Полная мера отрезков, представляющих популяцию, равна

$$M(x=1)=\sum_{i=0}^{2^n-1}\mu_1=\sum_{\xi=0}^{1}N_n(\xi)\Delta^n(\xi)=(\mu_0+\mu_1)^n=1. \qquad (6.11)$$

Ячейки, описывающие распределение популяции, полностью покрывают отрезок и содержат всю меру, т. е. любого члена популяции.

6.3. Фрактальные подмножества

В n-м поколении $N_n(\xi)$ отрезков имеют длину $\delta_n=2^{-n}$ и одну и ту же меру μ_ξ. Эти отрезки образуют подмножество $\mathscr{S}_n(\xi)$ единичного отрезка $\mathscr{S}=[0,1]$. Точки множества $\mathscr{S}_n(\xi)$ имеют среди первых знаков после запятой в двоичном разложении x-координаты одинаковое количество нулей, равное $k=\xi n$. Разумеется, различным точкам соответствуют различные последовательности нулей и единиц. В пределе при $n\to\infty$ величина ξ равна доле нулей в представлении точки множества $\mathscr{S}_\xi$ бесконечной двоичной дробью. Множество $\mathscr{S}_\xi$ – *фрактальное* множество точек. Чтобы убедиться в этом, покроем множество отрезками длины δ, образуем d-меру $M_d(\mathscr{S}_\xi)$, задаваемую соотношением (2.3), и определим фрактальную размерность $D(\xi)$ этого множества, исследуя, как ведет себя M_d при $\delta\to 0$ и $n\to\infty$:

$$M_d(\mathscr{S}_\xi)=\sum_{\mathscr{S}_\xi}\delta^d=N_n(\xi)\,\delta^d\underset{\delta\to 0}{\to}\begin{cases}0, & d>D(\xi),\\ \infty, & d<D(\xi).\end{cases} \qquad (6.12)$$

Используя формулу Стирлинга для факториала

$$n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}, \qquad (6.13)$$

получаем из формулы (6.9) приближенное выражение для $N_n(\xi)$:

$$N_n(\xi)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\xi)}}\exp\{-n(\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi))\}. \qquad (6.14)$$

Замечая, что в нашем случае $n=-\ln\delta/\ln 2$, мы заключаем, что меру M_d в формуле (6.12) (если пренебречь членом $n^{-1/2}$, дающим только логарифмическую поправку) можно представить в виде

$$M_d(\mathscr{S}_\xi)\sim\delta^{-f(\xi)}\delta^d, \qquad (6.15)$$

где показатель $f(\xi)$ определяется выражением

$$f(\xi)=-\frac{\xi\ln\xi+(1-\xi)\ln(1-\xi)}{\ln 2}. \qquad (6.16)$$

Следовательно, d-мера M_d для множества $\mathscr{S}_\xi$ остается конечной при $\delta\to 0$ лишь при условии, если $d=f(\xi)$, поэтому фрактальная размерность $D(\xi)$ множества $\mathscr{S}_\xi$ равна $f(\xi)$.

Популяция, порождаемая мультипликативным процессом, распределяется по множеству точек в единичном интервале $\mathscr{S}=[0,1]$. Это