Рассмотрим квадратичный закон изменения функции **f** в зависимости от аргумента **x**. Обычно такую зависимость записывают в виде

$$f(x) = ax + bx^2 + c \qquad (1.0)$$

Примем как постулат, что такая запись не достаточна для анализа изменений по рассматриваемому закону. Будем рассматривать изменения **x** и **f** как изменения между их "мгновенными состояниями", обозначаемыми индексами 1,2,3,4,… Т.е. изменения могут происходить от состояния 1 к состоянию 2, от 2 к 3, от 1 к 3, от 3 к 4, от 2 к 4, и т.д., но никогда в сторону уменьшения индекса, хотя сам владелец индекса при этом может меняться как в большую так и в меньшую стороны. Это важный момент, и термин "мгновенные состояния" здесь играет значительную роль, хотя возможно и требует некоторого уточнения или другого названия. Еще примем как постулат, что коэффициенты **a** и **b** так же меняются от состояния к состоянию, ибо ни кто не говорил, что они неизменны. Наше исследование как раз должно нам показать, изменяются коэффициенты при степенях аргумента или нет, и если меняются, то как. И это второй важный момент, ниже будет показано, что изменения коэффициентов при степенях аргумента несут в себе дифференциальный характер исходного изменения функции **f**. Свободный член **c** мы проигнорируем, т.к. он равноценен **f** и представляет собою одно из начальных состояний **f**, которое отражено соответствующим начальным индексом. Таким образом наша запись квадратичной зависимости **f(x)** будет представлена следующим видом:

$$f_2 - f_1 = a_1(x_2 - x_1) + b_1(x_2 - x_1)^2 \qquad (1.1)$$

где $x_1, x_2, f_1, f_2, a_1, b_1$ – соответствующие мгновенные состояния, а соответствующие разности – изменения от одного состояния к другому.

Для удобства примем следующие сокращения:

$$f_{21} = f_2 - f_1$$
$$x_{21} = x_2 - x_1$$

Тогда имеем следующую запись

$$f_{21} = a_1 x_{21} + b_1 x_{21}^2$$

Продолжим для других индексов-состояний

$$f_{31} = a_1 x_{31} + b_1 x_{31}^2$$
$$f_{32} = a_2 x_{32} + b_2 x_{32}^2$$

Т.е. состояние 2 начинается уже с другими коэффициентами – a_2, b_2, по-другому собственно и быть не может.
Посмотрим, что мы имеем

$$f_{32} = f_{31} - f_{21} = a_1 x_{31} + b_1 x_{31}^2 - a_1 x_{21} - b_1 x_{21}^2 = a_1(x_{31} - x_{21}) + b_1(x_{31}^2 - x_{21}^2) =$$
$$= a_1 x_{32} + b_1 x_{32}(x_{31} + x_{21}) = a_2 x_{32} + b_2 x_{32}^2$$

После сокращения на x_{32}

$$a_{21} = b_1(x_{31} + x_{21}) - b_2 x_{32}$$

Продолжим для следующих индексов-состояний

$$a_{31} = b_1(x_{41} + x_{31}) - b_3 x_{43}$$
$$a_{32} = b_2(x_{42} + x_{32}) - b_3 x_{43}$$

Дальше

$$
\begin{aligned}
&a_{32}=a_{31}-a_{21}=b_1(x_{41}+x_{31})-b_3x_{43}-b_1(x_{31}+x_{21})+b_2x_{32}= \\
&=b_1(x_{43}+x_{32})-b_3x_{43}+b_2x_{32}=b_2(x_{42}+x_{32})-b_3x_{43} \\
&b_1(x_{43}+x_{32})=b_2x_{42} \\
&b_1x_{42}=b_2x_{42} \\
&b_1=b_2
\end{aligned}
$$

Видим, что коэффициент **b** остается неизменным, тогда

$$a_{21}=b(x_{31}+x_{21})-bx_{32}=2bx_{21}$$

Подытожим

$$
\begin{aligned}
&f_{21}=a_1x_{21}+b_1x_{21}^2 \\
&a_{21}=2bx_{21} \\
&b_{21}=0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Аналогично можно получить для кубической зависимости

$$
\begin{aligned}
&f_{21}=a_1x_{21}+b_1x_{21}^2+c_1x_{21}^3 \\
&a_{21}=2b_1x_{21}+3cx_{21}^2 \\
&b_{21}=3cx_{21} \\
&c_{21}=0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Здесь изменение коэффициента a_{21} несет в себе смысл первой производной от функции f, b_{21} – второй производной, c_{21} – третьей.

Для многочлена n-степени $f_{21}=\sum_{i=1}^{n}a_{1(i)}x_{21}^i$ формула изменения производных коэффициентов имеет следующий вид

$$a_{21(i)}=\sum_{j=i+1}^{n}a_{1(j)}\frac{j!}{i!(j-i)!}x_{21}^{j-i} \tag{1.4}$$

Видим внутри биноминальный коэффициент $C_j^i=\frac{j!}{i!(j-i)!}$, т.е.

$$a_{21(i)}=\sum_{j=i+1}^{n}a_{1(j)}C_j^ix_{21}^{j-i} \tag{1.5}$$

Попытаемся вывести формулу (1.4) в общем виде

$$
\begin{aligned}
&f_{32}=\sum_{i=1}^{n}a_{2(i)}x_{32}^i=f_{31}-f_{21}=\sum_{i=1}^{n}a_{1(i)}x_{31}^i-\sum_{i=1}^{n}a_{1(i)}x_{21}^i=\sum_{i=1}^{n}a_{1(i)}((x_{32}+x_{21})^i-x_{21}^i)= \\
&=\sum_{i=1}^{n}a_{1(i)}(\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}x_{32}^jx_{21}^{i-j}-x_{21}^i)=\sum_{i=1}^{n}a_{1(i)}\sum_{j=1}^{i}\frac{i!}{j!(i-j)!}x_{32}^jx_{21}^{i-j}= \\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{1(j)}\frac{j!}{i!(j-i)!}x_{32}^jx_{21}^{j-i}=\sum_{i=1}^{n}a_{2(i)}x_{32}^i
\end{aligned}
$$

Если каждое слагаемое суммы $\sum_{i=1}^{n}$ в одной части этого равенства равно соответствующему слагаемому такой же суммы в другой части равенства (это надо доказать!), то

$$a_{2(i)} = \sum_{j=i}^{n} a_{1(j)} \frac{j!}{i!(j-i)!} x_{21}^{j-i}$$

или

$$a_{21(i)} = \sum_{j=i+1}^{n} a_{1(j)} \frac{j!}{i!(j-i)!} x_{21}^{j-i}$$

Аналогично многомерные зависимости похоже будут выражаться через полиноминальные коэффициенты.

Получив производные коэффициенты, обратными действиями получим первообразные. А именно, если функция $g_{21} = \sum_{k=1}^{m} b_{1(k)} x_{21}^{k}$ есть первый производный коэффициент исходной функции f_{21}, то

$$f_{21} = \sum_{k=0}^{m} \frac{b_{1(k)}}{k+1} x_{21}^{k+1} \qquad (1.6)$$

где $b_{1(0)} = g_1$ - свободный член функции g_{21}.

Если же $g_{21} = \sum_{k=1}^{m} b_{1(k)} x_{21}^{k}$ есть $(n-m)$-ый производный коэффициент исходной функции f_{21}, то

$$f_{21} = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{g_{1(i)}}{C_{i+n-m}^{n-m}} x_{21}^{i} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \frac{b_{1(j-n+m)}}{C_{j}^{n-m}} x_{21}^{j-n+m} \qquad (1.7)$$

где $g_{1(i)}$ – набор свободных членов, получаемых при первообразовании и определяемых из начальных условий. Конечно (1.6) и (1.7) требуют уточнений и пояснений.

Некоторые пояснения.

Запись **f(x)** - это ВСЕГДА изменение "эф" от нуля до **f** и изменение "икс" от нуля до **x**. Этого то и не достаточно, чтоб увидеть глубину изменений. Ввод в рассмотрение приращений "дельта икс" и "дельта эф" улучшает ситуацию, но не полностью, поскольку рассматривается одно единственное приращение. На изучении того, что происходит с приращением и построен весь анализ, при этом основные аналитические характеристики получаются после предельного перехода над приращением. Но то же самое можно получить без пределов просто внимательно рассматривая ИЗМЕНЕНИЯ между "мгновенными состояниями" переменных величин.
Камень, свободно падающий в земном поле тяготения, движется по квадратичному закону. При этом он имеет в каждой точке своей траектории меняющуюся скорость. Всем известный квадратичный закон движения камня описывает СТАРТОВЫЕ условия. Закон изменения скорости мы получаем только после дифференцирования, без дифференцирования о характеристиках скорости ничего не известно. Но введя в рассмотрение изменение между "мгновенными состояниями" движения, можно получить и форму изменения скорости, и доказательство неизменности ускорения в квадратичном движении БЕЗ дифференцирования.
С интегральными характеристиками посложнее. Для начала надо суметь показать, почему площадь под кривой есть изменение её первообразного коэффициента, но не пользуясь геометрическими интерпретациями и в рамках обозначенного в этой статье синтаксиса алгебраических изменений.

Попробуем исследовать квадратичную функцию. Имеем

$$\begin{aligned} f_{21} &= a_1 x_{21} + b x_{21}^2 \\ a_{21} &= 2 b x_{21} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

умножим первое уравнение на 2 и второе уравнение на x_{21}

$$\begin{aligned} 2 f_{21} &= 2 a_1 x_{21} + 2 b x_{21}^2 \\ a_{21} x_{21} &= 2 b x_{21}^2 \end{aligned}$$

После замены получаем

$$2 f_{21} = x_{21}(a_2 + a_1) \qquad (2.2)$$

Помножим последнее уравнение на $a_{21} = 2bx_{21}$ и сократим полученное на x_{21}, получим

$$4bf_{21} = a_2^2 - a_1^2 \qquad (2.3)$$

Последнее уравнение есть формула разности квадратов скоростей в квадратичном движении.

Подобными преобразованиями можно получить следующие формы

$$b = \frac{f_{31} x_{21} - f_{21} x_{31}}{x_{32} x_{31} x_{21}} \text{ и } a_1 = \frac{f_{21} x_{31}^2 - f_{31} x_{21}^2}{x_{32} x_{31} x_{21}} \qquad (2.4)$$

по аналогии из физики это определение текущей скорости и ускорения по трем координатам и соответствующим им трем значениям времени в квадратичном движении.

Найдем x_{21}, т.е. решим квадратное уравнение. Сразу видно два варианта

$$x_{21} = \frac{a_{21}}{2b} \text{ и } x_{21} = \frac{2 f_{21}}{a_2 + a_1} \qquad (2.5)$$

Из формулы разности квадратов скоростей

$$a_2 = \pm\sqrt{a_1^2 + 4bf_{21}}$$

Соответственно получаем два варианта решения

$$x_{21} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4bf_{21}}}{2b} \text{ и } x_{21} = \frac{2 f_{21}}{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4bf_{21}}} \qquad (2.6)$$

Второй вариант интересен тем, что при $b = 0$ решение квадратного уравнения явно перетекает в решение линейного уравнения, для чего в первом варианте нужно раскрывать неопределенность $0/0$. Но во втором варианте тоже возникает неопределенность $0/0$ при $f_{21} = 0$. Аналогично можно получить решение кубического уравнения, перетекающее в решение квадратного при равенстве нулю соответствующего коэффициента при третьей степени аргумента.

Поищем условия экстремума для f. Допустим, ищем максимум в точке (x_2, f_2). Рассмотрим вокруг этой точки два равных изменения $x_{21} = x_{32}$ и $f_{21} = -f_{32}$. Имеем

$f_{21} > 0$ (растёт) и $f_{32} < 0$ (убывает)

Тогда из $2f_{21} = x_{21}(a_2 + a_1)$ и $2f_{32} = x_{32}(a_3 + a_2)$ следует, что

$a_2 + a_1 > 0$ и $a_3 + a_2 < 0$ и $a_2 + a_1 = -(a_3 + a_2)$

Из $a_{21} = 2bx_{21}$ и $a_{32} = 2bx_{32}$ следует, что

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

Решив эту систему, получим $\{ a_1 > 0, a_2 = 0, a_3 < 0 \}$ - это аналог необходимости равенства нулю первой производной в точке экстремума. Конечно, это не самое строгое определение условий экстремальности. Целью тут было только показать возможность подобного исследования "чистой алгеброй".

Теперь посмотрим, что можно увидеть в аналогичном исследовании кубической зависимости. Имеем

$$\begin{aligned} f_{21} &= a_1 x_{21} + b_1 x_{21}^2 + c_1 x_{21}^3 \\ a_{21} &= 2b_1 x_{21} + 3cx_{21}^2 \\ b_{21} &= 3cx_{21} \\ c_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Из выражений для a_{21} и b_{21} легко получить следующую замечательную зависимость

$$b_2^2 - b_1^2 = 3c(a_2 - a_1) \qquad (3.2)$$

из которой следует удивительный факт

$$3ca_1 - b_1^2 = 3ca_2 - b_2^2 = const \qquad (3.3)$$

Подстановкой $x_{21} = \dfrac{b_{21}}{3c}$ в исходное кубическое выражение получим так называемое приведенное кубическое уравнение (без квадрата аргумента) относительно b_2

$$b_2^3 - b_1^3 + 3(b_2 - b_1)(3ca_1 - b_1^2) = 27c^2 f_{21} \qquad (3.4)$$

Из этого сам собою напрашивается вывод, что могут существовать такие кубические формы, у которых в приведенном уравнении постоянный коэффициент $(3ca_1 - b_1^2)$ равен нулю. Этим свойством можно воспользоваться для поиска решения кубического уравнения. Выбрав такую замену аргумента, которая обеспечит в новом уравнении выполнение равенства $3ca_1 = b_1^2$, мы получим приведенное уравнение, разрешимое через единственный кубический радикал. Что и было найдено для разных вариантов замены аргумента. Один вариант решения с проверкой (только единственного действительного корня) можно посмотреть в Excel файле **3eq.xls**, который прилагается к данному pdf файлу. Другой вариант решения с проверкой действительных и мнимых корней представлен в файле **3eq.nb** (ноутбук Mathematica 5.2), этот вариант подходит также и для решения квадратного уравнения при равенстве нулю соответствующего коэффициента.

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$f_{21}=a_1x_{21}+b_1x_{21}^2+c_1x_{21}^3+dx_{21}^4 \quad (4.1)$$
$$a_{21}=2b_1x_{21}+3c_1x_{21}^2+4dx_{21}^3$$
$$b_{21}=3c_1x_{21}+6dx_{21}^2$$
$$c_{21}=4dx_{21}$$

Из выражений для c_{21} и b_{21} легко получаем

$$c_2^2-c_1^2=\frac{8}{3}d(b_2-b_1) \quad (4.2)$$

из которой опять видим удивительную константу

$$8db_1-3c_1^2=8db_2-3c_2^2=const \quad (4.3)$$

Дополнительно всплывает еще одна зависимость между дифференциальными коэффициентами

$$c_2^3-c_1^3+c_{21}(8db_1-3c_1^2)=4^2d^2a_{21} \quad (4.4)$$

После подстановки $x_{21}=\frac{c_{21}}{4d}$ в исходное выражение четвертой степени получаем приведенное уравнение без куба аргумента относительно c_2

$$c_2^4-c_1^4+2c_{21}^2(8db_1-3c_1^2)+4c_{21}(4^2d^2a_1-c_1^3)=4^4d^3f_{21} \quad (4.5)$$

Теперь уравнение пятой степени

$$f_{21}=a_1x_{21}+b_1x_{21}^2+c_1x_{21}^3+d_1x_{21}^4+ex_{21}^5 \quad (5.1)$$
$$a_{21}=2b_1x_{21}+3c_1x_{21}^2+4d_1x_{21}^3+5ex_{21}^4$$
$$b_{21}=3c_1x_{21}+6d_1x_{21}^2+10ex_{21}^3$$
$$c_{21}=4d_1x_{21}+10ex_{21}^2$$
$$d_{21}=5ex_{21}$$

Снова константа

$$d_2^2-d_1^2=\frac{5}{2}ec_{21} \quad (5.2)$$

$$5ec_1-2d_1^2=5ec_2-2d_2^2=const \quad (5.3)$$

Подстановкой $x_{21}=\frac{d_{21}}{5e}$ приходим к приведенному выражению без четвертой степени аргумента относительно d_2

$$d_2^5-d_1^5+5d_{21}^3(5ec_1-2d_1^2)+5d_{21}^2(5^2e^2b_1-2d_1^3)+5d_{21}(5^3e^3a_1-d_1^4)=5^5e^4f_{21} \quad (5.4)$$

Индукцией можно получить общую формулу для подобного сочетания коэффициентов

$$a^n_{2(n-1)} - a^n_{1(n-1)} + \sum_{i=1}^{n-2} a^{n-i-1}_{21(n-1)} (n^{i+1} a^i_{1(n)} a_{1(n-i-1)} - \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} a^{i+1}_{1(n-1)}) = n^n a^{n-1}_{1(n)} f_{21} \quad (5.5)$$

Здесь интересно то, что если константа в первых скобках суммы будет равна нулю, то выражение во вторых скобках тоже становится константой, если же и она равна нулю, то следующие скобки становятся константой, и т.д.

Рассмотрим примеры некоторых других функций.

Обратная зависимость, т.е. $f(x) = \frac{1}{x}$ в стандартной записи.

$f_{21} = \frac{1}{x_{21}}$, $f_{31} = \frac{1}{x_{31}}$, но $f_{32} \neq \frac{1}{x_{32}}$.

Для f_{32} мы должны записать только так

$$f_{32} = a_2 x_{32} + b_2 x^2_{32} + c_2 x^3_{32} + \ldots$$

Т.е. от состояния 2 изменение развивается уже как степенной многочлен с целыми положительными степенями аргумента, при этом нецелых или отрицательных степеней аргумента быть не может (это докажем позже). Строго говоря, от состояния 1 рассматриваемая зависимость тоже изменяется как степенной ряд, который мы имеем возможность сокращенно записывать как $\frac{1}{x}$. Здесь мы постулируем, что свойство быть рядами первично для всех элементарных функций и их сочетаний.

Найдем $a_2, b_2, c_2, \ldots$ - производные коэффициенты.

$$f_{32} = f_{31} - f_{21} = \frac{1}{x_{31}} - \frac{1}{x_{21}} = \frac{1}{x_{32} + x_{21}} - \frac{1}{x_{21}} = -\frac{x_{32}}{x_{21}(x_{32} + x_{21})} = -\frac{x_{32}}{x^2_{21}} + \frac{x^2_{32}}{x^2_{21}(x_{32} + x_{21})} =$$

$$= -\frac{x_{32}}{x^2_{21}} + \frac{x^2_{32}}{x^3_{21}} - \frac{x^3_{32}}{x^3_{21}(x_{32} + x_{21})} = \ldots$$

Т.е. $a_2 = -\frac{1}{x^2_{21}}$, $b_2 = \frac{1}{x^3_{21}}$, $c_2 = -\frac{1}{x^4_{21}}$, … (6.1)

Видно, что первый производный коэффициент совпадает со значением первой производной от функции $\frac{1}{x}$ в стандартной записи, как и должно быть. Второй и последующие производные коэффициенты отличаются от стандартных (n)-х производных, т.к. они определялись по-разному. Но ряды, составленные из первых и последних, будут совпадать, т.к стандартно в члене с (n)-й производной всегда присутствует множитель $\frac{1}{n!}$.

Т.е. на самом деле отличий нет, и по сути результаты данного способа рассмотрения функций всегда будут полностью совпадать с результатами стандартного анализа.

Далее рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$

$f_{21}=\sqrt{x_{21}}$, $f_{31}=\sqrt{x_{31}}$,

$$f_{32}=a_2x_{32}+b_2x_{32}^2+c_2x_{32}^3+\ldots$$

$$f_{32}=f_{31}-f_{21}=\sqrt{x_{31}}-\sqrt{x_{21}}=\sqrt{x_{32}+x_{21}}-\sqrt{x_{21}}=\frac{x_{32}}{\sqrt{x_{32}+x_{21}}+\sqrt{x_{21}}}=$$

$$=\frac{x_{32}}{2\sqrt{x_{21}}}-\frac{x_{32}^2}{2\sqrt{x_{21}}(\sqrt{x_{32}+x_{21}}+\sqrt{x_{21}})^2}=\frac{x_{32}}{2\sqrt{x_{21}}}-\frac{x_{32}^2}{8x_{21}\sqrt{x_{21}}}+\frac{x_{32}^3(\sqrt{x_{32}+x_{21}}+3\sqrt{x_{21}})}{8x_{21}\sqrt{x_{21}}(\sqrt{x_{32}+x_{21}}+\sqrt{x_{21}})^3}=\ldots$$

Значит $a_2=\dfrac{1}{2\sqrt{x_{21}}}$, $b_2=-\dfrac{1}{8x_{21}\sqrt{x_{21}}}$, $c_2=\dfrac{1}{16x_{21}^2\sqrt{x_{21}}}$, … (6.2)

Теперь рассмотрим показательную функцию $f(x)=A^x$

$f_{21}=A^{x_{21}}$, $f_{31}=A^{x_{31}}$

$$f_{32}=a_2x_{32}+b_2x_{32}^2+c_2x_{32}^3+\ldots$$

$$f_{32}=f_{31}-f_{21}=A^{x_{31}}-A^{x_{21}}=A^{x_{32}+x_{21}}-A^{x_{21}}=A^{x_{21}}(A^{x_{32}}-1)$$

Т.к. $A^{x_{32}}=e^{x_{32}\ln A}=1+\dfrac{x_{32}\ln A}{1!}+\dfrac{(x_{32}\ln A)^2}{2!}+\dfrac{(x_{32}\ln A)^3}{3!}+\ldots$

то $f_{32}=A^{x_{21}}(\dfrac{x_{32}\ln A}{1!}+\dfrac{(x_{32}\ln A)^2}{2!}+\dfrac{(x_{32}\ln A)^3}{3!}+\ldots)$

и $a_2=A^{x_{21}}\ln A$, $b_2=A^{x_{21}}\dfrac{(\ln A)^2}{2!}$, $c_2=A^{x_{21}}\dfrac{(\ln A)^3}{3!}$, … (6.3)

Посмотрим теперь на сложную функцию $f(g(x))$

$$f_{32}=a_2g_{32}+b_2g_{32}^2+c_2g_{32}^3+\ldots$$

$$g_{32}=\bar{a}_2x_{32}+\bar{b}_2x_{32}^2+\bar{c}_2x_{32}^3+\ldots$$

$$f_{32}=a_2(\bar{a}_2x_{32}+\bar{b}_2x_{32}^2+\bar{c}_2x_{32}^3+\ldots)+b_2(\bar{a}_2x_{32}+\bar{b}_2x_{32}^2+\bar{c}_2x_{32}^3+\ldots)^2+c_2(\bar{a}_2x_{32}+\bar{b}_2x_{32}^2+\bar{c}_2x_{32}^3+\ldots)^3+\ldots=$$

$$=a_2\bar{a}_2x_{32}+(a_2\bar{b}_2+b_2\bar{a}_2^2)x_{32}^2+\ldots$$

Т.е. видно, что первый производный коэффициент сложной функции определяется аналогично стандартной производной сложной функции $f'(g(x))g'(x)$:

$$a_2\bar{a}_2 \qquad (6.4)$$

В заключение отмечу, что данный способ анализа приподнимает информацию из глубин треугольника Паскаля. Всё вышеизложенное получено на основе изначально постулированного положения, что СОСТОЯНИЕ меняющейся величины (функции, аргумента, коэффициента) и её ИЗМЕНЕНИЕ имеют различную абстрактную (физическую) природу, и поэтому обязаны участвовать в алгебраическом синтаксисе в различных обозначениях, в которых должно быть четко акцентировано, что ИЗМЕНЕНИЕ ЕСТЬ РАЗНОСТЬ МЕЖДУ ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ. При подобном рассмотрении внутренние взаимосвязи между меняющимися дифференциальными характеристиками становятся прозрачно очевидными.

Мне подсказали на форумах, что аналогичный чисто алгебраический подход к рассмотрению функций предпринимал Лагранж в его «Теории аналитических функций», 1797, но он пользовался стандартным синтаксисом, не отделяя состояния от изменений, и он не смог избежать обнуления приращений.
См. Юшкевич А.П. История математики. Том 3. – М.Наука,1972, с.282