лежит в основе практического определения фрактальной размерности в нескольких интересных случаях, обсуждаемых в последующих разделах.

Чтобы привести пример соотношения периметра и площади, рассмотрим остров, ограниченный квадратичной кривой Кох (см. рис. 2.9). Первичным элементом кривой является квадрат со стороной a. Генератор кривой при замене каждой ее стороны добавляет малый «полуостров» и вырезает участок «побережья» такого же размера. Поэтому при повторных преобразованиях кривой не меняется охватываемая ею площадь $A(\delta) = a^2$. Периметр кривой n-го порядка, $L_n = 4 \cdot 8^n \cdot (1/4)^n \cdot a$, равен длине береговой линии, если она измеряется с помощью эталона длины $\delta = (1/4)^n a = (1/4)^n \sqrt{A}$. Поэтому порядок кривой n можно выразить через ее площадь, $n = \ln(\delta/\sqrt{A})/\ln(1/4)$, и мы получаем $L_\delta = 4 \cdot 8^n \delta = 4\delta^{1-D} A^{D/2}$. Здесь $D = 3/2$ есть фрактальная размерность береговой линии острова, ограниченного квадратичной кривой Кох. Итак, такие острова удовлетворяют соотношению *периметра и площади* вида (12.2) с коэффициентом пропорциональности $C = 4$.

Другой пример связан с триадной кривой Кох. Здесь под островом будем понимать участок плоскости, заключенный между начальным элементом, т. е. отрезком длины a, и предельной кривой Кох (см. рис. 2.8). Охватываемая площадь равна $A = \sqrt{3}a^2/20$, а полная длина береговой линии n-го порядка равна $L_n = a + 4^n\delta$, если используется эталон длины $\delta = (1/3)^n a$. Это приводит к равенству

$$L_\delta = a + a^D \delta^{(1-D)}.$$

Как видим, если пренебречь первым членом в правой части, то получится *соотношение периметра и площади* (12.2). Отброшенный член представляет собой нефрактальный прямой участок границы островов. Этот пример показывает, что соотношение периметра и площади (12.2) может быть справедливо только в пределе малой длины эталона δ, когда длина фрактальной части береговой линии преобладает над вкладом любой *регулярной* части береговой линии. Нетрудно построить более сложные примеры, в которых разные участки берега имеют разные фрактальные размерности. В этом случае анализ показывает, что отношение периметра и площади ρ_D определяется наибольшим значением фрактальной размерности.

12.1. Фрактальная размерность облаков

При исследовании геометрии облаков и зон дождя, размеры которых заключены в широком диапазоне от 1 до $1{,}2 \cdot 10^6$ км^2, выяснилось, что периметр облака $P = L$ связан с его площадью A соотношением (12.2) с фрактальной размерностью границы облака $D = 1{,}35 \pm 0{,}05$ [116]. Эти результаты воспроизведены на рис. 12.2. Зоны дождя изучались с помощью отцифрованных радарных изображений, полученных с разрешением 1×1 км^2. Радиолокатор принимает микроволновое излучение,