



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Каменев, Об одном интегральном признаке колеблемости линейных дифференциальных уравнений второго порядка,
Матем. заметки, 1978, том 23,
выпуск 2, 249–252

<https://www.mathnet.ru/mzm8138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 195.94.234.198

23 января 2026 г., 09:22:04



ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРИЗНАКЕ КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. В. Каменев

Доказано, что если при некотором $n > 2$ функция $x^{1-n}A_n(x)$, где $A_n(x)$ — n -я первообразная для $a(x)$, не ограничена сверху, то уравнение $y'' + a(x)y = 0$ колеблется. Библ. 9 назв.

В теории линейного уравнения

$$y'' + a(x)y = 0, \quad (1)$$

где $a(x)$ определена на $[x_0, +\infty)$ и локально суммируема, хорошо известен следующий интегральный признак колеблемости, принадлежащий А. Винтнеру (см. [1], а также [2] и [3]): если выполнено условие

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t a(s) ds = +\infty, \quad (2)$$

то уравнение (1) колеблется. Ф. Хартман [4] показал, что в условии (2) предел не может быть заменен верхним пределом.

Признак колеблемости Винтнера обобщался в различных направлениях как для уравнения (1), так и для нелинейного уравнения $y'' + a(x)f(y) = 0$ в работах [4]—[9] и некоторых других (см. обзор в [6] и [3]).

В заметке предлагается новый интегральный признак колеблемости уравнения (1), основанный на использовании n -ой первообразной коэффициента $a(x)$, частным случаем которого является признак Винтнера.

ТЕОРЕМА. Пусть при некотором $n > 2$ (не обязательно целом) функция $x^{1-n} A_n(x)$, где $A_n(x)$ — n -я первообразная функция $a(x)$, не ограничена сверху. Тогда уравнение (1) колеблется.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$A_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} a(t) dt,$$

то условие теоремы можно записать так:

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{1-n} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} a(t) dt \right] = +\infty. \quad (3)$$

Допустим теперь, что уравнение (1) не колеблется; тогда, полагая $w = y'/y$, получим: $w' + w^2 + a(x) = 0$, откуда находим

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} w'(t) dt + \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} w^2(t) dt &= \\ &= - \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} a(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} w'(t) dt &= (n-1) \int_{x_0}^x (x-t)^{n-2} w(t) dt - \\ &- C(x-x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

и выделяя в (4) полный квадрат относительно $w(t)$, получим

$$\begin{aligned} x^{1-n} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} a(t) dt &= \\ &= C \left(\frac{x-x_0}{x} \right)^{n-1} + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)x^{n-1}} - \\ &- x^{1-n} \int_{x_0}^x \left[w(t)(x-t)^{(n-1)/2} + \frac{n-1}{2} (x-t)^{(n-3)/2} \right]^2 dt \leq \\ &\leq C \left(\frac{x-x_0}{x} \right)^{n-1} + \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)x^{n-1}} \leq C_1 \end{aligned}$$

при $x \geq x_0$, что противоречит условию (3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что если выполнено условие (2), то условие (3) выполняется при $n = 3$. Таким

образом, признак колеблемости Винтнера получается как следствие из нашей теоремы. Нетрудно построить примеры, показывающие, что наш признак колеблемости существенно шире признака Винтнера.

З а м е ч а н и е 2. Область применения нашего признака колеблемости существенно шире многих ранее известных признаков. Например, если в уравнении (1) $a(x)$ такова, что $A_3(x) = e^{x^2} \sin x$, то наша теорема легко устанавливает колеблемость, в то время как ни один из признаков, содержащихся в [4] — [9], не позволяет получить этот результат.

В заключение благодарю Р. С. Исмагилова за плодотворное обсуждение проблемы колеблемости.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
23.XI.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] W i n t n e r A., A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math., 7, № 1 (1949), 115—117.
- [2] Х а р т м а н Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.
- [3] S w a n s o n C. A., Comparison and oscillation theory of linear differential equations, N. Y., Acad. Press, 1968.
- [4] H a r t m a n P., On non-oscillatory linear differential equations of second order, Amer. J. Math., 74, № 2 (1952), 389—400.
- [5] К о н д р а т ь е в В. А., Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнений $y'' + p(x)y = 0$, Докл. АН СССР, 113, № 4 (1957), 742—745.
- [6] R a b M., Kriterien für die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, Casopis Pěst. Mat., 84, № 3 (1959), 335—370.
- [7] К а м е н е в И. В., Об одном критерии колеблемости решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, Матем. заметки, 8, № 6 (1970), 773—776.
- [8] К а м е н е в И. В., О некоторых специфически нелинейных осцилляционных теоремах, Матем. заметки, 10, № 2 (1971), 129—134.
- [9] К а м е н е в И. В., Критерии колеблемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, связанные с осреднением, Дифф. уравнения, 10, № 2 (1974), 246—252.