Гиперболическая механика

В. Н. Ермаков ort@nxt.ru

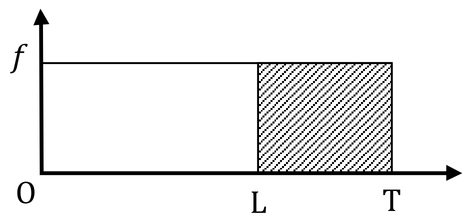
Показана возможность адаптации классической механики к релятивистским эффектам путём гиперболических преобразований классической неограниченной скорости.

Примем световую секунду за единицу длины (её размерность – секунда). Продольный эффект Доплера в классической механике примет простой вид: $f' \approx f(1-\mathrm{v})$. При удалении v>0, при сближении v<0. Чем ближе классическая скорость v к нулю, тем ближе выражение $f(1-\mathrm{v})$ к наблюдаемой частоте f'. Следовательно, для любого значения v можно записать: $f' = f \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mathrm{v}}{n}\right)^n$. Отсюда $f' = fe^{-\mathrm{v}}$, где $-\infty<\mathrm{v}<+\infty$.

Пусть условно неподвижный инерциальный источник излучает световые импульсы с частотой следования f. Пусть наблюдатель сначала удаляется от источника со скоростью v, а затем возвращается к источнику со скоростью минус v.

Если 2τ – общее время движения наблюдателя по его часам, а 2T – по неподвижным часам, тогда $\mathrm{T} = \frac{\tau f e^{-\mathrm{v}} + \tau f e^{\mathrm{v}}}{2f} = \tau \operatorname{ch} \mathrm{v}$, где $\tau f e^{-\mathrm{v}} + \tau f e^{\mathrm{v}}$ – число импульсов, принятых наблюдателем за время 2τ; $\operatorname{ch}\mathrm{v}$ – гиперболический косинус от v. Темп хода часов наблюдателя не зависит от кривизны его замкнутой траектории. Максимальное удаление наблюдателя от источника $\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{T}' = \mathrm{T} - \tau e^{-\mathrm{v}}$, где T' – время на часах источника, наблюдаемое с расстояния L.

L – Удаление наблюдателя за время τ.
T – Удаление первого импульса. Число принятых импульсов $(\mathrm{T}-\mathrm{L})f = \tau f e^{-\mathrm{v}}$.



Таким образом, путь наблюдателя в неподвижной системе координат $\mathrm{L} = \tau \operatorname{sh} \mathrm{v} = \mathrm{T} \operatorname{th} \mathrm{v}$. где $\operatorname{sh}\mathrm{v}$ и $\operatorname{th}\mathrm{v}$ – гиперболические синус и тангенс от v. Очевидно, что $\vec{\mathrm{v}} = \operatorname{Arsh}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\tau} = \operatorname{Arth}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dT}}$, где $\vec{\mathrm{r}}$ – радиус-вектор в световых секундах, измеряемый в неподвижной системе координат.

Обозначим гиперболические функции от классической скорости v греческими буквами: $\operatorname{ch}\mathrm{v} = \gamma$, $sh\,\mathrm{v} = \upsilon$, $\operatorname{th}\mathrm{v} = \beta$. Причём $\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\tau}$, $\vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{dT}}$, где β – реальная скорость в условно неподвижной (базовой) системе отсчёта; υ – реальная скорость материальной точки относительно базовой системы координат, измеряемая по часам, которые движутся, вместе с материальной точкой.

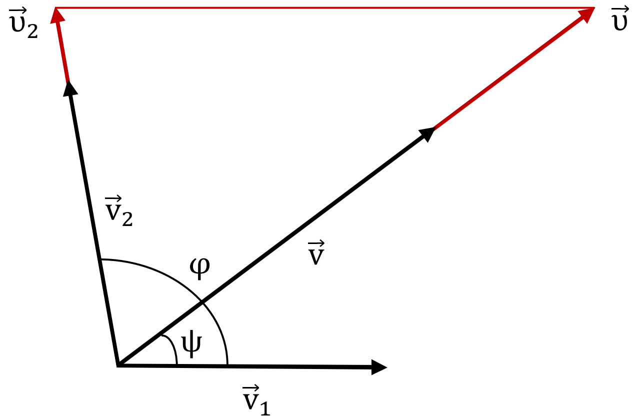
Сложение скоростей $\upsilon = \upsilon_2\sqrt{\left(\gamma_1\cos\varphi + \frac{\upsilon_1}{\beta_2}\right)^2 + \sin^2\varphi}$, где φ – угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Причём $\cos\psi = \frac{\upsilon_2}{\upsilon}\left(\gamma_1\cos\varphi + \frac{\upsilon_1}{\beta_2}\right)$, где ψ – угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}$. Также $\upsilon\sin\psi = \upsilon_2\sin\varphi$. Сложение коллинеарных (параллельных) скоростей $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Скорость v и угол ψ измеряются в базовой системе отсчёта. Скорость v_2 и угол φ измеряются при переносной скорости v_1 Если скорость v и угол ψ известны, то

$\upsilon_2 = \upsilon\sqrt{\left(\gamma_1\cos\psi - \frac{\upsilon_1}{\beta}\right)^2 + \sin^2\psi}$,

$\cos\varphi = \frac{\upsilon}{\upsilon_2}\left(\gamma_1\cos\psi - \frac{\upsilon_1}{\beta}\right)$.

.



Тангенциальное и нормальное ускорения, измеряемые ускоряющимся наблюдателем, $\vec{a} = d\vec{v}/d\tau$, $a_n = \omega^2 R = \upsilon^2/R$, где ω – угловая скорость, измеряемая по часам, движущимся по окружности; R – радиус окружности, измеряемый в базовой системе координат.

Время и путь в общем виде $T = \int_0^\tau \gamma(\tau)\,d\tau$, $L = \int_0^\tau \upsilon(\tau)\,d\tau = \int_0^T \beta(T)\,dT$. При движении с постоянным ускорением $T = \frac{1}{a}\,\mathrm{sh}\,a\tau$, $L = \frac{1}{a}(\mathrm{ch}\,a\tau - 1) = \frac{1}{a}\left(\sqrt{1 + a^2T^2} - 1\right)$. Ускорение a измеряется ускоряющимся наблюдателем.

Кинетическая энергия в килограммах E=m(γ−1), где m – масса (энергия покоя). Полная энергия M=m+E. Импульс в килограммах $\vec{p} = m\vec{\upsilon} = M\vec{\beta}$. Из $\mathrm{ch}^2 v - \mathrm{sh}^2 v = 1$ следует $M^2 - p^2 = m^2$. Импульс фотона $\vec{p} = M\vec{\beta}$, где M – энергия фотона в килограммах; β=1.

Сила в кг/с $\vec{F} = m\vec{a} = d\vec{p}/dT$, где ускорение a измеряется в системе отсчёта, связанной с массой m, а dp и dT измеряются в базовой системе отсчёта.

Скорость ракеты $v = \beta_0 \ln(m_0/m)$, где v_0 – скорость истечения газа, измеряемая в системе отсчёта ракеты; m_0 и m – начальная и конечная массы ракеты.

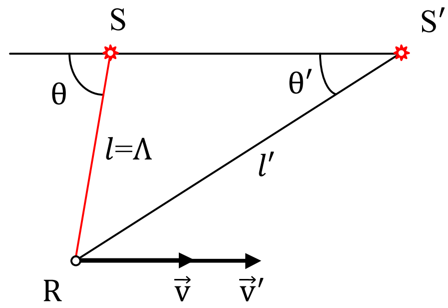
Скорость спутника на круговой орбите в системе отсчёта, связанной с центром орбиты, когда $\frac{m_c}{m} \to 0$ (m_c – масса спутника) $v = \mathrm{Arth}\sqrt{Gm/R}$, где гравитационная постоянная G=2,476·10^{-36} с/кг. Ускорение свободного падения $g = \frac{1}{R}\mathrm{sh}^2\left(\mathrm{Arth}\sqrt{Gm/R}\right) = \frac{Gm}{R^2(1-Gm/R)}$. Разность $\gamma - 1 = \ln\left|1 - \frac{Gm}{R_2}\right| - \ln\left|1 - \frac{Gm}{R_1}\right|$, где $R_2 > R_1$. Вторая космическая скорость $v = \mathrm{Arch}\left(1 - \ln\left|1 - \frac{Gm}{R}\right|\right)$. При радиусе R<Gm возникает отрицательная гравитация.

Эффект Доплера $f' = f(\gamma + \upsilon\cos\theta) = f/(\gamma - \upsilon\cos\theta')$, где угол θ между вектором относительной скорости v и отрезком источник-приёмник измеряется в системе отсчёта источника, а угол θ' – в системе отсчёта приёмника.

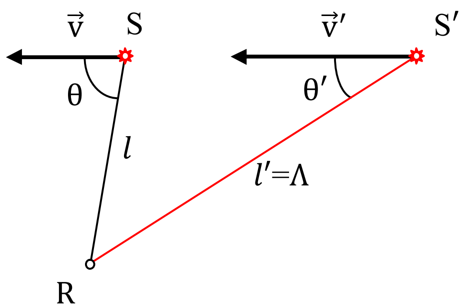
Аберрация света $\mathrm{tg}\,(\theta'/2) = e^{-\mathrm{v}}\mathrm{tg}\,(\theta/2)$.

Наблюдаемое расстояние до источника $l' = l\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \Lambda/(\gamma - \upsilon\cos\theta')$, где l – реальное расстояние в базовой системе отсчёта; Λ – путь фотона от точки излучения до приёмника в базовой системе отсчёта; v – скорость приёмника относительно базовой системы отсчёта в момент поглощения фотона. Наблюдаемая скорость приёмника относительно источника (или наоборот) $\vec{\mathrm{v}}' = \vec{\upsilon}f'/f$. В общем виде $\vec{\mathrm{v}}' = \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}'/\mathrm{d}\tau$, где модуль наблюдаемого радиус-вектора $\mathrm{r}' = l'$; $\mathrm{d}\tau$ – интервал времени по часам приёмника.

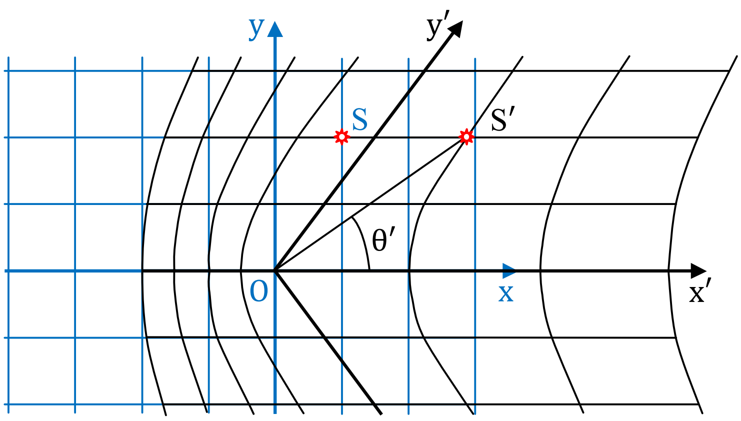
Движение приёмника R.
Штрихованные величины наблюдаются из точки R.
Наблюдаемая скорость $\vec{\mathrm{v}}' = \vec{\upsilon}f'/f$,
или $\vec{\mathrm{v}}' = \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}'/\mathrm{d}\tau$



Движение источника S.
Штрихованные величины наблюдаются из точки R.
Наблюдаемая скорость $\vec{\mathrm{v}}' = \vec{\upsilon}f'/f$,
или $\vec{\mathrm{v}}' = \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}'/\mathrm{dT}$.

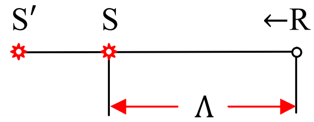


Базовая система координат Oxy наблюдается в виде системы O′x′y′ когда приёмник проходит через точку O (O′), двигаясь вдоль оси x (x′) со скоростью $\mathrm{v} = \ln 2$.

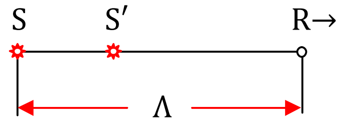


При θ'<90° наблюдаемое расстояние l' больше реального, а наблюдаемая скорость v'>β. При θ'>90° – наоборот. Несколько простых примеров.

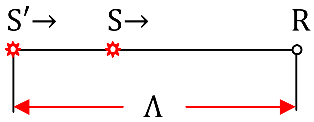
$\theta'=0°$
$l'=\Lambda e^{v}$
$v'=\upsilon e^{v}$



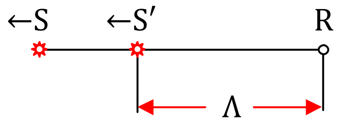
$\theta'=180°$
$l'=\Lambda e^{-v}$
$v'=\upsilon e^{-v}$



$\theta'=0°$
$l'=\Lambda$
$v'=\upsilon e^{v}$



$\theta'=180°$
$l'=\Lambda$
$v'=\upsilon e^{-v}$

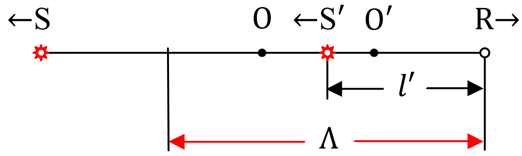


Разлёт из одной точки с одинаковой скоростью v.

В любой момент $\tau_R=\tau_S=\tau$. Наблюдаемые величины:

$f' = fe^{-2v}$, $l' = \Lambda e^{-v}$, $v' = \frac{l'}{\tau} = \frac{1}{2}(1-e^{-4v})$.

Время на часах S, наблюдаемое из R, $\tau' = \tau e^{-2v}$.



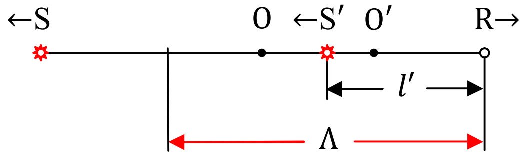
Путь фотона от точки излучения до R в базовой системе отсчёта $\Lambda = \gamma\tau - \gamma\tau' = \upsilon\tau + \upsilon\tau'$.

Разлёт из одной точки с одинаковым ускорением, измеряемым в ускоряющихся точках R и S.

В любой момент $\tau_R=\tau_S=\tau$, $f' = fe^{-a\tau-a\tau'}$,

$\tau'=\frac{1}{a}\ln(2-e^{-a\tau})$, $l' = \Lambda e^{-a\tau}$, $v' = \frac{dl'}{d\tau}$,

$\Lambda = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau' = \frac{1}{a}\left(\operatorname{ch} a\tau - 1\right) + \frac{1}{a}\left(\operatorname{ch} a\tau' - 1\right)$.

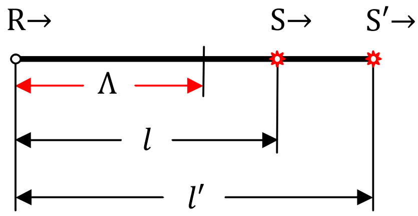


Движение стержня с ускорением, измеряемым на стержне.

В любой момент $\tau_R=\tau_S=\tau$, $f' = fe^{a\tau-a\tau'}$,

$\tau'=\frac{1}{a}\ln(e^{a\tau}-al)$, $l' = \Lambda e^{a\tau}$, $v' = \frac{dl'}{d\tau}$,

$\Lambda = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau' = l - \frac{1}{a}\operatorname{ch} a\tau + \frac{1}{a}\operatorname{ch} a\tau'$.



В любой момент $\tau_R=\tau_S=\tau$, $f' = fe^{-a\tau+a\tau'}$,

$\tau'=-\frac{1}{a}\ln(e^{-a\tau}+al)$, $l' = \Lambda e^{-a\tau}$, $v' = \frac{dl'}{d\tau}$,

$\Lambda = \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{sh} a\tau' = l + \frac{1}{a}\operatorname{ch} a\tau - \frac{1}{a}\operatorname{ch} a\tau'$.