ность успеха $M(2x-1)$). Поэтому при $1/2 \leqslant x \leqslant 1$ вероятность достижения цели определяется вторым из пары равенств (10.10).

Эти уравнения совпадают с уравнениями (6.7), описывающими *меру* мультипликативного процесса, который обсуждался в разд. 6.2. Пример вероятности $M(x)$ выигрыша при смелой игре представлен на рис. 6.3 и рис. 10.3 как функция x для $p = 0{,}25$. Эта вероятность (мера) является растущей функцией x, причем эта функция сингулярна в том смысле, что почти всюду ее наклон равен нулю. Вероятность достижения цели увеличивается только на множестве точек, для которого мера Лебега равна нулю и левая производная $M(x)$ равна $+\infty$, а правая производная равна нулю (ясное обсуждение можно найти в [24]). Длина кривой $M(x)$ равна $L = 2$, поэтому это *не* фрактальная кривая, а фрактальная мера (см. обсуждения в разд. 6.2).

Уравнения (10.10) означают инвариантность меры $M(x)$ по отношению к аффинным преобразованиям координат. Эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}\colon (x, y) \to \left(\frac{1}{2}x, py\right), \\ &\mathrm{R}\colon (x, y) \to \left(\frac{1}{2}, p\right) + \left(\frac{1}{2}, (1-p)y\right) \end{aligned} \tag{10.11}$$

и отображают кривую $y = M(x)$ на себя – кривая самоаффинна. Этих преобразований *два*. Преобразование L отображает единичный квадрат в прямоугольник, помеченный буквой l на рис. 10.3. Оно просто уменьшает масштаб оси x в 2 раза, а масштаб оси y уменьшается множителем p. R-преобразование также укорачивает ось x вдвое, но масштаб оси y уменьшается множителем $1-p$, а не p. Кроме того, R-преобразование переносит сжатый единичный квадрат, и в итоге он отображается на прямоугольник, помеченный на рис. 10.3 буквой R.

Мандельброт [136, 137] обсуждает многие свойства самоаффинных фрактальных кривых, которые генерируются семействами аффинных преобразований. Он вводит класс *рекуррентно* самоаффинных фрактальных кривых, для которых справедливы соотношения, приведенные в табл. 10.1. Он же обсуждает дополнительные виды размерности, с помощью которых можно описывать самоаффинные фрактальные кривые.