infty\}$	
Название	p	Возвратные последовательности высокого порядка	Рекуррентные последовательности высокого порядка	Общий вид справедливы для всех квадрантов; выводится из трех-мерных последовательностей $\{U_{\pm n, \pm k, \pm m}\}$
Вид		$\ldots$, U_1, U_2, $U_3,\ldots$, U_k, $\ldots$ или $\{U_k\}$	$U_{-\infty}\ldots$, U_{-k}, $\ldots$, U_{-1}, U_0, U_1, $\ldots$, U_k или $\{U_{\pm k}\}$	
Уравнение		$U_{k+p} = a_1U_{k+p-1}+$ $+a_2U_{k+p-2}+\ldots a_pU_k$ $(k \geq r \geq 1)$ начиная с $r = p+1$	$U_{k+p} = a_1U_{k+p-1}+$ $+a_2U_{k+p-2}+\ldots a_pU_k$ Для $k \in \{-\infty;\infty\}$	

Разумеется, что в таблице 2 приведены только основные примеры возвратных и рекуррентных последовательностей. Например, виды рекуррентных последовательностей второго порядка никак не ограничиваются арифметическими прогрессиями и последовательностями Фибоначчи. Этих видов бесконечное множество в зависимости от выбора коэффициентов a_1 и a_2, а множество самих последовательностей, кроме того, определяется начальными величинами a, b, c и d.

Однако, на примере арифметических прогрессий с целочисленными начальными членами покажем принципы перечисления всех возможных последовательностей данного вида и их особые свойства на систолических структурах. Например, выбрав разность d=3, и подставляя начальные члены от a = -6 до a = 6, по выражению $U_{a,k}=a+kd$, где d = const, построим таблицу 3.

Проанализируем таблицу 3 с точки зрения систолической архитектуры [6]. Числовая организация значений элементов в таблице 3 представляет собой двумерную конвейерную линейно-вычислительную среду. Действительно:

- элементы таблицы 3, $U_{a,k}$ являются двумерной рекуррентной последовательностью второго порядка, для которой можно записать рекуррентные уравнения по всем строкам, столбцам и диагоналям во всех направлениях, а именно:

$$U_{a+2,k+2} = 2U_{a+1,k+2} - U_{a,k+2} = 2U_{a+2,k+1} - U_{a+2,k} = 2U_{a+3,k+2} - U_{a+4,k+2} = 2U_{a+2,k+3} - U_{a+2,k+4} = \\ = 2U_{a+1,k+1} - U_{a,k} = 2U_{a+3,k+1} - U_{a+4,k} = 2U_{a+3,k+3} - U_{a+4,k+4} = 2U_{a+1,k+3} - U_{a,k+4} \qquad (20)$$

- последовательности числовых значений по a_i - строкам представляют собой периодически повторяющиеся со сдвигом на один элемент три возможных арифметических прогрессии с разностью d = 3
- последовательности числовых значений по k-ым столбцам представляют собой арифметические прогрессии с разностью d = 1 и сдвинуты друг относительно друга на 3 элемента, соответственно от центрального столбца (k = 0), вниз для столбцов, стоящих справа, и вверх для столбцов, стоящих слева
- последовательности числовых значений, расположенных по диагоналям, параллельным центральной диагонали, /a/ = /k/ представляют собой периодически повторяющиеся две возможные арифметические прогрессии с разностью d = 2
- последовательности числовых значений, расположенных по диагоналям, параллельным основной диагонали, a = k представляют собой периодически повторяющиеся, со сдвигом на один элемент, четыре из возможных арифметических прогрессий с разностью d = 4
- путем поэлементного суммирования числовых значений по столбцам, строкам и диагоналям систолической структуры можно получать параллельно все значения арифметических прогрессий с разностями d, кратными числам I, 2, 3, 4
- введение в систолическую архитектуру соответствующих коммутирующих звеньев, обеспечивающих параллельный сдвиг числовых значений по столбцам матрицы $U_{a,k}$ на число, равное числу строк между нулевыми элементами, выраженное простыми числами, обеспечивает возможность параллельного вычисления любых последовательностей типа арифметическая рекуррентная прогрессия.

В вычислительных системах, построенных по принципу последовательных вычислений (модель фон Неймана), и даже в суперкомпьютерах с макроуровневой организацией конвейерных вычислений в настоящее время достигнут предел быстродействия, равный 10^9 операций в секунду. Ограничение быстродействия происходит на самом нижнем уровне иерархической структуры вычислителей - в блоках арифметических и алгебраических вычислений. Это ограничение связано с длительностью выполнения друг за другом шагов итерационных вычислений элементарных функций. Дальнейшее существенное повышение быстродействия вычислительных систем связывается с развитием конвейерных методов обработки информации с наноуровневой организацией конвейерных вычислений [12, 4, 5, 6]. Авторы [6] отмечают, что все операторы машинной арифметики, начиная с умножения и деления и кончая вычислением дробно-рациональных выражений и трансцендентных функций, могут быть представлены в виде рекуррентных соотношений [6, стр.118], имея в виду существующую теорию возвратных последовательностей. Введение различения возвратных и рекуррентных последовательностей, выявление систолических свойств двумерных и трехмерных рекуррентных тел, выполненное автором настоящей статьи в ряде отчетов по научным работам, начиная с 1983 года, позволяет, надеется на непосредственную реализацию феноменологических закономерностей в многослойных рекуррентных полях в рамках автономных, частично автономных и неавтономных режимах работы вычислительных систем [6].

Принципы построения многослойных рекуррентных последовательностей линейного и нелинейного типов рассматриваются в работах [7, 8].

$$N_{n,k+2} = 2N_{n,k+1} - N_{n,k}$$

Таблица 3

-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	6
-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	23	5
-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	4
-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	21	3
-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	2
-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	19	1
-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	0
-19	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17	-1
-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	-2
-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	-3
-22	-19	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	-4
-23	-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	-5
-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	-6
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	

1.3. Алгоритмы и программы синтеза цифровых структур систолического анализа рекуррентных последовательностей.

Цикл статей [3, 7, 8, 13], позволил разработать методологию построения матричных вычислительных структур, в которых процесс вычисления осуществляется либо в момент записи в структуру дискретного рекуррентного функционала $U_{n,k,m,\dots}$ (где n,k,m,… индексы ортогональных координат), либо за счет систолических [4, 14] операции сдвиговой суперпозиции и поэлементных операций скалярного умножения и деления одной или нескольких матриц. Представление вычислительных структур, как фрагментов дуально-бесконечных матриц по любой из плоскостей n,k; k,m; n,m и т.д. обеспечивает возможность выполнения операций сдвиговой суперпозиции по всем направлениям матричной структуры. Разрабатываемая теория [3, 7, 8, 13] рекуррентных последовательностей с указанными выше арифметическими операциями приводит в результате к возможности вычисления многомерных векторных величин систолическими методами, минуя громоздкий аппарат последовательных матричных вычислений.

Для синтеза таких систолических структур авторами разработаны алгоритмы ввода и параллельных преобразований информации, на основании которых создана специализированная программа «SIST MAT».

Алгоритмы построения систолических матриц реализуется одним из двух способов:

- аналитическим заданием арифметических или комбинаторных выражений, описывающих структуру
- рекуррентным заданием в соответствии с рекуррентными уравнениями по строкам (столбцам) матрицы, (для линейных матриц) и пространственно-рекуррентными уравнениями (для нелинейных матриц), при соответствующих начальных и граничных условиях.

Алгоритмы вычисления основаны на параллельном сдвиге строк (столбцов, слоев), плоскостей или даже, в целом, n-мерных решеток, подвижной матрицы относительно неподвижной, при этом на каждом дискретном сдвиге осуществляется параллельные, поэлементные суммирования или вычитания численных значений записанных в каждом элементе матриц, либо выполняются параллельные, поэлементные операции скалярного умножения и деления.

При этом, для нелинейных матриц, на каждом последующем дискретном сдвиге к результатам предыдущих вычислений, в каждом из элементов неподвижной матрицы добавляются результаты арифметических скалярных вычислений найденных сумм (разностей) или произведении к новым значениям элементов подвижной матрицы в следующем позиционном положении.

Программа «SIST MAT» обеспечивает возможность фрагментарного сдвига подвижной матрицы относительно неподвижной (например, по полуплоскости влево и вправо от центрального столбца (строки) исходной матрицы).

Для наглядной демонстрации процессов систолического анализа и синтеза рекуррентных последовательностей в программе предусмотрена возможность цветового раскрашивания локальных фрагментов матриц на промежуточных и конечных результатах.

Оценка отказоустойчивости систолической вычислительной структуры может автоматически контролироваться путем периодического сравнения кодирующей функции [13] с предварительно заданным, вычисленным значением.

1.4. Рекуррентные методы автоматизации анализа, сжатия и синтеза систолических структур цифровой информации.

Как известно [15-17] , пропускная способность канала передачи информации
$I^* = N^* \log M$, (21)
где: N - максимальное количество отсчетов сигнала передаваемых в единицу времени
M - количество уровней квантования отсчетов.
Современные высококачественные каналы имеют пропускную способность I* порядка 10^7 … 10^8 бит/сек.

В то же время для передачи, например, черно-белого и цветного телевизионных (ТВ) изображений требуется количество отсчетов N = 512*512 ЭЛ и N=3*512*512 ЭЛ при M≥256, а для передачи аэрофотоизображений размером 40*40 $см^2$ с разрешением порядка 50 лин/мм $N = 40*40*(2*50*10)^2=16*10^8$ ЭЛ при M≥256.

Если для ТВ изображений время передачи кадра
$T = N/N^* \approx 0{,}01 \dots 0{,}1$ с,
то для аэрофотоизображений
$T = N/N^* \approx 100 \dots 1000$ с,
откуда видно, что ТВ изображения могут быть переданы в реальном времени, т.е. с телевизионной частотой кадров, 1/T = 25 Гц, а для передачи аэрофотоизображений по широкополосным каналам связи требуется время порядка единиц минут, т.е. для передачи в реальном времени требуется осуществлять сжатие информации.

Из формулы (21) следует, что для задач обработки изображений сжатие информации можно производить как за счет уменьшения N, так и за счет уменьшения M в исходном кадре.

При этом, несмотря на различие терминологии, и деталей технических решений, общие принципы сжатия изображений в технике связи и обработки изображений одинаковы.

До настоящего времени в качестве основных методов сжатия изображений использовались методы статистического кодирования и метод семантического сжатия [16].

Предлагаемый метод рекуррентного анализа, сжатия и синтеза информации по своему функциональному принципу ближе к методу статистического кодирования т.к. предполагает наличие кодера и декодера в отличие от метода семантического сжатия, в котором используется только кодер, т.е. осуществляется «прореживание» информации.

Но в то же время, как будет показано ниже, на n+1 шаге вычисления бесконечных разностей, в этом методе, кроме того, осуществляется и семантическое сжатие изображений.

Описываемый метод основывается на теоретико-числовых работах автора [3, 7] и заключается в том, что в качестве кодера используется устройство, обеспечивающее параллельное вычисление бесконечных разностей f_k-f_{k-1} соответствующих квантованных уровней яркости между соседними элементами изображения $F_{p,k}$. При этом для эффективного кодирования информации необходимо вычислить n+1 разность нормированной и центрированной функции яркости по строке "p" или столбцу "k", или диагоналям "d", исходного изображения $F_{p,k}$ (где n - максимальный порядок сглаженной рекуррентной функции [3], которой могут быть описаны функции яркости изображения по строке, столбцу или диагоналям).

В качестве декодера используются две систолические матричные структуры $P_{n,k}$ в которых организованы связи между соседними элементами по закону адекватному вычислению бесконечных разностей; только в качестве информации в элементах матричной структуры записаны не яркости элементов изображения $F_{p,k}$, не производные $\Delta F_{p,k}$, а значения числовой дуально-бесконечной матрицы, основанной на прямоугольных и косоугольных знакопеременных треугольниках Паскаля [7]. Восстановление «сжатого» изображения, также как и при кодировании осуществляется путем параллельных вычислений систолического сдвига одной матрицы Паскаля вдоль строки с номером n = -1 по второй (неподвижной) матрице. При этом, в каждом из положений сдвига осуществляется поэлементное суммирование числовых значений обеих матриц в пропорциях квантованных значений уровней яркости исходного изображения $F_{p,k}$ В «n+1»^{x} разностях - $\Delta^{(n+1)}F_{p,k} \equiv P_{n,k}^{-1}$ кодера.

Это функциональное описание метода требует кратких математических пояснений. Их суть в следующем: если имеется двумерное изображение $F_{p,k}=[f_{p,k}]$ с информационной емкостью I_f и требуется получить кодированное изображение $G_{p,k}=[g_{p,k}]$ - с меньшей информационной емкостью I_g (где $F_{p,k} = P_{(n,k)}$ дек $G_{p,k}$ и $I_g<I_f$) при этом $P_{(n,k)}$ декодера $\approx$P код$^{-1}$, то операции кодирования ($P_{\text{код}}$) и декодирования ($P_{\text{дек}}$) можно осуществить с использованием операций дискретного аналога дифференцирования и интегрирования с определенными предварительными подготовками «сжимаемой» функции $f_{p,k}$.

Из теории интерполяции известно, что аналогами первой производной являются разности первого порядка, например [17]

$\Delta y_i = y_{i+1}-y_i$ - правая разность (22)

$\Delta y_i = y_i-y_{i-1}$ - левая разность (23)

Аналогичным образом строятся разности второй и n- порядков, которые являются аналогами второй и «n»- й производных соответственно:

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1}-y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \tag{24}$$

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) \tag{25}$$

Если функцию яркости двумерного изображения $F_{p,k}$ (например по строке) предварительно центрировать, т.е. выбрав произвольный номер пикселя «k» за нулевой и вычесть значения яркости этого элемента из всех f_k данной строки p

$$\phi_{p,k} = f_{p,k}-f_{p,0} \tag{26}$$

произвести нормировку по начальному приращению центрированной функции $\phi_{p,k}$

$$\upsilon_{p,k} = \frac{f_{p,k} - f_{p,0}}{f_{p,1}} \tag{27}$$

и, далее, для новой функции яркости $\upsilon_{p,k}$, и, по всем элементам строки от -k/2 до +k/2 выполнить последовательно вычисление разностей, начиная от пикселя с k = 0, в следующем порядке:

- для элементов изображения от -k/2 до 0 вычислить левые разности (23)

- для элементов изображения от 0 до k/2 вычислить правые разности (22), размещая вычисленные значения разностей на строку ниже, под вычитаемым для левых разностей и под уменьшаемым для правых разностей, то получаем метод построения бесконечных разностей.

Действительно, при такой подготовке трехмерной функции $F_{p,k}$ (третьим измерением являются значения яркости изображения), мы получаем вычислительный аппарат, обеспечивающий возможность, как бесконечного интегрирования, так и бесконечного дифференцирования функций по их текущим значениям.

Кодированное изображение $G_{p,k}$ с минимальной информативностью I_g, получается на этапе построения разностей n+1 порядка.

Следует заметить, что от первой до «n»-й разности уменьшение информативности происходит за счет уменьшения информативных уровней квантования яркости M; на n+1 происходит как минимизация уровней яркости, так и скачкообразное уменьшение N в выражении (21). С последующим увеличением порядка разностей снова происходит увеличение как N, так и M с появлением чередующихся знакопеременных контрастов в значениях производных порядка $\geq \Delta^{n+2}$.

Используя метод индукции при последовательном построении разностей высших порядков по выражениям (24) и (25) можно убедиться, что коэффициенты при слагаемых для вычисления очередного элемента «n»-ой разности являются биноминальными коэффициентами Ньютона, и, следовательно

$$\Delta^m \upsilon_{p,k} = \sum_{q=m}^{m} \frac{(-1)^q c_m^q f_{p,k-q}}{f_{p,1}} \qquad (28)$$

т.е. кодер функции $F_{p,k}$ есть

$$P_{nk\_kod} \equiv (-1)^q c_{n+1}^k = (-1)^q \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)} \qquad (29)$$

где:

$$C_m^q = \frac{m!}{q!(m-q)!} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(m-q+1)} \qquad (30)$$

$\Gamma(\varphi)$- гамма функция

или, другими словами, кодер двумерной функции яркости изображения по строке (для описываемого метода кодирования) представляет собой знакопеременный косоугольный треугольник Паскаля (см. табл. 4). Транспонируя матрицу кодера $P_{n,k\_код}$ на 180° получаем матрицу декодера.

$$P_{n,k\_decod} = P_{n,k\_kod}{}^{-1} = \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} \qquad (31)$$

Выражения (28), (29), (30) и (3I) справедливы для аналитического описания индексных зависимостей при построении фрагментов «бесконечных» матриц кодера и декодера в первом квадранте.

Достройка систематических матриц кодера и декодера во II,III и IV квадрантах может быть выполнена либо по формулам (32) и (33) соответственно для I и II квадрантов декодера (32), для III и IV квадрантов декодера (33).

$$P_{n,k\_dekod} = (Sign k)^n \frac{(|k|+n-1)!}{n!(|k|-1)!} \qquad (32)$$

Таблица 4.

Таблица биноминальных коэффициентов

n l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	1												
1	1	1											
2	1	2	1										
3	1	3	3	1									
4	1	4	6	4	1								
5	1	5	10	10	5	1							
6	1	6	15	20	15	6	1						
7	1	7	21	35	35	21	7	1					
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
m l	C_m^0	C_m^1	C_m^2	C_m^3	C_m^4	C_m^5	C_m^6	C_m^7	C_m^8	C_m^9	C_m^{10}	C_m^{11}	C_m^m

Таблица 5.

Рекуррентные соотношения $P_{n,k}$ в правой полуплоскости (I, IV квадранты)

№	Рекуррентные соотношения для аддитивных матриц декодера $P_{n,k}$	Рекуррентные соотношения для мультипликативных матриц декодера
1	$P_{n,k} = P_{n+1,k} - P_{n+1,k-1}$	$p^{n,k} = p^{n+1,k} \big/ P_{n+1,k-1}$
2	$P_{n,k} = P_{n,k-1} + P_{n-1,k}$	$p^{n,k} = p^{n,k-1} p^{n-1,k}$
3	$P_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} P_{n-1,i}$	$p^{n,k} = \prod_{i=0}^{k} p^{n-1,i}$
4	$P_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} P_{j,k-1}$ для I-го квадранта	$p^{n,k} = \prod_{j=0}^{n} p^{j,k-1}$ для I-го квадранта
5	$P_{n,k} = P_{n-m-1,k} + \sum_{j=n-m}^{n} P_{j,k-1}$	$p^{n,k} = p^{n-m-1,k} \prod_{j=n-m}^{n} p^{j,k-1}$
6	$P_{n,k} = P_{n,m-1} + \sum_{j=m}^{k} P_{n-1,i}$	$p^{n,k} = p^{n,m-1} \prod_{j=m}^{k} p^{n-1,i}$
7	$P_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} P_{j,i}$ для I-го квадранта	$p^{m,k} = \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{k-1} p^{j,i}$ для I-го квадранта
8	$P_{0,k} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ при $\begin{matrix} k = 0 \\ k \neq 0 \end{matrix}$	$p^{0,k} = \begin{matrix} 1 \\ q \end{matrix}$ при $\begin{matrix} k = 0 \\ k \neq 0 \end{matrix}$ где q – основание системы исчисления
9	$P_{-1,k} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$ при $\begin{matrix} k = 1 \\ k = -1 \\ k \neq \pm 1 \end{matrix}$	$p^{-1,k} = \begin{matrix} q \\ -q \\ 0 \end{matrix}$ при $\begin{matrix} k = 1 \\ k = -1 \\ k \neq \mp 1 \end{matrix}$
10	$P_{n,0} = 0; -\infty < n < \infty$	$p^{n,0} = 1; -\infty < n < \infty$

Таблица 6.

Фрагмент аддитивной числовой дискретной полуплоскости Паскаля
n[-∞,∞], где n = 0, ± 1, ±2…, X_k[-∞,∞], где k = 0, 1, 2…, ΔX = 1

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	0	1	6	21	56	126	252	462	792
4	0	1	5	15	35	70	126	210	330
3	0	1	4	10	20	35	56	84	120
2	0	1	3	6	10	15	21	28	36
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
-3	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
-4	0	1	-3	3	-1	0	0	0	0
-5	0	1	-4	6	-4	1	0	0	0
-6	0	1	-5	10	-10	5	-1	0	0
-7	0	1	-6	15	-20	15	-6	1	0
-8	0	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1

Таблица 7.
Фрагмент мультипликативной плоскости Паскаля в общем виде

n \ k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	k \ n
5	a^{-462}	a^{-252}	a^{-126}	a^{-56}	a^{-21}	a^{-6}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{6}	a^{21}	a^{56}	a^{126}	a^{252}	5
4	a^{210}	a^{126}	a^{70}	a^{35}	a^{15}	a^{5}	a^{1}	a^{0}	a^{1}	a^{5}	a^{15}	a^{35}	a^{70}	a^{126}	4
3	a^{-84}	a^{-56}	a^{-35}	a^{-20}	a^{-10}	a^{-4}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{4}	a^{10}	a^{20}	a^{35}	a^{56}	3
2	a^{28}	a^{21}	a^{15}	a^{10}	a^{6}	a^{3}	a^{1}	a^{0}	a^{1}	a^{3}	a^{6}	a^{10}	a^{15}	a^{21}	2
1	a^{-7}	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{2}	a^{3}	a^{4}	a^{5}	a^{6}	1
0	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{0}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	a^{1}	0
-1	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	-1
-2	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{-1}	a^{1}	a^{0}	a^{1}	a^{-1}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	-2
-3	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{-1}	a^{2}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{-2}	a^{1}	a^{0}	a^{0}	a^{0}	-3
-4	a^{0}	a^{0}	a^{0}	a^{-1}	a^{3}	a^{-3}	a^{1}	a^{0}	a^{1}	a^{-3}	a^{3}	a^{-1}	a^{0}	a^{0}	-4
-5	a^{0}	a^{0}	a^{-1}	a^{4}	a^{-6}	a^{4}	a^{-1}	a^{0}	a^{1}	a^{-4}	a^{6}	a^{-4}	a^{1}	a^{0}	-5
-6	a^{0}	a^{-1}	a^{5}	a^{-10}	a^{10}	a^{-5}	a^{1}	a^{0}	a^{1}	a^{-5}	a^{10}	a^{-10}	a^{5}	a^{-1}	-6
n \ k	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	n \ k

Таблица 8.
Таблица чисел Эйлера (фрагмент дуально-бесконечной матрицы)

m \ k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
6	57	-302	302	-57	1	0	1	57	302	302	57	1	0
5	-1	26	66	26	-1	0	1	26	66	26	1	0	0
4	0	-1	11	-11	1	0	1	11	11	1	0	0	0
3	0	0	-1	4	-1	0	1	4	1	0	0	0	0
2	0	0	0	-1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
-1	-1/5	-1/4	-1/3	-1/2	-1	0	1	½	1/3	¼	1/5	1/6	1/7

$$P'_{n,k\_decod} = (-1)^{|k|}(signk)^n \sum_{q=0}^{|k|} (-1)^q C_{|n|}^q , \qquad (33)$$

где $C_{|n|}^q = \dfrac{|n|!}{q!(|n|-q)!}$, $0 \le q \le k$

либо использованием одного из описанных автором методов записи рекуррентных последовательностей в систолические структуры [7] .

Для записи числовой информации в декодер, существует большое число рекуррентных уравнений межэлементной связи (основные из них см. табл. 5, 1 столбец).

Вид фрагмента «бесконечной» матрицы декодера для интерполяционных разностных методов восстановления «сжатой» информации приведен в таблице 6.

Замечательной особенностью предлагаемого метода является тот факт, что помимо аддитивных операций систолической обработки, этот метод с успехом может быть применен для мультипликативного анализа и синтеза.

В этом случае в качестве операций интерполирования используются операции логарифмического дифференцирования и интегрирования. Для чего необходимо только выбрать основание системы позиционного исчисления и перенести матрицы кодера и декодера на область показателей, выбранной системы исчисления. Фрагмент бесконечной матрицы декодера с мультипликативным интерполированием на системе с двоичным логарифмическим основанием приведен в таблице 7, а аналоги выражений для описания мультипликативных рекуррентных связей, приведены в таблице 5, 2-й столбец.

Предложенные методы аддитивного и мультипликативного анализа и синтеза рекуррентных цифровых последовательностей соединяют в себе достоинства, как метода статистического кодирования, так и метода семантического сжатия.

На гладких рекуррентных последовательностях предельное сжатие теоретически может стремиться к бесконечности

$$\lim_{P,k\to\infty}[(k)_{\max} = 1f / I_g] \Rightarrow \infty$$

Например: для синтеза функции $f_k = K^c$, кодированная функция q_k представляет собой таблицу Эйлеровых чисел [19], при этом число информативных пикселов в строке систолической матрицы с номером i = n-1 занимает всего «c» элементов; все остальные элементы =0.

Оценка достижимой величины коэффициента сжатия “K” для реальных изображений требует аппаратурной проверки. Ясно, что дополнительная возможность сжатия имеется за счет выравнивания гистограмм интенсивностей изображений вдоль одного из 4^x выбранных направлений (строка, столбец и две диагонали).

В качестве относительного недостатка метода, обусловленного недостаточным развитием новой элементной базы можно назвать необходимость использования при построении аддитивных матриц элементов, работающих в двоичной избыточной системе [-1,0,1]. Однако этот недостаток устраняется при использовании систолических матриц, обеспечивающих мультипликативный анализ сжатия; и синтез функций. В этом случае потребуется элементная база обычной двоичной системы.

1.5. Трехмерные систолические тела действительных чисел

Как уже отмечалось в [3, 6], все операторы машинной арифметики, начиная с умножения и деления и заканчивая вычислением дробно-рациональных выражений и трансцендентных функций, жгут быть представлены в виде рекуррентных соотношений.

Задача настоящей работы показать, что для выполнения названных математических операций с использованием систолических вычислителей потребуется рекордно короткое, время по сравнению с принятыми в вычислительных системах третьего поколения методами последовательной итерации при отыскании искомых функций или значений математических констант.

Доказательство этого утверждения основано на том, что в многомерных рекуррентных последовательностях [3] уже заложено само вычисление большинства функций и значения математических постоянных. Другими словами, многомерные рекуррентные последовательности фактически являются вычислительными средами, и задача построения систолических структур наноуровня заключается в том, чтобы обеспечить быстрый ввод информации о заданном теле рекуррентных последовательностей в архитектуру вычислителя и из нужного элемента или группы элементов многомерной матрицы получить решение.

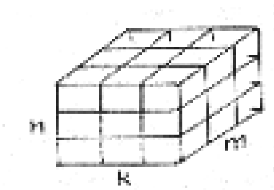
Вероятнее всего, что некоторые фундаментальные рекуррентные тела целесообразно вводить в систолические матрицы, работающие по принципу постоянных запоминающих устройств, те же, к которым специальный вычислитель обращается редко, могут храниться в ОЗУ или формироваться в систолической структуре в процессе вычисления.

1.5.1. Возможные информационные связи в трехмерных систолических структурах рекуррентных тел действительных чисел

Как известно из геометрии и кристаллографии [20, 21, 22], плотная упаковка пространства может быть осуществлена четырнадцатью способами, исходя из классификации разбиений пространства по типам решеток Браве. При этом, в качестве основных элементов ячеек, заполняющих пространство без пропуска, используются правильные многогранники: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Последние два используются только в решетках четырехмерного пространства [21, С.149]. С другой стороны, в технике построения однородных вычислительных сред конвейерного типа в настоящее время используются конфигурации элементарных ячеек типа: линейчатые, прямоугольные, ромбовидные, шестиугольные, треугольные и кубические. Поэтому, не нарушая общности изложения принципов вычисления всех возможных информационных связей в многомерных систолических структурах, ограничимся рассмотрением решетчатых тел с кубическими элементарными ячейками в трехмерном пространстве.

Применительно к телам рекуррентных последовательностей $\{U_{\pm n,\pm k,\pm m}\}$ необходимо рассматривать локальный участок пространства с центрированными элементами, т.к. общие требования, изложенные в [3], заключается в том, чтобы размер систолической матрицы был равен $(2n+1)\times(2k+1)\times(2m+1)$.

Элементарный локальный объем систолического тела с кубическими элементами представлен на рис. 3.



n – индекс строк
k – индекс столбцов
m – индекс слоев

Рис.3. Элементарный локальный объем систолического тела с кубическими элементами.

Размер элементарного локального объема систолического тела связан с порядком P_0 следующим соотношением

$N = n\times k\times m = (p_0+1)^3$. (34)

где p_0 - порядок рекуррентных последовательностей, записанных в строки (столбцы, слои), ориентированные вдоль индексных осей.

Для того, чтобы не были нарушены информационные связи в однородном рекуррентном теле второго порядка, в соответствии с (34) необходимо рассматривать локальный объем

N≥3×3×3 = 27 ЭЛ.

В этом локальном объеме центральный элемент $u_{n,k,m}$ взаимодействует с 26-ю соседними элементами. Соответственно прямые информационные связи этого элемента с соседними элементами осуществляются через 6 граней, 12 ребер и 8 вершин элементарной кубической ячейки вдоль одномерных матриц (столбцов, строк и диагональных строк). Эти одномерные матрицы-строки, проходящие через центральный нулевой элемент, назовем осями рекуррентного порядка систолического тела. Как видно, число, этих осей

$$A = \frac{T+F+R}{2} = \frac{8+6+12}{2} = 13 \qquad (35).$$

где A - число осей.
T - число вершин
F - число граней
R - число ребер элементарной ячейки.

Из них 3 взаимно-ортогональные оси n, k , m, проходящие через центры граней нулевого элемента являются индексными осями систолической трехмерной матрицы. С их помощью осуществляется однозначное определение координат любого элемента систолического тела. Это оси низшего порядка рекуррентности ($p_0 \equiv f(n), f(k), f(m)$).

Для 6 диагональных плоскостных осей - по две взаимно-ортогональных оси в каждой из плоскостей nk, nm, km слоев m=0, k=0, n=0 соответственно - порядок рекуррентности $p_П \equiv f(n,k), f(n,m), f(k,m)$.

$p_П = p_0+1$ (36)

если общие выражения числовых зависимостей в элементах этих плоскостей пропорциональны произведениям индексов.

Для 4 диагональных телесных осей, проходящих по главным диагоналям центрального элемента с точками выхода в его вершинах, порядок $p_T \equiv f(n,k,m)$ определяется:

$P_T=P_0+2$ (37)

если в плоскостях n, к при m = 0,
n, m при k = 0,
k, m при n = 0
функциональная зависимость числовых значений пропорциональна произведению индексных элементов.

По принципу индукции рекуррентный порядок диагональных осей систолических тел произвольной мерности η может быть определен по формуле

$P_\eta=P_0+\eta-1$ (38)

с указанными выше ограничениями.

1.5.2. Линейные рекуррентные тела действительных чисел.

Выведем рекуррентные уравнения, справедливые для двух- и трехмерных матриц на примере арифметических прогрессий. Как известно, выражение для общего члена арифметических прогрессий вида

... ,U_{-k}=a-kd,...,U_0=a,...,U_k=a+kd,...   (39)

при их записи в трехмерное систолическое тело может быть получено путем перебора индексных элементов в соответствии с одним из 192 выражений, определяющих структуру тела выбранной арифметической прогрессии (см. табл. 9).

Таблица 9

		I	II	III	IV
1	1	n+k*m	n+m*k	n-k*m	n-m*k
	2	k+n*m	k+m*n	k-n*m	k-m*n
	3	m+k*n	m+k*n	m-n*k	m-k*n
2	1	-n+k*m	-n+m*k	-n-k*m	-n-m*k
	2	-k+n*m	-k+m*n	-k-n*m	-k-m*n
	3	-m+n*k	-m+k*n	-m-n*k	-m-k*n
3	1	n+k*1/m	n+m*1/k	n-k*1/m	n-m*1/k
	2	k+n*1/m	k+m*1/n	k-n*1/m	k-m*1/n
	3	m+n*1/k	m+k*1/n	m-n*1/k	m-k*1/n
4	1	-n+k*1/m	-n+m*1/k	-n-k*1/m	-n-m*1/k
	2	-k+n*1/m	-k+m*1/n	-k-n*1/m	-k-m*1/n
	3	-m+n*1/k	-m+k*1/n	-m-n*1/k	-m-k*1/n
5	1	n+1/k*m	n+1/m*k	n-1/k*m	n-1/m*k
	2	k+1/n*m	k+1/m*n	k-1/n*m	k-1/m*n
	3	m+1/n*k	m+1/k*n	m-1/n*k	m-1/k*n
6	1	-n+1/k*m	-n+1/m*k	-n-1/k*m	-n-1/m*k
	2	-k+1/n*m	-k+1/m*n	-k-1/n*m	-k-1/m*n
	3	-m+1/n*k	-m+1/k*n	-m-1/n*k	-m-1/k*n
7	1	n+1/k*1/m	n+1/m*1/k	n-1/k*1/m	n-1/m*1/k
	2	k+1/n*1/m	k+1/m*1/n	k-1/n*1/m	k-1/m*1/n
	3	m+1/n*1/k	m+1/k*1/n	m-1/n*1/k	m-1/k*1/n
8	1	-n+1/k*1/m	-n+1/m*1/k	-n-1/k*1/m	-n-1/m*1/k
	2	-k+1/n*1/m	-k+1/m*1/n	-k-1/n*1/m	-k-1/m*1/n
	3	-m+1/n*1/k	-m+/1k*1/n	-m-1/n*1/k	-m-1/k*1/n
9	1	1/n+k*m	1/n+m*k	1/n-k*m	1/n-m*k
	2	1/k+k*m	1/k+m*n	1/k-n*m	1/k-m*n
	3	1/m+n*k	1/m+k*n	1/m-n*k	1/m-k*n
10	1	-1/n+k*m	-1/n+m*k	-1/n-k*m	-1/n-m*k
	2	-1/k+n*m	-1/k+m*n	-1/k-n*m	-1/k-m*n
	3	-1/m+n*k	-1/m+k*n	-1/m-n*k	-1/m-k*n
11	1	1/n+1/k*m	1/n+1/m*k	1/n-1/k*m	1/n-1/m*k
	2	1/k+1/n*m	1/k+1/m*n	1/k-1/n*m	1/k-1/m*n
	3	1/m+1/n*k	1/m+1/k*n	1/m-1/n*k	1/m-1/k*n
12	1	-1/n+1/k*m	-1/n+1/m*k	-1/n-1/k*m	-1/n-1/m*k
	2	-1/k+1/n*m	-1/k+1/m*n	-1/k-1/n*m	-1/k-1/m*n
	3	-1/m+1/n*k	-1/m+1/k*n	-1/m-1/n*k	-1/m-1/k*n
13	1	1/n+k*1/m	1/n+m*1/k	1/n-k*1/m	1/n-m*1/k
	2	1/k+n*1/m	1/k+m*1/n	1/k-n*1/m	1/k-m*1/n
	3	1/m+n*1/k	1/m+k*1/n	1/m-n*1/k	1/m-k*1/n

14	1	-1/n+k*1/m	-1/n+m*1/k	-1/n-k*1/m	-1/n-m*1/k
	2	-1/k+n*1/m	-1/k+m*1/n	-1/k-n*1/m	-1/k-m*1/n
	3	-1/m+n*1/k	-1/m+k*1/n	-1/m-n*1/k	-1/m-k*1/n
15	1	1/n+1/k*1/m	1/n+1/m*1/k	1/n-1/k*1/m	1/n-1/m*1/k
	2	1/k+1/n*1/m	1/k+1/m*1/n	1/k-1/n*1/m	1/k-1/m*1/n
	3	1/m+1/n*1/k	1/m+1/k*1/n	1/m-1/n*1/k	1/m-1/k*1/n
16	1	-1/n+1/k*1/m	-1/n+1/m*1/k	-1/n-1/k*1/m	-1/n-1/m*1/k
	2	-1/k+1/n*1/m	-1/k+1/m*1/n	-1/k-1/n*1/m	-1/k-1/m*1/n
	3	-1/m+1/n*1/k	-1/m+1/k*1/n	-1/m-1/n*1/k	-1/m-1/k*1/n

В таблице 9 классификация проводится в соответствии с обозначениями
I и II - тела арифметических прогрессий,
III и IV - тела арифметических прогрессий.

Арабскими цифрами 1...16 и подстрочными арабскими цифрами 1,2,3 обозначаются группы и отдельные прогрессии, отличающиеся арифметическими операциями и зависимостью общих членов от индексных координат (прямые и обратные зависимости).

Из всех тел арифметических прогрессий с целочисленными значениями начальных членов разностей и коэффициентов можно выделить только группы I.I.I…IV.2.3 (всего 12) Остальные рекуррентные тела являются телами дробно-рациональных чисел. Особое место занимают тела I.15.I…IV.16.3. Они, хотя и имеют выражения, подобные выражениям для общих членов арифметических прогрессий и регрессий на самом деле уже не являются рекуррентными телами, т.к. в соответствии с [8, стр. 46] последовательности вида

$$\{U_k\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}$$

не являются возвратными, т.е. указанные тела являются телами вырожденных прогрессий и регрессий.

Исходя из рекуррентных уравнений, для арифметических прогрессии одномерной систолической структуры выводятся рекуррентные уравнения для двух- и трехмерных систолических матриц.

$U_{k+2} = 2U_{k+1} - U_k$ - в сторону возрастания индексов,
$U_k = 2U_{k+1} - U_{k+2}$ - в сторону убывания индексов.

Общее выражение для двухмерной матрицы имеет вид:

$$U_{n+2,k+2} = U_{n+1,k+2} + U_{n+2,k+1} - (1/2)(U_{n+2,k} + U_{n,k+2}) \qquad (40)$$

Для трехмерной матрицы:

$$U_{n+2,k+2,m+2} = (2/3)(U_{n+1,k+2,m+2} + U_{n+2,k+1,m+2} + U_{n+2,k+2,m+1}) -$$
$$-(1/3)(U_{n,k+2,m+2} + U_{n+2,k,m+2} + U_{n+2,k+2,m}) \qquad (41)$$

Локальные фрагменты числового тела арифметической прогрессии типа I.I.I (табл. 9) по слоям в плоскостях n, k при m= -1,0,1,2 приведены в таблицах [10, 11, 12, 13], а в плоскости m, k при n=0 - в таблице 14.

Приведенные двухмерные систолические матрицы могут быть построены одним из трех способов:

1) если систолическая структура содержит в себе элементарные вычислители, обеспечивающие операции сложения и умножения индексов, определяющих координатное положение ее элементов, то трехмерные тела рекуррентных арифметических прогрессий могут быть получены прямым вычислением по выражениям табл. 9;
2) запись прогрессий может быть осуществлена в соответствии с выражениями. (40), (41) при соответствующих заданных начальных условиях для нулевых строк, при этом систолическая архитектура вычислителя должна обеспечивать операции суммирования числовых значений соседних элементов и умножения полученных значений на простые дроби:

Таблица 10

	m = -1												5-n
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0		5
	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1		4
	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2		3
	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3		2
	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		1
U=	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		0
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6		-1
	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7		-2
	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8		-3
	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		-4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		-5
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		

Таблица 11

	m = 0												5-n
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5		5
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4		4
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		3
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		2
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1
U =	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1		-1
	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2		-2
	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3		-3
	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4		-4
	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5		-5
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		

Таблица 12

	m = 1											5-n
	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		5
	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8		4
	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7		3
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6		2
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		1
U =	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4		0
	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3		-1
	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2		-2
	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1		-3
	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0		-4
	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1		-5
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		

Таблица 13

	m = 2											5-n
	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12	14		5
	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13		4
	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12		3
	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11		2
	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10		1
U =	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9		0
	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8		-1
	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7		-2
	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6		-3
	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5		-4
	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4		-5
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		

Таблица 14

	n = 0												5-p
	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	20	25		5
	-20	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16	20		4
	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15		3
	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10		2
	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		1
U =	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5		-1
	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10		-2
	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15		-3
	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20		-4
	25	20	15	10	5	0	-5	-10	-15	-20	-25		-5
k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		

Таблица 15

Фрагмент фундаментальной числовой плоскости Паскаля. n[-∞;+∞], Xk[-∞;+∞]; Δx=1

n Xk	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	Xk n
3	-84	-56	-35	-20	-10	-4	-1	0	1	4	10	20	35	56	84	3
2	28	21	15	10	6	3	1	0	1	3	6	10	15	21	28	2
1	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
-2	0	0	0	0	0	-1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	-2
-3	0	0	0	0	-1	2	-1	0	1	-2	0	0	0	0	0	-3
-4	0	0	0	-1	3	-3	1	0	1	-3	3	-1	0	0	0	-4
-5	0	0	-1	4	-6	4	-1	0	1	-4	6	-4	1	0	0	-5
n Xk	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	Xk n

3) наиболее перспективным с точки зрения простоты организации архитектуры систолических вычислителей является способ, при котором запись центрированной арифметической прогрессии со знаменателем d=1 в начальные столбцы слоев k = 0 и m = 0 осуществляется с одновременным бессдвиговым переносом вдоль всех столбцов этих слоев; далее осуществляется перенос этой информации со сдвигами, равными mk по всем оставшимся столбцам систолической структуры; направление сдвига относительно координаты n определяется знаком произведения mk и совпадает с положительным направлением n при отрицательных значениях mk и противоположно в случае положительных значений mk. Другими словами, операция сдвига столбца (строки) в теле рекуррентных арифметических прогрессий и регрессий эквивалентно умножению (делению), взятому с обратным знаком.

Действительно, плоскость mk, при n=0 (см. табл. 14) является дуально-бесконечной плоскостью Пифагора (таблица умножения).

1.6. Нелинейные рекуррентные тела действительных чисел

Если рекуррентные уравнения последовательностей записываемых вдоль индексных осей координат, имеют порядок выше 2 или не совпадают во всех направлениях, то получаются систолические тела с нелинейной организацией вычислений. Так, например, задавшись рекуррентным уравнением, справедливым в плоскостях nk при m = const вида

$$U_{n,k} = U_{n+1,k} - U_{n+1,k-1} \qquad (42)$$

для полуплоскостей с положительными значениями индексов k , и

$$U_{n,k} = U_{n+1,k+1} - U_{n+1,k} \qquad (43)$$

для полуплоскостей с отрицательными значениями индексов k, а в плоскостях mk при n = const уравнением

$$U_{n,k,m} = kU_{m-1,k} + (m-k+1)U_{n,m-1,k-1} \qquad (44)$$

при соответствующих начальных условиях, приходим к построению фундаментального нелинейного рекуррентного тела действительных чисел, у которого плоскости nk при m = 0;1 являются прямоугольной таблицей Паскаля на дуально-бесконечных плоскостях (известен треугольник Паскаля для n и k - положительных), а в плоскости mk при n = -1 таблицей чисел Эйлера [19], справедливой на всей дуально-бесконечной плоскости. Фрагменты этих плоскостей приведены в таблице 15. Это тело является универсальным телом, обеспечивающим задачи анализа и синтеза большого числа гладких функций.

Автором выведен ряд формул и теорем по рекуррентным соотношениям и функциональным зависимостям в данном теле действительных чисел.

1.7. Трехмерные систолические тела комплексных чисел

Цикл статей, опубликованных в докладах автора на I Всесоюзной конференции по однородным вычислительным средам и систолическим структурам в апреле 1990 г. [3,7,8] позволил распространить принципы систолического вычисления арифметических функций и математических констант на тела комплексных чисел. Смысл систолических вычислений на трехмерных однородных вычислительных средах без применения аппарата векторного анализа и синтеза основан на том, что трехмерная индексная матрица сама по себе является векторной трехмерной вычислительной структурой. Пространственное положение каждого элемента (ячейки) такой матрицы однозначно определяется тремя значениями индексов n, k и m, отсчитываемых по одной из трех взаимноортогональных координат, центрированных относительно нулевого (центрального) элемента систолической матрицы.

Вполне понятно, что, если в эту систолическую структуру одним из трех способов, описанных в [7], введены значения трехмерного функционала $U_{n,k,m}$, дискретизированного при целочисленных значениях аргументов n, k и m, то задача вычисления сводится лишь к обращению (считыванию) за результатом в искомую ячейку матрицы.

Систоличность - пульсирующее параллельное вычисление функционала - будет наблюдаться при вводе в матричную структуру соответствующих данному вычислению рекуррентных последовательностей по столбцам или строкам матрицы.

Очевидно, что числовые значения рекуррентных функционалов действительных чисел $U_{n,k,m}$, в систолической матрице сами по себе являются трехмерными векторными величинами.

Известно [8], что теория возвратных последовательностей так же, как и ее расширенное толкование - теория рекуррентных последовательностей [3,7,8] являются точными аналогами теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Другими словами, теория рекуррентных последовательностей, оперирующая с параллельными и сдвигово-параллельными скалярными арифметическими операциями, приводит в результате к вычислению многомерных векторных величин, минуя громоздкий аппарат векторных матричных вычислений.

Задавшись целью построения трехмерного тела комплексных чисел, мы априорно можем предположить, что систолическая структура однородной вычислительной среды в этом случае должна содержать в каждом своем элементе шестимерные числовые значения, т.к. комплексный тензорный функционал $Z_{n,k,m}$ зависящий от значений действительных аргументов (индексов) n, k и m, кроме действительной части, будет содержать еще и мнимую часть.

Таким образом, основным требованием к систолической матрице вычислителя, оперирующего с комплексными величинами, является условие ее построения из элементарных ячеек, разделенных на две части, хранящие действительную и мнимую составляющие значения функционала $Z_{n,k,m}$.
Исследованию рекуррентных свойств арифметических прогрессий и ряда других рекуррентных последовательностей над телами иррациональных чисел, обобщениями которых являются комплексные числа и посвящена настоящая статья.

1.8 Геометрические и комбинаторные основания алгебраических вычислений иррациональных дискретных величин.

1.8.1. Как известно, [23] некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4000 лет назад в древнем Вавилоне. Данные приемы выражались в геометрической форме и встречаются до настоящего времени в терминах «квадрат» числа, «куб» числа и т.д.

В качестве одной из основных теорем геометрической алгебры, на основании которой можно получить решение квадратного уравнения, является 5-е предложение 2 книги «Начал» Евклида [23,24] .

Суть этой теоремы в следующем: «Если отрезок AB (рис.4) разделить на два неравных отрезка AD и DB, то сумма площадей прямоугольника, сторонами которого являются эти отрезки, и квадрата, стороной которого служит половина отрезка AB».

AD=x; DB=BM=y; AC=CE=1/2*AB=(x+y)/2 (45)

CD=EH=(x-y)/2 (46)

тогда

$xy+((x-y)/2)^2 = ((x+y)/2)^2$ (47)

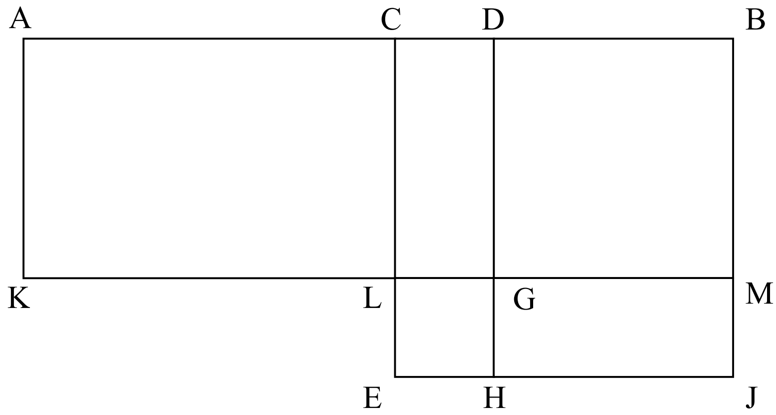


Рис. 4.

Уравнение (47), написанное в современных обозначениях, является тем исходным уравнением второго порядка, в соответствии, с которым древние отыскивали иррациональные корни.

В качестве второй теоремы, лежащей в основаниях природы иррациональности, может быть названо 6-е предложение *2* книги «Начал» Евклида.

Смысл этих теорем в том, что они показывают геометрическую связь одномерных величин (отрезки AD, DB и CD) с их двумерными эквивалентами - площадями соответствующих фигур.

<u>*1.8.2.*</u> Если поместить начало координатной прямой X в середину отрезка AB, а сам отрезок направить вдоль этой оси, то в соответствии с (46) при представлении отрезка CD = LG в новой системе координат его длина y’ будет определяться зависимостью y = |x’| (см.рис.5)

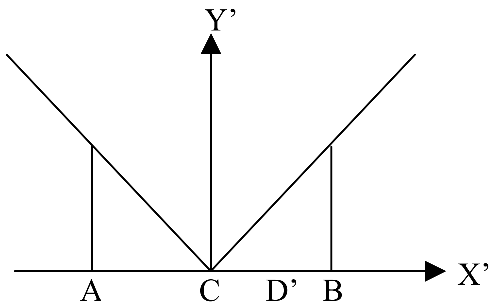


Рис.5

Далее, если длину элементарного отрезка CD’ = Δy’ (рис.5) координатной оси, удобную для наглядного разбиения оси X на части, приравнять к единице, то вдоль оси x' могут быть нанесены точки оцифрованные числами кратных длин mΔy’ → 0,1,2,3,…|m| вправо от точки с и |m|,...,3,2,1 - влево от точки C, принятой за 0.

Домножив каждый элемент, образовавшейся последовательности чисел «m» числовой оси

|m|, …, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, …|m| (48)

на знаковую функцию Сигнум

$$\operatorname{Sign} m = \begin{cases} 1 \text{ слева от точки C} \\ 0 \text{ в точке C} \\ +1 \text{ справа от точки C} \end{cases} \qquad (49)$$

приходим к построению одномерной числовой оси действительных чисел «m»

m, …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., m; (50)

в этом случае можно написать

Sign m = |m|/m (51)

Применительно к систолической матрице отрезок CD’ = Δy’ соответствует расстоянию между элементарными ячейками матричного тела, что позволяет присвоить каждой из элементарных ячеек целое действительное число. При этом центральный элемент матрицы будет считаться нулевым элементом.

Если затем числовые значения оси приравнивать не к одномерной геометрической величине, а считать, что каждой точке оси соответствует значение двумерной величины, например, текущее значение площади квадрата ELGH (рис.4), (длина стороны которого равна элементарной длине CD = CD' = Δy’ (рис.5)), то, проводя дискретизацию по целочисленным значениям, приходим к последовательности:

μ_η ,…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…, μ (52)

Эта последовательность оцифровывает числовую ось второго порядка, т.к. для целочисленных значений √μ наблюдается их соответствие последовательности (50), т.е.

√μ = m (53)

В результате приходим к тому, что в точках дискретизации этой числовой оси могут быть построены сеточные систолические тела иррациональных чисел по аналогии с телами действительных чисел.

1.8.3. Для этого η, ν или μ необходимо рассматривать в виде (52,53), например,

$N_{\eta,\nu,\mu} = \eta + \nu\sqrt{\mu}$ (54)

подставляя их во все 192 аналитические выражения для ранее полученных линейных тел рекуррентных арифметических прогрессий действительных чисел [7] типа

$N_{n,k,m} = n+km$ (55)

Совпадение и поэлементное равенство плоскостей арифметических прогрессий тел действительных чисел типа (55) с соответствующими плоскостями трехмерных тел иррациональных чисел типа (54) будут происходить в сечениях, в которых

$\eta = n^2$ или $\nu=k^2$ или $\mu=m^2$ (56)

Вышеизложенное иллюстрируется таблицей 16 для положительных направлений полуосей m и μ и числовых значений элементов матриц $N_{0,1,\mu} = \mu$ поэлементно совпадающих с числовыми значениями в матрице $N_{0,1,m}$ = m через определенное число элементов (слоев), см.табл.16.

Как видно из табл.16 трехмерное тело иррациональных чисел (54) для положительных значений μ будет располагаться «внутри» рационального тела (55) с промежуточными слоями плоскостей иррациональных чисел.

Таблица 16

μ	0	1	2 3	4	5 … 8	9	10 … 15	16	17 … 24	25
m	0	1		2		3		4		5
$N_{0,1,\mu}$	0	√1	√2 √3	√4	√5… √8	√9	√10…√15	√16	√17…√24	√25
$N_{0,1,m}$	0	1		2		3		4		5
ΔN_m	0	1	2		4		6		8	

Число слоев промежуточных плоскостей в иррациональном теле, располагаемых «внутри» рационального тела, между слоями m и m-1 определяется выражением

$\Delta Nm = m^2 - (m-1)^2 - 1 = 2(m-1)$ (57)

Для η, ν и μ отрицательных и соответствующих (56) числовые тела обращаются в шестимерные тела комплексных чисел.

Характерно, что в этих слоях (56) при отрицательных η, ν и μ числовые тела типа (54) могут быть также приведены к трехмерному систолическому телу типа (55) действительных чисел, если произвести поэлементное суммирование тела (54) с телом структурно-сопряженных комплексных чисел, определяемых выражением

$$\overline{N}_{\eta,\nu,\mu} = \nu_m + \nu_{mi} = \nu_m(1+i) \qquad (58)$$

где $m = \sqrt{|\mu|}$ и $i = \sqrt{-1}$

1.8.4. Распространяя геометрическое рассмотрение отрезков координатных и индексных осей в виде объемов соответствующих «р»-мерных тел, приходим к возможности построения систолических числовых тел для иррациональных чисел типа $\sqrt[p]{\mu}$

$$N_{\eta,\nu,\mu} = \eta + \nu^p\sqrt{\mu} \qquad (59)$$

Для этих тел число иррациональных слоев, размещаемых «внутри» соответствующего тела действительных чисел, определяется выражением

$\Delta N_p = m^p - (m-1)^p - 1$ (60)

а тело структурно-сопряженных комплексных чисел, приводящее к числовому поэлементному равенству тел типа (15) и (11), определяется выражением

$$\overline{N}_{\eta,\nu,\mu} = \nu_m^{(p-1)}(1+i) \qquad (61)$$

где p - порядок иррациональности,

$i = \sqrt{-1}$

1.8.5. К числу комбинаторных оснований, трехмерных тел комплексных чисел относится не только вывод 192 типов линейных тел арифметических прогрессий, но и замечательное свойство выражения дискретной функции

$$N_m = m^2 \qquad (62)$$

через аддитивные математические операции суммирования членов арифметической прогрессии с основанием d = 1.

Так, операция

$$u_m = m\sum = \sum_{i=0}^{m} m_i \qquad (63)$$

и операция

$$u_{m-1} = \sum(m) = \sum_{i=0}^{m-1} m_i \qquad (64)$$

являются аддитивными аналогами мультипликативных комбинаторных операций
m! = 1·2·3·4·…·m и Γ(m) =(m-1)!- гамма-функция.
mΣ и Σ(m) могут быть определены по текущим значениям двух соседних элементов арифметической прогрессии с d=1 в соответствии с выражениями

$$m\sum = \frac{m(m+1)}{2} \qquad (65)$$

и

$$\sum(m) = \frac{m(m-1)}{2} \qquad (66)$$

Откуда,

$$m^2 = m\sum + \sum(m) \qquad (67)$$

и

$$m = m\sum - \sum(m) \qquad (68)$$

Представляет интерес соотношение

$$\frac{m\sum - 1}{\sum(m)} + \frac{\sum(m) - 1}{m\sum} = 2 \qquad (69)$$

а также связь этих операций с факториалом и гамма-функцией

$$m\sum = \frac{(m+1)!}{2(m-1)!}$$

$$\sum(m) = \frac{m!}{2(m-1)!} \qquad (70)$$

<u>*1.8.6*</u>. С привлечением аддитивных операций (63) и (64) с учетом выражений (65...71) авторами [25, 13] разработаны алгоритмы и программа SIST MAT, позволяющие производить различные параллельные вычисления дискретных двухмерных и трехмерных функционалов на ПВМ.
Эти вычисления основаны на скалярных операциях параллельного сдвигового позиционного суммирования без применения громоздкого аппарата векторных вычислений. Они базируются на свойствах рекуррентных последовательностей трехмерных тел действительных и комплексных чисел [3, 7, 8, 23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельников Г.С., Твердова А.Э. .Методы некруговой тригонометрии в задачах внепараксиальной оптики, доклад 1У Всесоюзная конференция "Теоретическая и прикладная оптика", Л.. 1985г.
2. Гуглин И.Н. Телевизионные игровые автоматы и тренажеры. М., Радио и связь, 1962, 171 с.
3. Мельников. Г.С. Рекуррентные последовательности в систолических вычислительных структурах. [В.15]
4. Kung H.T. Whu sistolic architectyre. Computer . - №62.. Vol. 15. N.J, P. 37-46.
5. Е.Ф.Очин. Вычислительные системы обработки изображений. -Л.: Энергоатомиздат, 1969, 133 с

6. Самохвалов К.Г., Луцкий Г.И. Основы теории многоуровневых конвейерных вычислительных систем. - Радио и связь, 1989, 271 С.
7. Мельников Г.С. Трехмерные систолические тела действительных чисел, систолических числовых матрицах. Настоящий сборник.
8. Мельников Г.С. Дискретные пространственно-инвариантные преобразования в систолических числовых матрицах. Наст. сборник.
9. Маркушевич А.И. Возвратные пследовательности. - .М.,.: Наука,
10. Реньи А. Трилогия о математике. - М.: .Мир, Т:-74 С.
11. Самохвалов К.., Кухарчук ..Г., Луцкий Г.Л. Структуры четвертого поколения. - К.: Техника, 1972, 256 С.
12. Королев И.Н. Предисловие к сборнику научных статей "Современный компьютер".М: Мир, 1956, С.5-9.
13. Мельников Г.С. "Рекуррентные методы автоматизации анализа, сжатия и синтеза систолических структур цифровой информации"; [В.15]
14. Кухарев Г.А., Тропченко А.Ю., Шмерко "Систолические процессоры для обработки сигналов",.: Беларусь, 1986 г.
15. Computer Graphics and image processing. -1981, v.15, p 201-203.
16. Шенон К., Работы по теории- информации и кибернетике. Изд-во иностранной литературы, 1963 г.
17. Голдман С., Теория информации, Изд-во иностранной литературы, 1957 г.
18. Фоата Д. Распределения Эйлера и Макмагона на группе перестановок. В сб. Проблемы комбинированного анализа (серия математика, новое в зарубежной науке) М., "Мир", 1980 г. стр.120...139.
19. Браве 0. Избранные труды. Кристаллографические этюды. Л.: Наука, 1974, 419 с.
20. Федоров Е.С. Начало учения о фигурах. Л.: Изд-во АН СССР, 1953, 409с.
21. Гильберт Д., Кон-Фассен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981. 344 с.
22. Глейзер Г.И. История математики в школе. М.; "Просвещение", 1982. с.240.
23. Евклид. Начала / Перевод с греческого и комментарии Д.Д.Мордухай- Болтовского. .- Л., 1948, кн.1-6.
24. Мельников Г.С., Шишкин М.Ю. Алгоритмы и программы синтеза цифровых структур систолического анализа рекуррентных последовательностей. - Тезисы доклада на региональной школе-семинаре "Отказоустойчивость и живучесть систем цифровой информации", Львов, 1990.