РИС. 5.3. Построение двухмасштабного канторовского стержня с $l_1 = 1/4$ и $l_2 = 2/5$. Фрактальная размерность такого канторовского множества $D = 0{,}6110$.

ление совпадает с определением, данным Мандельбротом для кривых Хельги фон Кох, для которых различные отрезки уменьшались в отношении $r_i = l_i$. *Размерность подобия* D_S такого множества есть размерность, удовлетворяющая соотношению

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} r_i^{D_S} = 1, \tag{5.5}$$

о чем мы говорили при обсуждении формулы (2.11).

В качестве примера рассмотрим канторовское множество, построенное, как на рис. 5.3. В n-м поколении число отрезков равно $\mathcal{N} = 2^n$. Самый короткий отрезок имеет длину $l_1^n = (1/4)^n$, самый длинный – $l_2^n = (2/5)^n$. Всего имеется $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ отрезков длиной $l_1^k l_2^{n-k}$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. В n-м поколении мера M_d определяется выражением

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_i^d = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} l_1^{kd} l_2^{(n-k)d} = (l_1^d + l_2^d)^n. \tag{5.6}$$

Так как $n \to \infty$ при $\delta = l_2^n \to 0$, мы заключаем, что мера M_d остается конечной в том и только в том случае, если $d = D$, где D удовлетворяет соотношению

$$\left(l_1^D + l_2^D\right) = 1. \tag{5.7}$$

Численное решение уравнения (5.7) при $l_1 = 1/4$ и $l_2 = 2/5$ дает $D = 0{,}6110$.