

1. Понятие фрактального импеданса

Как известно, уравнения состояния электрических цепей, содержащих пассивные R-, L-, C-элементы с сосредоточенными параметрами, представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения, порядок которых равен порядку анализируемых цепей. Например, электрические процессы, протекающие в колебательном LC-контуре с потерями (рис. 1) описываются обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка вида

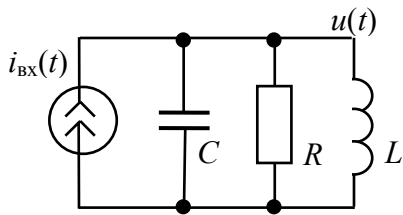


Рис. 1. Простой параллельный LC-контур

циальным уравнением второго порядка вида

$$C \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u(t) dt = i_{вх}(t).$$

С помощью этого вида уравнений можно опи-

сывать колебания не только в электрических цепях,

но и в системах другой природы (например, колебания маятника, вибрация зданий, платформ и др.). Поэтому в технике широко используется метод аналогового моделирования, когда поведение некоторой (неэлектрической) системы определяют на основе ее электрической схемы замещения. При этом существенно уменьшается стоимость и время моделирования.

Очевидно, что любые электрические схемы замещения, содержащие R-, L-, C-элементы с сосредоточенными параметрами, описывают динамические системы целого порядка, так как компонентные уравнения инерционных элементов (моделируемых L и C) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. В частности, для идеального емкостного элемента связь между током и напряжением определяется как

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt},$$

или в операторной форме

$$I(p) = pC \cdot U(p).$$

Для идеального индуктивного элемента компонентное уравнение имеет вид

$$u = -e = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

или в операторной форме

$$U(p) = pL \cdot I(p).$$

Поэтому в тех случаях, когда исследуемая динамическая система описывается дифференциальным уравнением дробного порядка, электрическая схема замещения должна содержать как минимум один элемент, связь между током и напряжением в котором можно было бы представить дифференциальным уравнением не целого порядка вида

$$i(t) = \frac{1}{F} \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}, \quad 0 < |\alpha| < 1, \quad (1)$$

где F – коэффициент, характеризующий некоторую способность элемента, физический смысл которой определим ниже.

Очевидно, что к этому классу элементов можно отнести однородную полубесконечную RC-линию, связь между током и напряжением на входе которой, как известно, определяется уравнением

$$i(t) = \frac{1}{A} \frac{d^{1/2} u(t)}{dt^{1/2}},$$

или в операторной форме

$$U(p) = Ap^{-1/2} I(p) = \frac{R}{\theta} I(p)$$

где $A = \left(\frac{r}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$,

r и c – соответственно погонные сопротивление и емкость линии.

$\theta = (pRC)^{1/2} = (p\tau)^{1/2}$ – постоянная распространения,

R и C – соответственно полное сопротивление и емкость линии.

Обобщая этот частный случай фрактального импеданса половинного порядка на произвольные значения порядка компонентного уравнения α , запишем в соответствии с (1) выражение для импеданса фрактального двухполюсника в общем виде как

$$Z_F(p) = \frac{|Z_c|}{(\tau p)^\alpha} \quad (2)$$

где Z_c – величина импеданса двухполюсника на частоте ω_c , $\tau = 1/\omega_c$,

Поскольку физические процессы, определяющие такой характер связи между током и напряжением, могут быть самыми различными, то в дальнейшем элементы электрических цепей, описываемые компонентным уравнением (1), будем в общем случае называть *фрактальными радиоэлементами*, а в качестве их количественной характеристики будем оперировать *фрактальным импедансом*.

Заметим, что в отличие от номиналов емкостного и индуктивного элементов, которые являются их основными параметрами, фрактальный элемент характеризуется несколькими параметрами: $|Z_c|$, τ , α (см. выражение (2)).

Частотные характеристики фрактального импеданса при вещественном значении α определяются соотношением

$$Z_F(j\omega) = \frac{|Z_c|}{\tau^\alpha} j\omega^{-\alpha} = \frac{|Z_c|}{\tau^\alpha} \omega^{-\alpha} e^{-\alpha \frac{\pi}{2}}. \quad (3)$$

Графики ЛАЧХ и ФЧХ нормированного импеданса двухполюсника Z_F изображены на рис. 2.

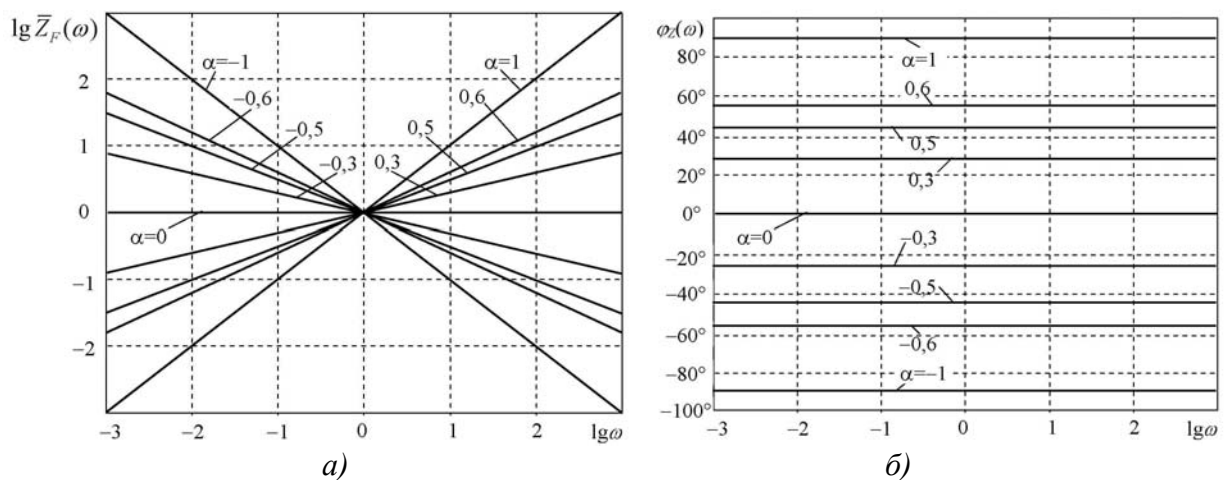


Рис. 2. ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) нормированного импеданса двухполюсника Z_F

Для предельных случаев $\alpha = 1$, $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ двухполюсник Z_F представляет собой соответственно емкостной и индуктивный и резистивный элемент.

При аналоговом моделировании с помощью RLC-цепей мы фактически получаем решение дифференциального уравнения соответствующего целого порядка, т.е. определяем реакцию системы на внешнее возбуждение при определенных граничных и начальных условиях. Точно также, с помощью цепей, содержащих фрактальные радиоэлементы, можно получить решение соответствующих диффе-

ренциальных уравнений дробного порядка.

Следует отметить, что традиционные L- и C-элементы при определенных условиях также могут характеризоваться фрактальными импедансами. В частности в индуктивности он проявляется в диапазоне частот, где существует скин-эффект в проводнике, а в конденсаторах – при определенных видах диэлектриков с комплексной диэлектрической проницаемостью. Однако, как правило, показатели частотных зависимостей этих импедансов мало отличаются от единицы.

Поэтому необходимо создание специальных фрактальных радиоэлементов, у которых можно было бы задавать необходимые значения параметров фрактального импеданса технологическим путем и гарантировать эти значения в течение всего срока эксплуатации при заданных условиях эксплуатации.

Рассмотрим существующие принципы физической реализации фрактальных импедансов.

2. Физическая реализация фрактальных импедансов на основе электрохимических преобразователей

Еще в 1926 года при исследовании электрических свойств поверхности контакта металлического электрода и водного (или твердого) электролита было замечено, что в частотной зависимости импеданса в ограниченном диапазоне частот доминирует член $(j\omega)^{-\eta}$, где показатель η удовлетворяет неравенству $0 < \eta < 1$. Этот добавочный член был назван элементом с постоянным углом потерь, или просто элементом постоянной фазы (ЭПФ).

Поэтому следовало ожидать, что приборы, принцип действия которых основан на использовании электрохимических процессов, протекающих на электродах, погруженных в электролиты или полярные жидкости, могут выполнять функции фрактальных радиоэлементов.

Впервые глубокие теоретические исследования таких элементов и их практическое применение для целей интегрирования и дифференцирования дробного (половинного) порядках были проведены в КАИ профессором Р.Ш. Нигматуллин и в дальнейшем развиты его учениками.

В экспериментах использовался элемент, упрощенная конструкция которого изображена на рис. 3. Он состоит из двух платиновых электродов, помещенных в запаянную ампулу 1 с водным раствором ферроцианида калия $K_4[Fe(CN)_6]$ и феррицианида калия $K_3[Fe(CN)_6]$ одинаковой концентрации.

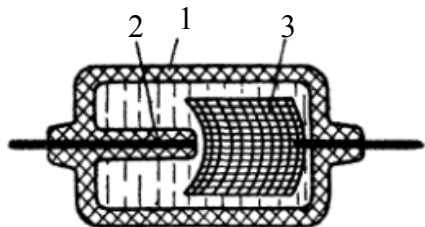
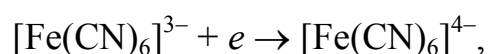


Рис. 3. Конструкция электрохимического диода:

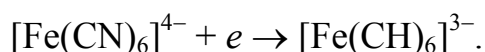
1 – корпус, 2 – малый электрод, 3 – большой электрод

Площадь макроэлектрода 3 значительно (более чем в 40 раз) превышает площадь микроэлектрода 2. При наложении разности потенциалов на электродах происходят следующие химические реакции: восстановление на катоде:



где e означает электрон,

и окисление на аноде:



Как видно из схем реакций, в ходе этого окислительно-восстановительного процесса концентрации исходных веществ в растворе не изменяются и, если приложенное напряжение не превышает потенциала разложения растворителя (для воды 0,9В), такой элемент может работать сколь угодно долго.

Эквивалентная схема двухполюсника с полусферическим микроэлектродом с учетом емкости двойного электрического слоя для малых сигналов представлена

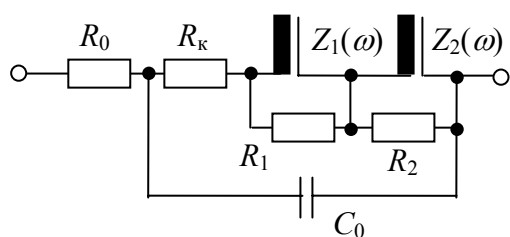


Рис. 4. Эквивалентная схема электрохимического диода двойного электрического слоя.

на рис. 4. Здесь R_k – химическое сопротивление; $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ – сопротивления нестационарной диффузии окислителя и восстановителя; R_1 и R_2 соответственно сопротивления стационарной диффузии; R_0 – объемное сопротивление и C_0 – емкость двой-

Пусть выполняются следующие неравенства:

$$R_1 \gg Z_1(\omega), R_2 \gg Z_2(\omega);$$

$$Z_1(\omega) + Z_2(\omega) = Z(\omega) \gg R_k;$$

$$1/(\omega C_0) \gg Z(\omega); R_0 \ll Z(\omega).$$

т. е., соответственно, кривизна поверхности микроэлектрода мала, скорость электрохимической реакции бесконечно велика, а емкостью двойного электрического слоя и объемным сопротивлением можно пренебречь.

Тогда сопротивление рассматриваемого двухполюсника определяется выражением

$$Z(j\omega) = \frac{1}{A\sqrt{\omega}} e^{-j\frac{\pi}{4}},$$

где A – константа, величина которой при заданной концентрации окислителя и восстановителя определяется постоянной составляющей приложенного напряжения (величиной смещения) и размерами микроэлектрода.

Таким образом, этот элемент можно использовать для реализации математических операций дробного интегрирования и дифференцирования половинного порядка.

Однако наличие жидкого электролита и необходимость герметизации конструкции диода затрудняет его использование в составе малогабаритных устройств, изготавливаемых по интегральной технологии.

Более технологичной конструкцией является планарный электрохимический преобразователь, изображенный на рис. 5, предложенный и разработанный

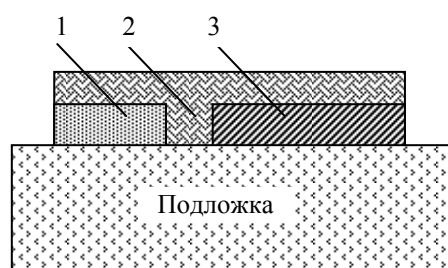


Рис. 5. Планарный электрохимический преобразователь:

1 – электрод (Pt), 2 – твердый электролит, 3 – электрод (Ag)

одним из учеников Нигматуллина Р.Ш., Карамовым Ф.А.

Здесь в качестве электролита используется твердый электролит системы $RbAg_4I_5$. В этом случае серебряный электрод является единственно обратимым для $RbAg_4I_5$ и $\alpha, \beta-AgI$ проводящих по ионам серебра. Проведенные эксперименты показали, что в качестве поляризуемых электродов можно использо-

вать электроды из платины.

При этом частотные зависимости модуля импеданса и фазового угла описываются выражениями:

$$|Z_{Ag}| = A \cdot \omega^{-\alpha}, \quad \varphi(\omega) = \arg Z_{Ag}(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \alpha = const,$$

где A и α – постоянные.

Для различных образцов преобразователя значение α находилось в пределах 0,66-0,68, а фазовый угол составлял (60-62)°.

Отметим, что на параметры импеданса заметно влияет изменение температуры. Так, при изменении температуры от -20°C до $+50^{\circ}\text{C}$ модуль импеданса увеличивается на два порядка, значение α меняется от 0,64 до 0,82 и фазового угла от $57,5^{\circ}$ до $74,5^{\circ}$.

В 2002 году была предложена конструкция ЭПФ, использующая свойства фрактальной геометрии границы электрод-электролит, получившая название Fractor™ (G. Bohannan). Структура и общий вид устройства показаны на рис. 6.

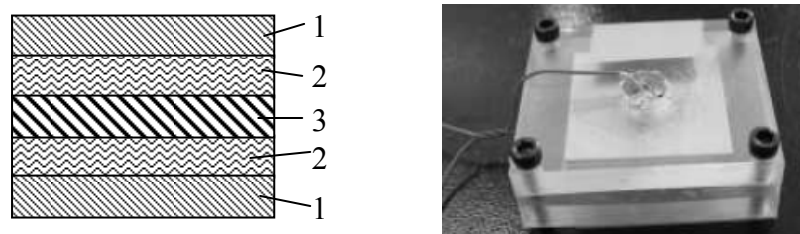


Рис. 6. Фрактальный элемент Fractor™ : а – структура в сечении; б - общий вид
1 – внешний электрод, 2 – электролит; 3 – внутренняя проводящая пластина

Размеры конструкции составляют 3,5x3,5x1,0 см. Внутренняя пластина имеет шероховатые поверхности, обработанные специальным образом для создания необходимой структуры поверхности, определяющей значение α . В качестве электролита используется гель, содержащий ионы лития.

Экспериментальные АЧХ и ФЧХ импеданса одной из конструкций рассматриваемого элемента изображены на рис. 7.

Следует отметить, что пока созданы лишь экспериментальные образцы устройств подобного рода. Параметры такого фрактального радиоэлемента лежат в пределах: по углу постоянства фазы от -30° до -60° , по диапазону рабочих частот при неравномерности ФЧХ $\pm 5^{\circ}$ до 5 декад. Эти параметры сильно зависят от температуры, от состава электролита, от материала электродов, от степени обработки поверхности электродов и от степени сжатия электродных пластин.

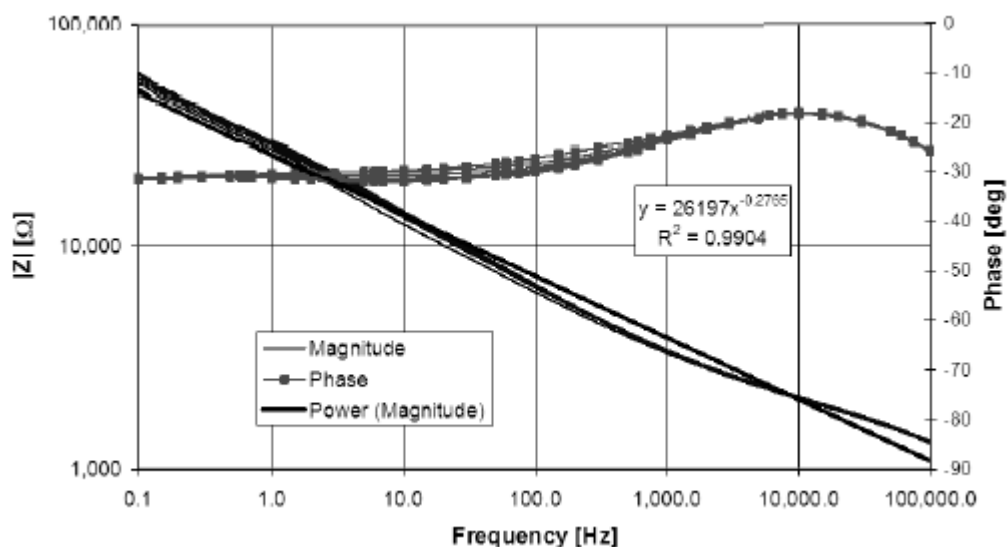


Рис. 7. Частотные характеристики экспериментального образца

Поскольку работа рассмотренных фрактальных радиоэлементов основана на процессах диффузии и дрейфа ионов электролита, то они хорошо работают в диапазонах низких и инфранизких частот (доли герца – десятки кГц).

3. Физическая реализация фрактальных импедансов на основе элементов с сосредоточенными параметрами

Задача синтеза электрических цепей на RLC-элементах с сосредоточенными параметрами по критерию постоянства фазового угла входного импеданса (иммитанса) в ограниченном диапазоне частот успешно решалась уже в конце 50-х годов прошлого столетия. Такие цепи в то время использовались в качестве нагрузок передающих линий, для балансировки электролитических импедансов (например, импедансов между электродами, вставленными в биологические ткани) в широком диапазоне частот. Кроме того, их использовали в качестве четырехполюсников обратной связи, обеспечивающих определенную характеристику затухания цепи обратной связи в широкополосных усилителях.

Впоследствии такие цепи широко использовались в качестве схем замещения электрохимических преобразователей и других процессов и объектов, входные импедансы которых проявляли частотную зависимость вида (3).

Однако в качестве самостоятельных элементов с постоянной фазой они стали применяться лишь при создании пропорциональных-интегрирующих-дифференцирующих (ПИД) регуляторов дробного порядка, используемых в сис-

темах управления объектами и процессами дробного порядка.

Для синтеза таких цепей, как правило, используются многозвенные регулярные структуры (формы Фостера и Кауэра, ветвящиеся цепи и др.). К настоящему времени созданы десятки различных методов синтеза, отличающихся типом аппроксимирующих функций, способами разложения этих функций в ряд, использованием аналитических или приближенных методов определения номиналов элементов звеньев.

Как известно, физически реализуемые функции цепи с сосредоточенными параметрами описываются дробно-рациональными функциями комплексной переменной. Таким образом, входной импеданс произвольного двухполюсника, содержащего R-, L- и C-элементы с сосредоточенными параметрами, в общем виде можно записать как

$$Z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = K \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + pa_1 + a_0}{p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + pb_1 + b_0} \quad (4)$$

или

$$Z(p) = K \frac{(p + z_1)(p + z_2) \dots (p + z_n)}{(p + p_1)(p + p_2) \dots (p + p_m)}, \quad (5)$$

где z_i и p_i – соответственно нули и полюса функции цепи.

Рассмотрим некоторые способы реализации двухполюсников на основе R- и C-элементов по заданной функции $Z(p)$.

Разложение на простые дроби.

Разложение на простые дроби функции (4) дает выражение

$$Z(p) = Z(\infty) + \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{p + p_i}, \quad (6)$$

где k_i – вещественные положительные вычеты, которые вычисляются по формуле

$$k_i = (p + p_i)Z(p) \Big|_{p=-p_i}.$$

Каждый член ряда (6) можно представить как параллельное соединение проводимостей вида

$$\frac{p + p_i}{k_i} = pC_i + \frac{1}{R_i}.$$

Поэтому разложением на простые дроби можно синтезировать заданную функцию $Z(p)$ цепью, состоящей из последовательно соединенных сопротивления $Z(\infty)$ и параллельных RC-контуров, как показано на рис. 8.

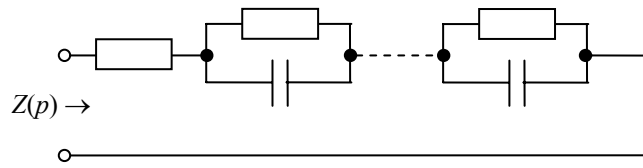


Рис. 8. Структура цепи, полученная разложением функции $Z(p)$ на простые дроби (первая форма Фостера)

Можно показать, что разложением на простые дроби функции $Y(p) = 1/Z(p)$ можно получить выражение

$$Y(p) = Y(\infty)p + Y(0) + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p + z_i}. \quad (7)$$

Вычеты здесь определяются по формуле $k_i = (p + z_i)Y(p)/p \Big|_{p=-z_i}$.

В данном случае каждый член ряда в выражении (4.7) можно записать как

$$\frac{p + z_i}{k_i} = pC_i + \frac{1}{R_i}.$$

Тогда схема, реализующая входную проводимость вида (7), будет содержать параллельное соединение последовательных RC-контуров, как показано на рис. 9.

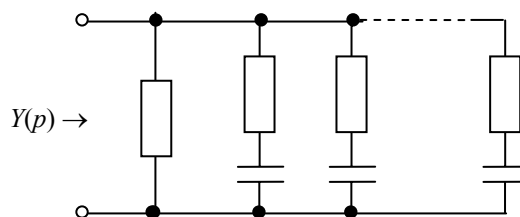


Рис. 4.9. Структура цепи, полученная разложением функции $Y(p)$ на простые дроби (вторая форма Фостера)

Разложение на непрерывные (цепные) дроби.

Пусть имеется лестничная цепь, изображенная на рис. 10, в которой продольные сопротивления названы Z_1, Z_3, Z_5, \dots , а поперечные проводимости – Y_2, Y_4, Y_6, \dots

Найдем входную проводимость правой части схемы по отношению к за-

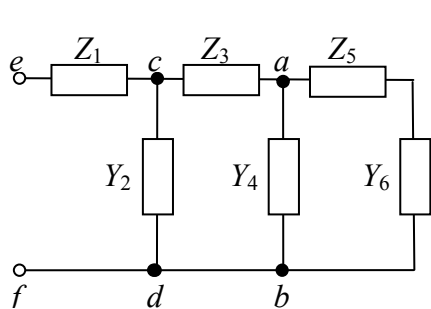


Рис. 4.10. Лестничная цепь

правлению к зажимам ef , получим выражение для входного сопротивления в виде цепной дроби:

$$Z_{ef} = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}$$

Для представления выражения (4) к виду цепной дроби можно придерживаться следующих правил:

- 1) расположить полиномы $N(p)$ и $M(p)$ по убывающим, либо по возрастающим степеням p (см. п. 3, 4, 6);
- 2) делить многочлен на многочлен, следя за тем, чтобы в процессе деления получались положительные слагаемые и чтобы они не содержали p в степени больше 1 или -1 ;
- 3) в том случае, если в процессе деления получаются отрицательные слагаемые или степени p больше 1 (-1), можно на соответствующем шаге поменять порядок расположения степеней полинома;
- 4) деление, начиная со старших степеней, применяют к выражению $Z(p)$, имеющему $m = n$;
- 5) если степень числителя $Z(p)$ меньше степени знаменателя ($m < n$), то разлагают в цепную дробь ее обратную величину, т.е. $Y(p)$;
- 6) деление, начиная с младших степеней, применяют к выражению $Y(p)$, имеющему $m = n$.

На основании вышеизложенного процесс последовательного определения элементов лестничной схемы можно представить в виде диаграммы, изображен-

ной на рис. 11.

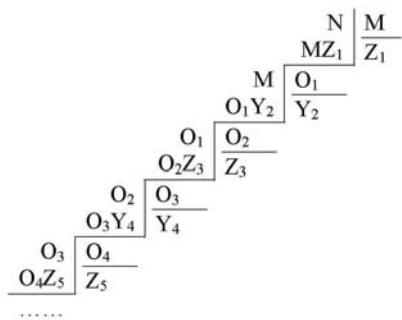


Рис. 11. Диаграмма определения элементов цепной дроби

При разложении в цепную дробь функции $Z(p)$, в которой $m = n$, на первом шаге выделяется постоянная величина $Z(\infty)$, реализуемая последовательным сопротивлением. Первый остаток будет иметь нуль при $p = \infty$; величина обратная остатку, имеет здесь полюс, который выделяется делением знаменателя остатка на числитель и реализуется параллельной емкостью и т.д.

Полученная схема лестничной цепи при этом имеет вид, изображенный на рис. 12.

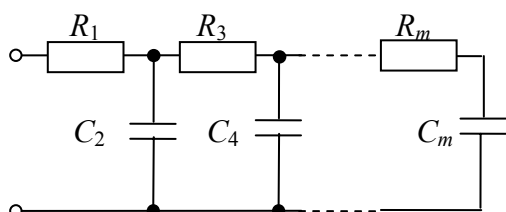


Рис. 12. Лестничная цепь, полученная разложением $Z(p)$ в цепную дробь

Если в $Z(p)$ $m < n$ то необходимо разлагать в цепную дробь обратную величину, т.е. $Y(p)$. Реализующая схема будет отличаться от полученной (рис. 12) лишь отсутствием последовательного сопротивления R_1 .

При разложении в цепную дробь функции $Y(p)$, в которой $m = n$, на первом шаге выделяется постоянная величина $Y(\infty)$, реализуемая параллельной проводимостью G_0 . Величина обратная остатку имеет полюс $p = \infty$, выделение которого делением знаменателем остатка на числитель дает последовательную емкость и т.д. Схема лестничной цепи, получающаяся с помощью этой процедуры, имеет вид, изображенный на рис. 13.

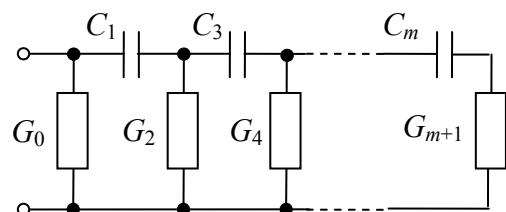


Рис. 13. Лестничная цепь, полученная разложением $Y(p)$ в цепную дробь

Если в $Y(p)$ $m < n$, то необходимо разлагать в цепную дробь обратную величину, т.е. $Z(p)$. При этом в реализующей схеме (рис. 13) не будет первой параллельной проводимости G_0 .

4. Рациональная аппроксимация фрактальных импедансов

Для реализации фрактального импеданса с помощью RC-цепей, рассмотренных выше, необходимо представить иррациональную функцию входного импеданса (иммитанса) (2) в виде дробно-рациональной функции вида (4). Известно, что для реализации этой функции пассивными элементами достаточно соблюдения следующих условий:

функция является вещественной при вещественном p ;

функция имеет на комплексной плоскости особенности, расположенные на отрицательной вещественной полуоси;

первым от начала координат расположен соответственно полюс функции – для входного импеданса $Z(p)$, нуль функции – для входного иммитанса $Y(p)$.

Заметим, что при ограниченном числе элементов цепи, реализация фрактального импеданса возможна лишь в ограниченной полосе частот.

Существует множество способов решения этой задачи. Здесь рассмотрим два способа, используемые на практике для реализации фрактальных импедансов для ПИД-регуляторов дробного порядка.

Метод Оусталупа (A. Oustaloup).

Пусть требуется реализовать фрактальный импеданс вещественного порядка вида (2) в диапазоне частот от ω_b до ω_h . При этом частоту ω_c выберем из условия $\omega_c = \sqrt{\omega_b \omega_h}$. Тогда выражение для нормированного фрактального импеданса можно записать как

$$\bar{Z}(p) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_b} \right)^{-\alpha} \left(\frac{1 + p/\omega_b}{1 + p/\omega_h} \right)^{-\alpha}. \quad (8)$$

Идея синтеза такой цепи основывается на интуитивном представлении, что фрактальные свойства цепи определяются рекурсивностью, т.е., используя рекурсивное распределение вещественных нулей и полюсов можно получить искомую аппроксимацию в виде

$$\bar{Z}(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{Z}_N(p), \quad (9)$$

где

$$\bar{Z}_N(p) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h} \right)^{-\alpha} \prod_{k=-N}^N \frac{1 + p/\omega'_k}{1 + p/\omega_k}. \quad (10)$$

Введем обозначение $\mu = \omega_h/\omega_b$. Тогда аппроксимирующую функцию можно записать в виде:

$$\bar{Z}_N(p) = C \cdot \prod_{k=-N}^N \frac{p + \omega'_k}{p + \omega_k}, \quad (11)$$

где $C = (\mu)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \prod_{k=-N}^N \frac{\omega_k}{\omega'_k}$

Пояснение идеи рекурсивного распределения вещественных нулей ω'_k и полюсов ω_k , а также формирования ЛАЧХ и ФЧХ фрактального импеданса, проиллюстрированы на рис. 14 (частотный масштаб – логарифмический).

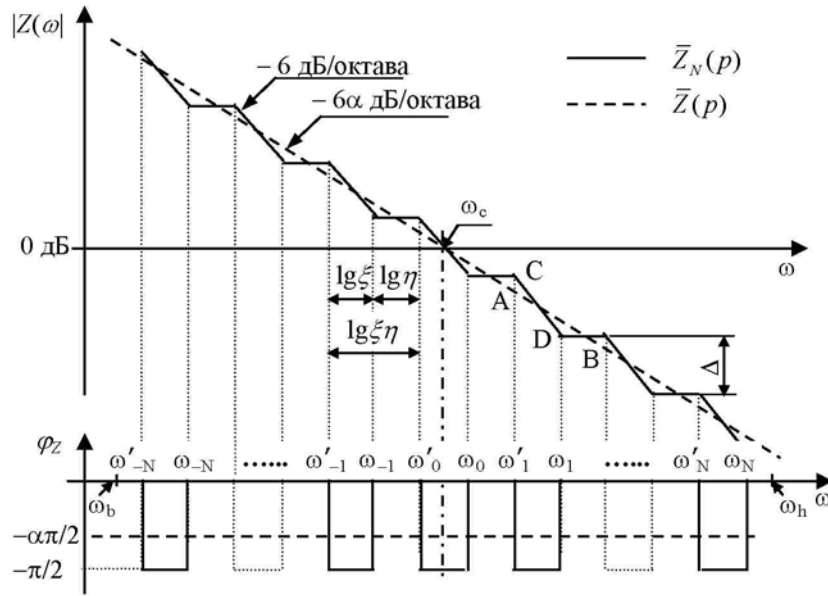


Рис. 14. Иллюстрация метода Оусталупа

Количество нулей и полюсов аппроксимирующей функции равно $2N+1$, где

$$N = \frac{\lg(\omega_N/\omega_0)}{\lg(\xi\eta)}. \quad (12)$$

Рекурсивное расположение нулей и полюсов определяется так называемыми *рекурсивными коэффициентами*

$$\xi = \frac{\omega_k}{\omega'_k} \text{ и } \eta = \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k}. \quad (13)$$

Результат сглаживания ступенек асимптотической ЛАЧХ $\bar{Z}_N(p)$ (сплошная линия на рис. 14) на интервале между ω_b и ω_h можно представить в виде прямой линии, которая на этом участке совпадает с асимптотой для ЛАЧХ $\bar{Z}(p)$ (пунктирная линия).

Крутизна наклона асимптотической кривой ЛАЧХ на участке СД, соответствующему переходу от нуля к полюсу функции $\bar{Z}_N(p)$, может быть найдена как

$$-6 \text{ дБ} / \text{окт} = \frac{\Delta \text{дБ}}{\lg \xi}.$$

С другой стороны крутизна наклона сглаживающей прямой на участке АВ может быть записана как

$$-6\alpha \text{ дБ} / \text{окт} = \frac{\Delta \text{дБ}}{\lg \xi + \lg \eta}.$$

Отсюда можно выразить дробный порядок α через значения рекурсивных коэффициентов ξ и η :

$$\alpha = \frac{\lg \xi}{\lg(\xi\eta)}. \quad (14)$$

Из рис. 14 видно, что асимптота для $\bar{Z}(p)$ в диапазоне частот между ω_b и ω_h пересекает середины горизонтальных участков асимптотической кривой для $\bar{Z}_N(p)$, длины которых равны $\lg \eta$. Следовательно, учитывая логарифмический масштаб, частоты ω'_{-N} и ω_N можно выразить через ω_b и ω_h как

$$\omega'_{-N} = \omega_b \sqrt{\eta} \quad \text{и} \quad \omega_N = \omega_h / \sqrt{\eta}. \quad (15)$$

Анализируя ФЧХ аппроксимирующей функции (сплошная линия), можно заметить, что сглаживающая ФЧХ, соответствующая функции $\bar{Z}(p)$, может быть представлена прямой линией с постоянной фазой (пунктирная линия), величина которой также может быть выражена через рекурсивные коэффициенты.

Так, если ФЧХ аппроксимирующей функции ассоциировать с периодической импульсной последовательностью с периодом $\lg(\xi\eta)$, длительностью импульса $\lg(\xi)$ и амплитудой $\pi/2$, то усреднение этой последовательности за период можно выразить как

$$\varphi_c = \frac{\frac{\pi}{2} \lg \xi}{\lg(\xi\eta)}. \quad (16)$$

Отсюда с учетом (14) получим

$$\varphi_c = \alpha \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Из анализа рис. 14 следует, что отношение граничных частот также можно выразить через рекурсивные коэффициенты:

$$\mu = \frac{\omega_h}{\omega_b} = (\xi\eta)^{2N+1}. \quad (18)$$

Отсюда можно выразить произведение рекурсивных коэффициентов ξ и η в виде

$$\xi\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{2N+1}}, \quad (19)$$

которое физически представляет собой отношение частот соседних нулей или полюсов аппроксимирующей функции, т.е.

$$\xi\eta = \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}. \quad (20)$$

Выразим рекурсивный коэффициент ξ из выражения (4.14) как функцию произведения $\xi\eta$. Получим

$$\xi = (\xi\eta)^\alpha. \quad (21)$$

Тогда рекурсивный коэффициент η можно получить из очевидного соотношения $\eta = (\xi\eta)^{\xi^{-1}}$ в виде

$$\eta = (\xi\eta)^{1-\alpha}. \quad (22)$$

Следовательно, используя (19), рекурсивные коэффициенты ξ и η можно выразить как

$$\xi = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{\alpha}{2N+1}} \quad \text{и} \quad \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1-\alpha}{2N+1}}, \quad (23)$$

откуда видно, что рекурсивные коэффициенты ξ и η зависят только от N при заданных значениях α и μ .

Учитывая, что индексы переходных частот меняются от $-N$ до N , на основании рис. 14. можно записать выражение для k -го нуля в виде

$$\lg \omega'_k = \lg \omega'_{-N} + (k + N) \lg(\xi\eta)$$

или

$$\omega'_k = (\xi\eta)^{k+N} \omega'_{-N}.$$

С учетом (15) это выражение можно представить в виде

$$\omega'_k = (\xi\eta)^{k+N} \eta^{\frac{1}{2}} \omega_b. \quad (24)$$

Окончательно, используя (19)-(23), выражение для частоты k -го нуля аппроксимирующей функции можно записать как

$$\omega'_k = (\mu)^{\frac{(k+N+0,5(1-\alpha))}{2N+1}} \omega_b. \quad (25)$$

Аналогичным образом найдем выражение для частоты k -го полюса. С учетом (24) можно записать

$$\omega_k = \xi (\xi\eta)^{k+N} \eta^{\frac{1}{2}} \omega_b, \quad (26)$$

и с учетом (19)-(23) выражение (4.26) для k -го полюса аппроксимирующей функции получить в виде

$$\omega_k = (\mu)^{\frac{(k+N+0,5(1+\alpha))}{2N+1}} \omega_b. \quad (27)$$

Переходные частоты, определённые таким образом, в совокупности с (11) полностью определяют аппроксимирующую дробно-рациональную функцию $\bar{Z}_N(p)$.

Формулы, полученные из рис. 14, справедливы в целом для $0 < |\alpha| < 1$. При этом необходимо учесть следующее:

- если α положительно, то $\xi > 1$ и распределение нулей и полюсов начинается с нуля;
- если α отрицательно, то $0 < \xi < 1$ и распределение нулей и полюсов начинается с полюса.

Рассмотрим пример синтеза, используя программу Матлаб.

Пример 1. Спроектировать на основе методов, рассмотренных в данном разделе, электрическую цепь пятого порядка, обладающую фрактальным импедансом порядка 0,3 в диапазоне частот от 0,001 рад/с до 1000 рад/с.

Используя формулы (11), (25) и (27) создадим функцию вычисления дробно-рациональной аппроксимирующей функции фрактального импеданса. Эта функция имеет вид:

```
function G=ousta_fod(r, N, w_L, w_H)
% r: дробный порядок  $\alpha \in [-1,1]$ 
% N: пределы суммирования
% w_L: нижняя граница рабочего диапазона частот
% w_H: верхняя граница рабочего диапазона частот
% G: вид функции, аппроксимирующей фрактальный импеданс вида  $p^\alpha$ 
mu=w_H/w_L; k=-N:N;
w_kp=(mu).^((k+N+0.5-0.5*r)/(2*N+1))*w_L;
w_k=(mu).^((k+N+0.5+0.5*r)/(2*N+1))*w_L;
C=(mu)^(-r/2)*prod(w_k./w_kp);
G=tf(zpk(-w_kp', -w_k', C))
```

В результате выполнения команд:

```
N=2; w1=1e-3; w2=1e3;
gl=ousta_fod(-0.3, N, w1, w2);
```

формируется в символьном виде аппроксимирующая функция

$$\frac{0.1259 s^5 + 51.09 s^4 + 1230 s^3 + 1862 s^2 + 177.1 s + 1}{s^5 + 177.1 s^4 + 1862 s^3 + 1230 s^2 + 51.09 s + 0.1259} \quad (28)$$

По команде

```
bode(zpk(-w_kp', -w_k', C))
```

строятся графики ЛАЧХ и ФЧХ данной аппроксимирующей функции. На рис. 15 изображены частотные характеристики $\bar{Z}_N(p)$ для трех значений N: 2, 3 и 4. Можно заметить, что ЛАЧХ $\bar{Z}_N(p)$ достаточно точно аппроксимирует ЛАЧХ фрактального импеданса уже при N = 2 (порядок аппроксимирующей функции равен 5) во всем диапазоне рабочих частот, а вот ФЧХ при N = 2 имеет непостоянство фазы порядка $\pm 4^\circ$ в более узком, чем определено в заданном частотном

диапазоне (примерно на две декады). С ростом N непостоянство фазы можно существенно уменьшить, но лишь в еще более узком диапазоне частот.

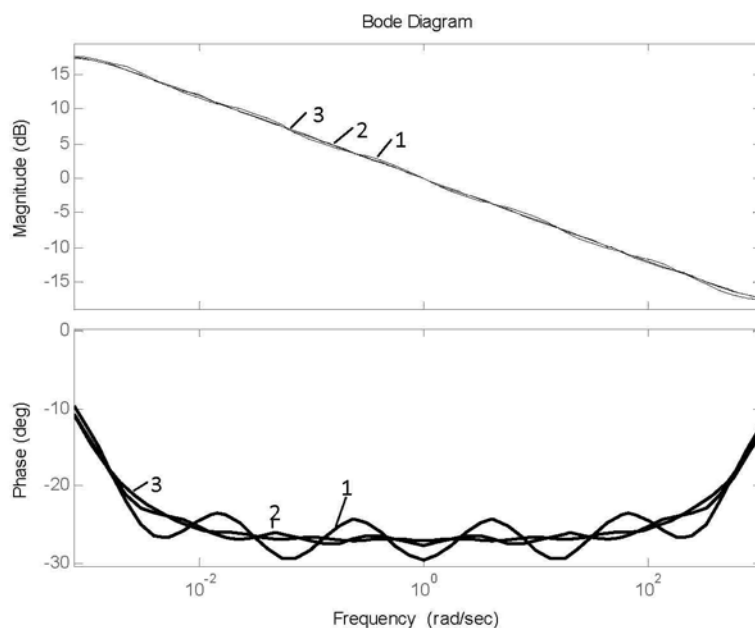


Рис. 15. ЛАЧХ (верхний график) и ФЧХ (нижний график) аппроксимирующих функций $\bar{Z}_N(p)$, полученных методом Оусталопа: 1) $N = 2$; 2) $N = 3$; 3) $N = 4$

В результате выполнения команд

$$[b,a]=zp2tf(-w_{kp}',-w_{k}', C)$$

$$[r,p,k]=residue(b,a)$$

можно получить разложение полученной аппроксимирующей функции (28) на сумму простых дробей, имеющей вид:

$$Z(p) = 0,1259 + \frac{24,49}{p + 165,96} + \frac{3,6743}{p + 10,4713} + \frac{0,5325}{p + 0,6607} + \frac{0,0774}{p + 0,0417} + \frac{0,0122}{p + 0,0026}.$$

В соответствии с правилами замены слагаемых разложения эквивалентными проводимостями звеньев электрической цепи (первая форма Фостера), реализующая цепь будет иметь вид, изображенный на рис. 16.

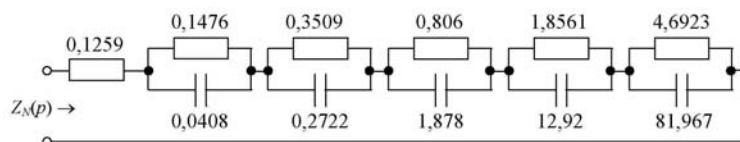


Рис. 16. Реализующая цепь аппроксимирующей функции (28)

Анализируя номиналы элементов звеньев цепи, можно заметить, что отношение максимального номинала резистора к минимальному составляет 37, а для конденсаторов это соотношение превышает 2000. Поэтому такую цепь достаточно

сложно изготовить по интегральной технологии, не применяя различные материалы диэлектриков конденсаторов, чтобы минимизировать размеры конструкции.

Для проверки правильности синтеза цепи, входной импеданс цепи был измерен в программе схемотехнического моделирования. Полученные результаты (в том виде, как это отображается в программе), показаны на рис. 17. ЛАЧХ и ФЧХ полностью совпадают с теми, которые изображены на рис. 14. Это свидетельствует о том, что синтезированная цепь точно реализует аппроксимирующую дробно-рациональную функцию, полученную методом Оусталупа.

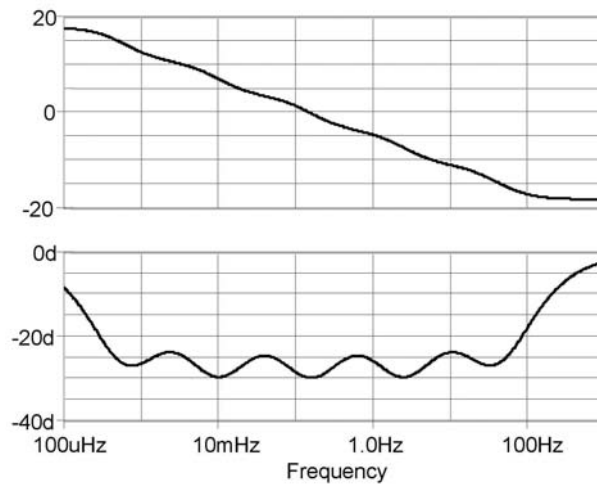


Рис. 17. Результаты моделирования цепи (рис. 16) в программе схемотехнического моделирования: ЛАЧХ (верхний график); ФЧХ (нижний график)

Метод Шареффа (A. Shareff)

Этот метод основан на предположении, что фрактальный импеданс, определяемый выражением (3) можно представить в виде

$$\bar{Z}(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^\alpha} \quad (29)$$

и аппроксимировать с помощью дробно-рациональной функции от p :

$$\bar{Z}_N(p) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{\omega'_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\omega_i}{\omega'_i} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (p + \omega'_i)}{\prod_{i=0}^N (p + \omega_i)} \cdot \omega_N. \quad (30)$$

Рекурсивное распределение полюсов и нулей в этом методе задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \omega_c 10^{\frac{y}{20\alpha}}, & \omega'_0 &= \omega_0 10^{\frac{y}{10(1-\alpha)}}; \\
\omega_1 &= \omega'_0 10^{\frac{y}{10\alpha}}, & \omega'_1 &= \omega_1 10^{\frac{y}{10(1-\alpha)}}; \\
& & & \vdots \\
\omega'_{N-1} &= \omega_{N-1} 10^{\frac{y}{10(1-\alpha)}}, & \omega_N &= \omega'_{N-1} 10^{\frac{y}{10\alpha}},
\end{aligned} \tag{31}$$

где y – максимально допустимое отклонение ЛАЧХ аппроксимирующей функции от асимптотической ЛАЧХ, соответствующей $Z(p)$.

Введем обозначения

$$a = 10^{y/10(1-\alpha)}; \quad b = 10^{y/10\alpha}; \quad ab = 10^{y/10\alpha(1-\alpha)}, \tag{32}$$

физический смысл которых можно получить из анализа соотношений:

$$\begin{aligned}
\frac{\omega'_0}{\omega_0} = \frac{\omega'_1}{\omega_1} = \dots = \frac{\omega'_{N-1}}{\omega_{N-1}} = a; & \quad \frac{\omega_1}{\omega'_0} = \frac{\omega_2}{\omega'_1} = \dots = \frac{\omega_N}{\omega'_{N-1}} = b. \\
\frac{\omega'_1}{\omega'_0} = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \dots = \frac{\omega'_{N-1}}{\omega'_{N-2}} = ab; & \quad \frac{\omega_1}{\omega'_0} = \frac{\omega_2}{\omega'_1} = \dots = \frac{\omega_N}{\omega'_{N-1}} = ab.
\end{aligned} \tag{33}$$

Тогда полюса и нули аппроксимирующей рациональной функции получим на основании (31) в виде следующих рекуррентных соотношений:

$$\omega_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad \omega_i = \omega_0 (ab)^i, \quad \omega'_i = a \omega_0 (ab)^i. \tag{34}$$

Число полюсов и нулей связано с желаемой полосой и допустимой ошибкой аппроксимации ЛАЧХ и может быть найдено из выражения:

$$N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_0}\right)}{\log(ab)} \right\rceil + 1, \tag{35}$$

где $\omega_{\max} = L \cdot \omega_h$, L – масштабный множитель (10...100).

5. Метод получения фрактального импеданса на основе рекурсивного вложения симметричных лестничных цепей

Рассмотрим еще один принцип создания фрактального импеданса произвольного порядка на основе многозвенной RC-цепи, звенья которой представляют собой симметричные скрещенные многополюсники (рис. 18).

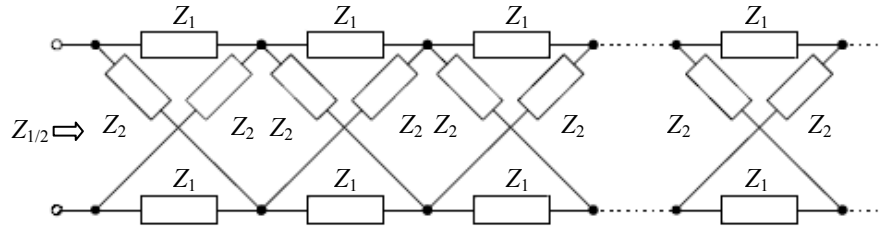


Рис. 18. Схема симметричной лестничной цепи на основе симметричных скрещенных четырехполюсников

Из теории четырехполюсников известно, что если симметричный четырехполюсник нагрузить на его характеристическое сопротивление Z_c , то входное сопротивление такой цепи будет равно характеристическому сопротивлению (рис. 19). Характеристическое сопротивление можно найти как $Z_c = \sqrt{Z_{xx} \cdot Z_{кз}}$, где Z_{xx} и

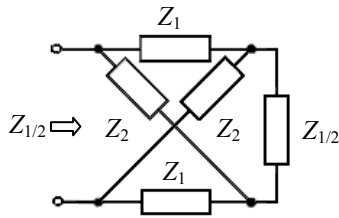


Рис. 19. Эквивалентная схема фрактального импеданса порядка $\frac{1}{2}$

$Z_{кз}$ – входные сопротивления звена симметричного четырехполюсника соответственно при холостом ходе и коротком замыкании на второй паре зажимов. Можно показать, что в данном случае $Z_c = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2}$. Если принять, что $Z_1 = R$, $Z_2 = 1/pC$, то входное сопротивление эквивалентной схемы многозвенной RC-цепи, изображенной на рис. 18,

будет равно

$$Z_{вх} = \eta^2 p^{-\frac{1}{2}}, \quad (36)$$

где $\eta = R/C$.

При этом связь между током и напряжением на входе в операторной форме будет выражаться как

$$U(p) = \eta^2 p^{-\frac{1}{2}} I(p) \quad (37)$$

Применим к этому выражению обратное преобразование Лапласа. Тогда при нулевых начальных условиях в цепи связь между мгновенными значениями напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ получим в виде:

$$u(t) = \frac{\eta^2}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{i(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau. \quad (38)$$

Используя полученный фрактальный импеданс порядка $\frac{1}{2}$ можно аналогичным образом получить фрактальный импеданс порядка $\frac{1}{4}$ на основе схемы, изображенной на рис. 20.

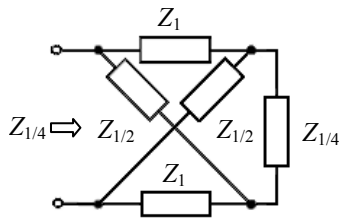


Рис. 4.20. Эквивалентная схема фрактального импеданса порядка $\frac{1}{4}$

По аналогии с (36) получим

$$Z_{1/4} = (Z_1 Z_{1/2})^{\frac{1}{2}} = (R\eta^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = R^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{4}} p^{-\frac{1}{4}}. \quad (39)$$

Связь между входным напряжением и током в операторной форме для этой схемы определяется как

$$U(p) = R^{1/2} \eta^{1/4} p^{-1/4} I(p), \quad (40)$$

а обратное преобразование Лапласа можно представить в

виде:

$$u(t) = \frac{R^{1/2} \eta^{1/4}}{\Gamma(1/4)} \int_0^t \frac{i(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{4}}} d\tau, \quad (41)$$

т.е. мгновенные значения напряжения и тока на входе данной цепи будут связаны между собой интегралом дробного порядка $\frac{1}{4}$.

Обобщая рассмотренный принцип построения фрактального импеданса, можно показать, что импеданс рекурсивной структуры, изображенной на рис. 21, реализует фрактальный импеданс с показателем дробностепенной зависимости от частоты $1/2^n$.

Полагая, что

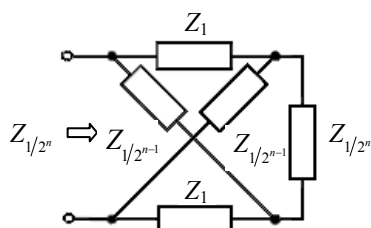


Рис. 21. Эквивалентная схема фрактального импеданса порядка $1/2^n$

$$Z_{1/2^{n-1}} = R^{\frac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}}} \eta^{\frac{1}{2^{n-1}}} p^{-\frac{1}{2^{n-1}}}, \quad (42)$$

можно получить

$$Z_{1/2^n} = R^{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}} \eta^{\frac{1}{2^n}} p^{-\frac{1}{2^n}}. \quad (43)$$

При этом, применяя обратное преобразование Лапласа, получим связь между мгновенными значениями напряжения и тока на входе схемы в виде

$$u(t) = \frac{R^{\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}} \eta^{\frac{1}{2^n}}}{\Gamma(1/2^n)} \int_0^t \frac{i(\tau)}{(t-\tau)^{1/2^n+1}} d\tau. \quad (44)$$

Аналогичным образом можно показать, что мгновенные значения тока и напряжения связаны между собой с помощью оператора дробного дифференцирования порядка $1/2^n$ вида

$$i(t) = \frac{1}{R \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \frac{1}{\eta^{2^n}} \Gamma(1-1/2^n)} \int_0^t \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{1/2^n}} d\tau. \quad (45)$$

Из проведенного анализа можно сделать вывод, что принцип построения фрактального импеданса порядка $1/2^n$ заключается по существу в рекурсивном вложении фрактальных импедансов порядка $1/2$ ($n - 1$) раз. Такая структура обладает высокой степенью самоподобия. Это наглядно подтверждает, что *дробные исчисления являются математической основой анализа фрактальных систем.*

Учитывая определение производной дробного порядка по Грюнвальду-Летникову, выражение (45) можно переписать как

$$i(t) = \frac{1}{R \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \frac{1}{\eta^{2^n}}} {}_0D_t^{2^{-n}} u(t), \quad (46)$$

где ${}_0D_t^{2^{-n}} u(t)$ - оператор дифференцирования порядка 2^{-n} .

Отсюда можно заключить, что оператор $D^{2^{-n}}$ осуществляет рекурсивное выполнение n раз оператора $D^{1/2}$, а не возведение этого оператора в степень n .

Используя свойство линейности и полугрупповое свойство дробных интегралов и производных совместно с принципом рекурсивного вложения, рассмотренным выше, можно создавать фрактальные импедансы произвольного порядка на основе RC-элементов с сосредоточенными параметрами.

6. Физическая реализация фрактальных импедансов на основе резистивно-емкостных структур с распределенными параметрами

До появления микроэлектроники в середине прошлого века входное сопротивление полубесконечного RC-кабеля (RC-линии) служило лишь иллюстрацией аналоговой реализации операций интегрирования и дифференцирования половинного порядка. Физической же реализацией RC-кабеля служила лестничная цепь, схема которой приведена на рис. 22, а.

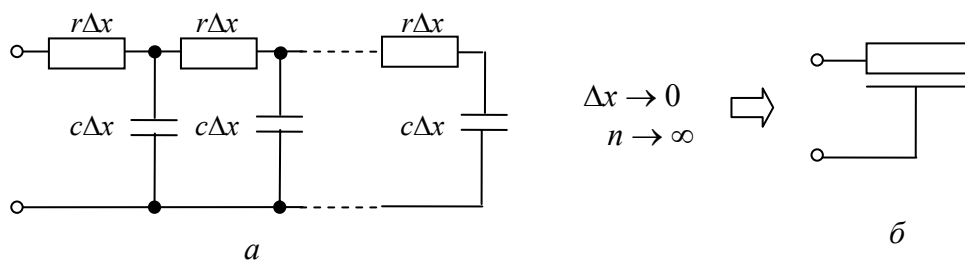


Рис. 22. Лестничная цепь (а), моделирующая характеристики RC-линии (б): r , c , Δx – соответственно погонное сопротивление, погонная емкость и отрезок длины RC-линии

С появлением микроэлектроники лестничные RC-цепи стало возможным заменить пленочными и полупроводниковыми конструкциями, изображения которых приведены на рис. 23 – 24.

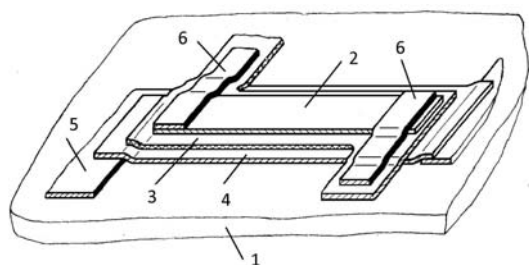


Рис. 22. Конструкция трехслойного тонкопленочного RC-ЭТП:
1 – подложка; 2 – резистивная пленка; 3 – диэлектрическая пленка; 4 – обкладка; 5 – вывод обкладки; 6 – выводы резистивного слоя

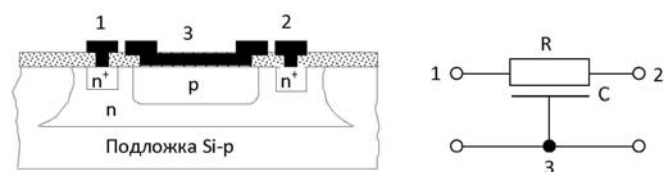


Рис. 23. RC-ЭТП на основе биполярной транзисторной структуры

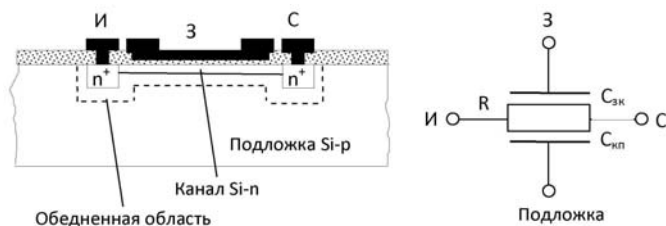


Рис. 24. RC-ЭТП на основе МОП-структуры

Они выполняли те же функции при меньших размерах, с более высокой точностью аппроксимации характеристики идеального RC-кабеля, обладая более высокой температурной стабильностью и другими преимуществами, основанными на возможностях интегральной технологии изготовления.

Фотографии некоторых реальных тонкопленочных и толстопленочных RC-

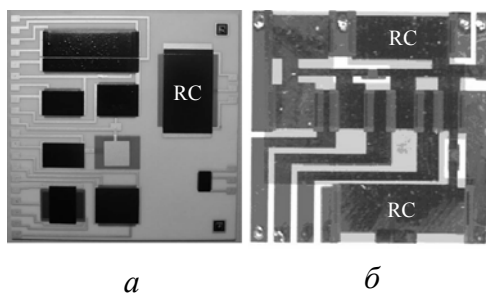


Рис. 25. Фотографии подложек с толстопленочными (а) и тонкопленочными (б) RC-ЭТП

элементов с распределенными параметрами изображены на рис. 25 (помечены как RC).

Как правило, ограничения по площади и предельным параметрам диэлектрических слоев этих элементов не позволяли создавать RC-ЭТП для низких и инфранизких частот. Поэтому наряду с пленочными появились RC-ЭТП, конструк-

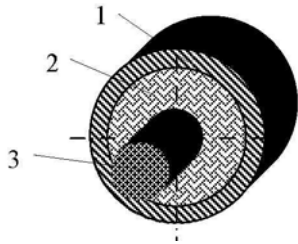


Рис. 26. RC-ЭРП на основе микропровода:
1 – проводящий слой;
2 – диэлектрик; 3 – резистивный микропровод

тивно выполненные в виде RC-кабеля (рис. 26). Здесь центральная жила – микропровод из материала, обладающего высоким удельным сопротивлением, защищенный диэлектрической изоляцией; поверх диэлектрика наносится металлизация. Такой провод навивается на керамический каркас и RC-ЭРП конструктивно оформляется как дискретный резистор. Используя RC-ЭРП на основе микропровода, можно достичь больших значений

τ_{RC} (единицы секунд). Однако сложность создания неоднородности удельных параметров по длине кабеля ограничивает порядок реализуемого ими фрактального импеданса величиной $1/2$. Кроме того, RC-ЭРП на микропроводе принципиально одномерный элемент, что снижает его схемотехнические возможности.

Интегральные способы изготовления RC-ЭРП позволяют формировать малогабаритные элементы с распределенными параметрами, порядок фрактального импеданса которых можно изменять различными конструктивными, схемотехническими и технологическими приемами: выполнением пленочных слоев с различными законами изменения удельных параметров, формированием локальных неоднородностей в слоях (например, вырезы), увеличением количества резистивных, проводящих и диэлектрических слоев, увеличением количества контактов, изменением коммутации между слоями, изменением схем включения и т.п. Более того, параметры (в том числе и порядок фрактального импеданса) пленочных и полупроводниковых RC-ЭРП можно изменять за счет воздействия физических полей на чувствительные к этим полям материалы резистивных и диэлектрических слоев.

7. Физическая реализация фрактальных импедансов на основе наноструктурированных материалов

Известно, что дробностепенная зависимость входного импеданса от частоты также наблюдается при исследовании проводимости композиционных материа-

лов. Причем величина показателя α и частотный диапазон проявления этой зависимости определяются структурой перколяционного кластера.

Наблюдаемые закономерности можно объяснить наличием в композите множества альтернативных путей протекания тока. При этом ток может протекать по хорошо проводящим каналам, представляющим последовательности металлических зерен, контактирующих между собой, по проводящим путям, состоящим из зерен с наличием полупроводящих фаз, а также в результате туннелирования или прыжковых механизмов электропроводности через диэлектрические слои.

В этом случае проводимость имеет комплексный характер, а модуль и фаза проводимости будут зависеть от частоты примерно так же, как зависит от частоты проводимость системы «шероховатый электрод-электролит».

Такие особенности композиционных материалов наталкивают на мысль о возможности создания фрактальных радиоэлементов на этой основе. При этом проводящая фаза внедряется в полимерную матрицу. Меняя характер основы, материал наполнителя, его концентрацию и дисперсность и т.д., можно изменять характер образующегося перколяционного кластера и таким образом формировать необходимые параметры полученного на этой основе фрактального радиоэлемента.

Для примера на рис. 27 приведены изображения образцов наноструктурированных полимерных композиционных материалов, состоящих из металлосодержащих наночастиц, распределенных по объему матрицы из полиэтилена, полученные с помощью электронного микроскопа JEM-1011 фирмы JEOL.

Разработанные композиционные материалы на основе полиэтилена высокого давления (ПЭ), содержащего наночастицы различного состава и строения представляют собой неоднородную неупорядоченную дисперсную систему, в которой полимерная матрица является дисперсионной средой, а наночастицы – дисперсной фазой. Показано наличие явно выраженных концентрационных (массовое содержание наполнителя) зависимостей физических параметров (плотность, диэлектрическая проницаемость, электропроводность др.) для таких материалов.

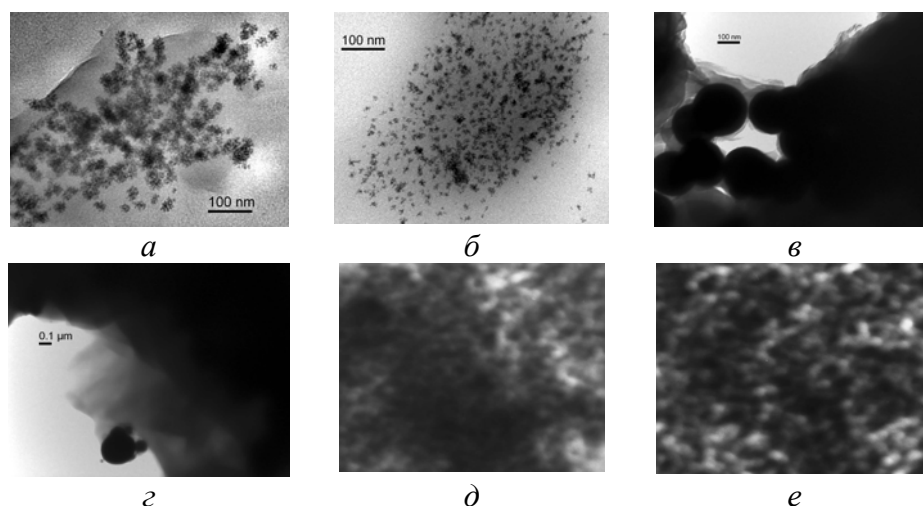


Рис. 27. ТЕМ-изображения образцов наноструктурированных полимерных композиционных материалов на основе ПЭ: *a* – Mo (10 масс. %); *б* – Mo (20 масс. %); *в* – Bi (10 масс. %); *г* – Bi (20 масс. %); *д* – Fe (10 масс. %); *е* – Fe (20 масс. %)

Образцы с содержанием наночастиц молибдена получены терморазложением гексакарбонила молибдена в матрице ПЭ (состав наночастиц: MoO_2 , металлический молибден). Образцы с содержанием наночастиц висмута получены терморазложением ацетата висмута в матрице ПЭ (состав наночастиц: Bi_2O_3 , металлический висмут). Образцы с содержанием наночастиц железа получены терморазложением пентакарбонила железа в матрице ПЭ (состав наночастиц: Fe_2O_3 , Fe_3O_4 , металлическое железо).

Пример конструктивной реализации фрактальных радиоэлементов, принцип действия которых основан на протекании тока через матрицу, в которой сформирована система нанопроводников (nanowire), описан в патенте США (US 2006/0267595 A1). На рис. 28 показан принцип образования элемента, а также конструктивные варианты предлагаемого элемента.

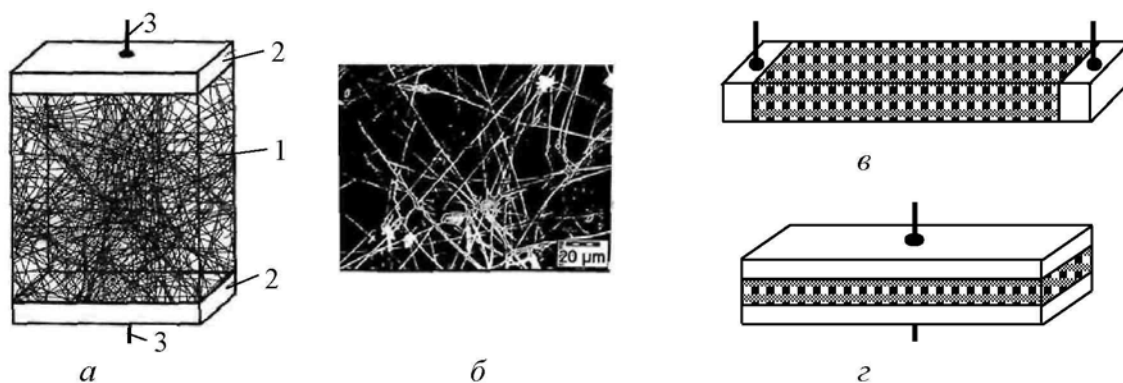


Рис. 28. Фрактальный элемент: *a* – принцип образования; *б* - микроструктура фрактальной среды, полученная с помощью сканирующего электронного микроскопа; *в*, *г* – конструктивные варианты (1 – непроводящая основа (матрица) с нанопроводниками, 2 – проводящие пластины, 3 – выводы)

Материал 1, расположенный между двумя контактными пластинами 2 включает в себя трехмерный комплекс нанопроводников. Нанопроводники являются электрически проводящими, обладающими либо незначительным сопротивлением, либо сопротивлением заданной величины. Например, нанопроводники могут быть сделаны из металл-металл полимерных звеньев или из любого другого материала, подходящего для создания нанопроводников желаемой проводимости или сопротивления.

Полимерные звенья могут быть одномерными и могут быть сформированы частичным окислением металлических комплексов, например, частично окисленных платиновых комплексов. Одним из методов частичного окисления может быть фотоокисление. Комплекс может включать несколько нанопроводников, которые касаются друг друга, но в целом комплекс изготавливается так, чтобы уменьшить взаимосвязь индивидуальных проводников. Это можно осуществить за счет заряда катионов, которые вызывают отталкивание индивидуальных нанопроводников и таким образом проводники оказываются изолированными.

Нанопроводники заключены в матрицу. Материал матрицы может характеризоваться некоторой проводимостью, в том числе быть непроводящим. Он может быть полимером, кополимером или смесью того и другого. Материал может находиться в любом состоянии: твердом, жидком, в форме геля или золь-геля, которое позволяет сохранить определенное пространственное распределение проводников для сохранения заданного фрактального импеданса.

Нанопроводники могут быть ориентированы случайным образом или могут иметь предпочтительную ориентацию. Они могут быть однородны по размерам и распределению в комплексе, а также могут иметь и определенные законы распределения по размерам и расположению. Материал матрицы может быть однородным или неоднородным, в котором нанопроводники могут иметь определенные изменения как по размерам, так и по распределению в комплексе.

На рис. 28, а схематически показан фрактальный элемент, в котором проводящий комплекс сформирован в виде объемной твердой конструкции с выводами на каждом его конце. На рис. 28, б проводящий комплекс выполнен в виде тонкой

пленки с проводящими пластинами, образующими контакт с обеими поверхностями пленки.

На рис. 29 приведены графики ЛАЧХ и ФЧХ экспериментального фрактального элемента, материал которого состоит из комплекса $[\text{NH}_2\text{BU}_2]_x[\text{Pt}(\text{Ox})_2]$ для нанопроводников в PVA/Pani кополимере, где x – вещественные числа между 1 и 2 включительно. Видим, что ФЧХ импеданса лежит в пределах от -13° до -18° в диапазоне частот около пяти декад.

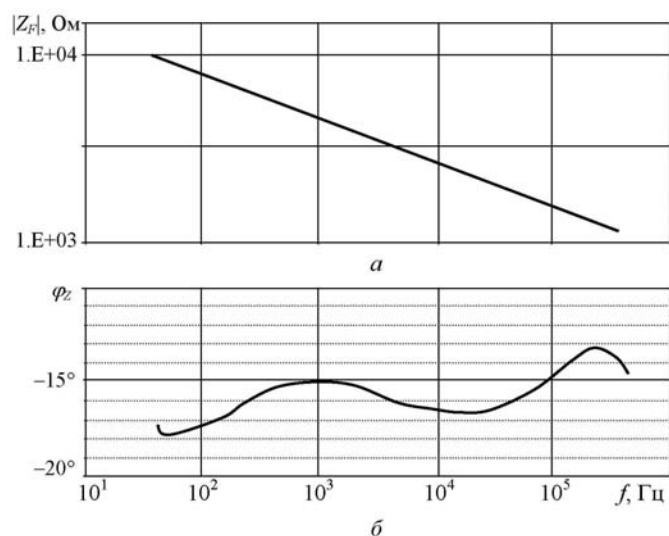


Рис. 29. ЛАЧХ (а) и ФЧХ (б) фрактального элемента (Патент US 2006/0267595 A1)

Еще одним способом создания фрактальных элементов, особенно в диапазоне СВЧ, является использование микрорельефа обработанных поверхностей. Наличие фрактальности в таких материалах и средах можно наблюдать, в частности, по изменению скин-эффекта и импеданса. Именно пространственная/временная эволюция тока позволяет электромагнитному полю “прощупать” фрактальные характеристики созданной физической среды.

Это отчетливо проявляется в области *нанотехнологий*, для которых *топология шероховатостей* рассматривается не как вторичная характеристика, являющаяся “откликом” структуры поверхностного слоя на воздействие того или иного физического процесса (как в обработке резанием, например), а как свойство самой структуры, тем более, что размеры таких слоев сопоставимы с длиной свободного пробега в них электронов.

Для формирования необходимой топологии шероховатости можно использовать интенсивно развивающиеся методы обработки поверхностей концентриро-

ванными потоками энергии (лазерной, плазменной, электроэрозионной), а также с помощью нанотехнологий (химическая сборка, золь-гель процессы, парофазное осаждение металлов, атомно-слоевая эпитаксия).

8. Сравнительные характеристики способов формирования фрактальных импедансов и выбор конструктивно-технологической основы для реализации фрактальных радиоэлементов

Различные способы формирования фрактального импеданса, рассмотренные выше, создают хорошие предпосылки создания фрактальных элементов в широком диапазоне частот. Однако чтобы эта новая элементная база стала такой же распространенной, как, существующие пассивные элементы, необходимо, чтобы конструкция и технологии фрактальных элементов отвечала следующим критериям:

- совместимость с технологическими процессами изготовления полупроводниковых или пленочных элементов интегральных схем,
- возможность реализации требуемых частотных характеристик в широком диапазоне частот,
- возможность создания фрактальных импедансов с показателями дробностепенной зависимости от частоты α в максимальном диапазоне возможных значений ($0 < |\alpha| < 1$),
- возможность точной настройки параметров, определяющих функциональное назначение РС-ЭРП,
- возможность динамического изменения параметров.

В Таблице дана сравнительная оценка полноты удовлетворения предложенным выше критериям между этими конструктивно-технологическими вариантами РС-ЭРП. Максимальное удовлетворение критерию обозначается тремя звездочками.

Таблица. Сравнение характеристик RC-ЭРП, реализованных на основе различных конструктивно-технологических вариантов

Критерии	Электро-химические	Цепи на RC-ЭСП	Пленочные RC-ЭРП	На основе нанотехнологий
Совместимость с технологическими процессами изготовления полупроводниковых и пленочных элементов интегральных схем	★	★★	★★★	★
Возможность точной настройки параметров фрактального импеданса	★	★★★	★★★	?
Возможность динамического изменения параметров фрактального импеданса	★★	★	★★★	?
Возможность создания фрактальных импедансов в широком диапазоне частот	★	★★★	★★★	★★★
Габаритные размеры	★	★	★★★	★★★
Возможность моделирования реальных объектов, характеризующихся фрактальной размерностью	★	★★	★★★	★
Наличие методик и программного обеспечения проектирования	★	★★★	★★★	?
Суммарный показатель	7	12	18	8

RC-ЭРП на электрохимических ячейках, преимуществом которых является возможность работы в диапазонах сверхнизких частот, плохо совместимы с современными технологиями интегральных микросхем, воспроизводимость величины фрактального импеданса сильно зависит от воспроизводимости свойств границы электрод-электролит, которая в свою очередь определяется большим числом неконтролируемых факторов.

RC-ЭРП на основе полупроводниковой технологии также обладают хорошим потенциалом, особенно в связи с малыми размерами и возможностью управления их параметрами с помощью электрического поля. Но сложность учета поверхностных и объемных эффектов в полупроводниковом кристалле, наличие эффектов взаимодействия элементов интегральных схем между собой делают задачу изготовления фрактальных импедансов с заданной величиной и точностью показателя α трудно разрешимой.

Наиболее слабым местом фрактальных элементов на основе цепей на RC-ЭСП являются их большие габариты, сложность точной настройки параметров фрактального импеданса и практическая невозможность динамического изменения параметров фрактального импеданса.

Новые принципы формирования фрактальных импедансов, основанные проводимости комплексов нанопроводников или наночастиц проводящих мате-

лов, заключенных в полимерные матрицы, а также фрактальные импедансы, образующиеся в результате взаимодействия электромагнитных волн с проводящими поверхностями, обладающих фрактальной поверхностной топологией, не вышли еще из стадии исследований.

Как видно из Таблицы, наилучшим суммарным показателем по всем перечисленным критериям обладают пленочные РС-ЭРП. Поэтому, на наш взгляд, конструктивно-технологической основой новых элементов фрактальной радиоэлектроники могут стать пленочные РС-ЭРП.

Для желающих более подробно познакомиться с работами в области теории и практики фрактальных радиоэлементов на основе пленочных РС-ЭРП, можно порекомендовать Интернет-ресурс: <http://fractal-izh.ucoz.ru>