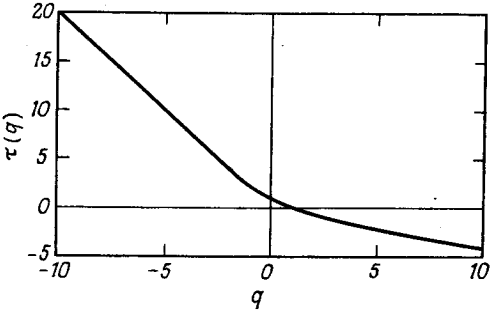

РИС. 6.6. Последовательность показателей массы $\tau(q)$ как функция порядка q момента для меры $M_d(q, \delta)$ биномиального мультипликативного процесса с $p = 0{,}25$.

6.8. Соотношение между $\tau(q)$ и $f(\alpha)$

Последовательность показателей массы связана с кривой $f(\alpha)$ общей зависимостью, которая может оказаться полезной в приложениях. Носителем мультифрактальной меры является множество $\mathscr{S}$ – объединение фрактальных подмножеств $\mathscr{S}_\alpha$ с индексом α, выбранным из континуума допустимых значений:

$$\mathscr{S} = \bigcup_\alpha \mathscr{S}_\alpha. \tag{6.42}$$

Какие фрактальные размерности описывают меру? Так как полное множество $\mathscr{S}$ фрактально с фрактальной размерностью D, подмножества имеют фрактальную размерность $f(\alpha) \leqslant D$. Для фрактальных подмножеств с фрактальной размерностью $f(\alpha)$ число $N(\alpha, \delta)$ отрезков длиной δ, необходимых для того, чтобы покрыть множества $\mathscr{S}_\alpha$ с индексом α в интервале от α до $\alpha + d\alpha$, равно

$$N(\alpha, \delta) = \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)}. \tag{6.43}$$

Здесь $\rho(\alpha)d\alpha$ – число множеств от $\mathscr{S}_\alpha$ до $\mathscr{S}_{\alpha+d\alpha}$. Для этих множеств мера μ_α в ячейке величины δ степенным образом зависит от δ (см. формулу (6.2)), что позволяет нам записать соотношение $\mu_\alpha = \delta^\alpha$, и поэтому меру M для множества $\mathscr{S}$, задаваемую соотношением (6.32), можно представить в виде

$$M_d(q, \delta) = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)} \delta^{\alpha q} \delta^d = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{q\alpha - f(\alpha) + d}. \tag{6.44}$$

Интеграл в правой части мажорируется интегралом, в котором подынтегральное выражение заменено его максимальным значением, т. е. таким, для которого

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{ q\alpha - f(\alpha) \right\}\Bigg|_{\alpha = \alpha(q)} = 0. \tag{6.45}$$

Следовательно, интеграл в выражении (6.44) асимптотически определяется формулой

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^{q\alpha(q) - f(\alpha(q)) + d}. \tag{6.46}$$