

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В  
ЭНЕРГЕТИКЕ им. Г.Е.Пухова  
Отделение гибридных моделирующих и  
управляющих систем в энергетике**

**В.В.Васильев, Л.А.Симак**

**ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И  
АППРОКСИМАЦИОННЫЕ  
МЕТОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Киев-2008**

УДК 621.372.061

*Рецензент:*

чл.-корр. НАН Украины, д.т.н., профессор **Таранов С.Г.**

**Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание / В.В.Васильев, Л.А.Симак. — Киев, НАН Украины, 2008. — 256 с.**  
ISBN 978-966-02-4384-2

Книга посвящена аппроксимационно-операционным методам моделирования динамических систем дробного и смешанного порядков. Рассмотрены методы аппроксимации сигналов обобщенными полиномами с различными системами базисных функций, построение на основе этих методов операционных исчислений неклассического типа и их применений к математическому и компьютерному моделированию динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, включающими интегро-дифференциальные операторы как целых, так и дробных порядков. Приведен сопоставительный анализ дробного исчисления и классического математического анализа. Обсуждаются вопросы реализации интеграторов нецелых порядков и применения дробного исчисления в различных областях науки, техники и естествознания. Изложение материала сопровождается иллюстративными примерами.

Для специалистов в области математического и компьютерного моделирования и управления, занимающихся исследованиями динамических систем, обработкой сигналов, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

The book is devoted to the approximated and operational methods of modeling and simulation for integer and fractional order dynamic systems. The methods of signal approximation via generalized polynomials with various basic functions have been considered. These approximated methods initiate operational calculus non-classical type which is applied to the dynamic system modeling and simulation. Distinctive feature of such systems is presence of non-integer order operators in mathematical models. The comparative analysis of fractional calculus and classical mathematical analysis is resulted. The realization of non-integer order integrators has been considered. Fractional calculus application in different fields of nature, science and engineering are discussed. The illustrative examples and computer experiment results are given.

The work is destined to specialists in control, modeling and simulation, who have dealings with research and development in signal processing, dynamic systems analysis and identification, and also to students and post-graduate students of proper profession.

© Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г.Е.Пухова НАН Украины, 2008

© В.В.Васильев, Л.А.Симак, 2008

ISBN 978-966-02-4384-2

# Содержание

ВВЕДЕНИЕ .....	6
<i>Глава 1. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИГНАЛОВ</i> .....	11
1.1. Аппроксимация непрерывных сигналов .....	12
1.2. Аппроксимация сигналов, заданных массивами (в виде таблиц) .....	28
1.3. Аппроксимация сигналов, заданных в параметрической форме .....	37
1.4. Локальные базисные системы .....	51
1.4.1. Блочнo-импульсная система базисных функций .....	52
1.4.2. Аппроксимирующие импульсные спектры (АИС) .....	53
1.4.3. Локальный спектр Лежандра второго порядка .....	56
1.4.4. Интерполяционно-экстраполяционный метод .....	57
1.5. Аппроксимация двумерных сигналов в локальных базисных системах сепарабельного типа .....	69
Список литературы к Главе 1 .....	79
<i>Глава 2. ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НА БАЗЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ</i> .....	80
2.1. Общая характеристика операционных методов .....	80
2.2. Преобразование Лапласа .....	81
2.2.1. Определение .....	82
2.2.2. Свойства .....	83
2.2.3. Примеры преобразований Лапласа некоторых функций .....	85
Таблица 2.1 .....	85
2.3. Фазоры, ряды и преобразование Фурье .....	86
2.3.1. Комплексный метод .....	87
2.3.2. Ряды Фурье .....	89
2.3.3. Преобразование Фурье .....	90
2.4. Дифференциальные преобразования Пухова .....	91
2.5. Операционные исчисления неклассического типа (S- преобразования) .....	92
2.5.1. Определение S-преобразований .....	93
2.5.2. Операционная матрица интегрирования для S-преобразований .....	94
Список литературы к Главе 2 .....	101
<i>Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ В СРАВНЕНИИ С КЛАССИЧЕСКИМ</i> .....	102
3.1 Введение и краткий исторический экскурс .....	102
3.2 Сопоставление классического и дробного математического анализа .....	103

3.2.1	Гамма-функция Эйлера и родственные ей функции .....	103
3.2.2	Функция Миттаг - Леффлера.....	109
3.2.3.	Дифференцирование с нецелым порядком некоторых элементарных функций .....	110
3.2.4.	Аппроксимации формул дифференцирования и интегрирования нецелых порядков.....	119
3.2.5.	Интегральные представления диферинтегралов нецелых порядков .....	127
3.2.6.	Свойства диферинтегралов нецелых порядков .....	132
	Список литературы к Главе 3.....	137
<b>Глава 4. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ.....</b>		
4.1	О классификации уравнений и существующих методов их решения.....	139
4.2.	Операционная матрица интегрирования дробного порядка .....	141
4.3.	Линейные интегральные уравнения нецелых и смешанных порядков.....	144
4.4.	Линейные интегро-дифференциальные уравнения нецелых и смешанных порядков.....	150
4.4.1.	Одночленные линейные дифференциальные уравнения нецелого порядка с постоянными коэффициентами.....	150
4.4.2.	Двучленные линейные дифференциальные уравнения нецелого порядка с постоянными коэффициентами.....	153
4.4.3.	Линейные дифференциальные уравнения смешанного порядка с производными по Капуто .....	155
4.4.4	Дифференциальные уравнения смешанного порядка с переменными коэффициентами и производными по Капуто.....	160
4.5.	Аппроксимационно-операционные модели двумерных динамических систем .....	164
4.5.1.	Аппроксимация двумерных сигналов.....	165
4.5.2.	Частное интегрирование двумерных сигналов .....	167
4.5.3.	Математическая модель динамической системы нецелого порядка в операционном пространстве.....	170
<i>Приложение 4.1.</i> Операционные матрицы интегрирования для блочно-импульсных систем базисных функций (система смещенных полиномов Лежандра нулевого порядка).....		
<i>Приложение 4.2.</i> Формулы для формирования операционных матриц интегрирования дробного порядка для локальных базисных систем на основе смещенных полиномов Лежандра .		
		175

Список литературы к Главе 4.....	178
<b>Глава 5. РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ</b> .....	180
5.1. Свойства гипотетического реактивного элемента дробного порядка .....	180
5.2. Возможные подходы к реализации интегро- дифференциальных операторов нецелых порядков .....	184
5.3. Аппроксимационный синтез на основе теории фрактальных структур.....	193
5.4. Исследование частотно-пространственных характеристик импедансов длинных линий на основе решений уравнения Риккати .....	200
5.4.1. Однородная длинная линия RC-типа.....	201
5.4.2. Неоднородные длинные линии RC-типа.....	211
5.5. Аппроксиматоры интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков на операционных усилителях....	222
Список литературы к Главе 5.....	225
<b>Глава 6. ПРИМЕНЕНИЯ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ, ЕСТЕСТВОЗНАНИИ</b> .....	228
6.1. Проникновение дробных диферинтегралов в фундаментальные законы естествознания .....	228
6.2. Автоматическое управление и обработка сигналов .....	230
6.3. Физика, электроника.....	236
6.4. Механика .....	238
6.5. Биология и медицина .....	244
6.6. Экономика и финансы.....	245
6.7. Тенденции в применениях дробного исчисления к математическому моделированию динамических систем.....	246
Список литературы к Главе 6.....	249

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории и методов математического и компьютерного моделирования процессов и систем в различных областях человеческой деятельности всегда базировалось на использовании новых идей, подходов и методов из области анализа, прикладной и вычислительной математики. Одной из актуальных проблем моделирования в широком смысле слова является проблема адекватности математических моделей исследуемым объектам. Динамические системы, как объект моделирования, традиционно изучались путем использования классического математического анализа, в частности аппарата интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных. Классический анализ предполагает, что интегралы и производные имеют порядки, выражаемые целыми числами. Между тем, уже сравнительно давно установлено наблюдениями, что поведение целого ряда объектов и процессов не соответствует в полной мере используемым математическим моделям, и что необходимо разрабатывать и использовать уточненные модели. Аппроксимация сигналов, формируемых при функционировании исследуемых систем, обнаружила наличие в них степенных зависимостей от времени и (или) частоты с нецелыми показателями степеней. Развитие теории фракталов вызвало повышенный интерес к явлениям самоподобия, характерным для степенных законов, и к математическому анализу нецелых порядков. Последний основан на систематическом использовании понятий производных и интегралов, порядки которых не являются целыми числами, а могут быть дробными, иррациональными и комплексными. С учетом сказанного термин «дробное исчисление» (fractional calculus) не совсем точно отражает существо вопроса. Более точным было бы понятие исчисление нецелых порядков. Однако, повсеместное использование в монографической литературе и многочисленных публикациях не совсем точного термина укоренилось и используется наряду с другими названиями обобщения математического анализа.

Понятия производной и интеграла нецелых порядков, лежащие в основе дробного исчисления, при первом знакомстве с ними, вызывают у инженеров и научных работников затруднения, которые препятствуют широкому использованию этого исчисления в прикладных областях исследований и разработок. Хотя история возникновения и развития дробного исчисления насчитывает уже более трех столетий, его основы не изучаются в большинстве курсов математического анализа высших учебных заведений. Между тем, су-

щество перехода от классического математического анализа к его обобщению, которым и является дробное исчисление, может быть достаточно просто изложено с помощью приемов, уже известных в математике. Рассмотрим два характерных примера.

**Пример 1.** Как известно, под возведением в степень некоторого числа ( $a^n$ ) при целом положительном  $n$  подразумевают краткую запись произведения  $n$  одинаковых сомножителей  $a$ :

$\underbrace{a \times a \times a \cdots a}_{n\text{-сомножителей}}$

$a \times a \times a \cdots a$ . Уже первые вопросы возникают, если показатель степени отрицателен или является простой дробью вида  $1/k$  ( $k$  – целое, положительное). Ответом на вопрос, что понимают под величи-

ной  $a^{-n}$ , является выражение:  $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \overbrace{\left(\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{a}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{a}\right)}^{n\text{-сомножителей}}$ .

В случае, когда показатель степени является простой дробью, используют понятие корня степени  $k$ :  $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a} = b$ , где  $b$  является числом,  $k$ -тая степень которого равна  $a$ :

$b^k = \overbrace{\sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{a} \times \cdots \times \sqrt[k]{a}}^{k\text{-сомножителей}} = a$ . Подобные рассуждения не могут быть использованы в случаях, когда показатель степени является нецелым числом (например, иррациональным или комплексным):

$a^{3.19}$ ,  $a^\pi$ ,  $a^{0.7+j \cdot 0.2}$  ... . Нельзя умножить некоторое число само на себя три целых и девятнадцать сотых раз. Между тем, дробные степени величин существуют и определяются функциями вида:  $z = x^y$ , которые могут быть вычислены при заданных произвольных вещественных  $x$  и  $y$  с помощью калькулятора или таблицы логарифмов / антилогарифмов.

**Пример 2.** Другой характерный пример связан с понятием факториала числа. Под факториалом целого числа  $k$  понимают произведение целых чисел от 1 до  $k$ :  $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (k-1) \times k$ . Ясной физической или алгебраической интерпретации факториала нецелого (дробного) числа не существует. Обобщением понятия факториала на нецелые числа является Гамма - функция Эйлера, которая играет фундаментальную роль в дробном математическом анализе. Гамма – функция определяется выражением:

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  ( $\text{Re}(z) > 0$ ). При целом неотрицательном  $z$  факториал  $z!$  и Гамма – функция  $\Gamma(z)$  связаны соотношением:  $\Gamma(k+1) = k!$

Первоначальное представление об интеграле нецелого порядка можно получить, рассматривая интегральную формулу Коши для многократного интегрирования некоторой функции  $f(x)$ :

$$\varphi(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

Интегральная формула Коши предусматривает вместо вычисления  $n$  интегралов ограничиться одним интегралом вида:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f(y) dy.$$

Заменой целого  $n$  на нецелый  $\beta$  и факториальной функции  $(n-1)!$  на Гамма - функцию нецелого аргумента  $\beta$  можно перейти к определению интеграла дробного порядка  $\beta$ , известному как интеграл Римана – Лиувилля:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy.$$

Детальное сопоставление классического математического анализа и дробного исчисления будет рассмотрено в главе 3 данной книги.

Книга построена следующим образом. Первая глава посвящена методам аналитической аппроксимации сигналов обобщенными полиномами с различными системами базисных функций. Необходимость такой главы обусловлена тем, что предложенные и рассматриваемые в работе методы математического моделирования динамических систем дробного порядка являются неклассическими операционными, построенными на формулах среднеквадратической аппроксимации. Рассматриваются различные классы сигналов, различные базисные системы, ортогональные и неортогональные. Изложение сопровождается иллюстративными примерами, выполненными в программной среде системы Mathematica® фирмы Wolfram Research Inc. Для первоначального знакомства с системой Mathematica в конце книги имеется специальное приложение, облег-



чающее понимание излагаемого материала. Программные вставки комментируются, являются исчерпывающими и допускают, в большинстве случаев, реализацию на компьютере, оснащённом версиями программы Mathematica от 2.0 до 6.0.

Во второй главе приведены операционные методы анализа, как инструмент алгебраизации интегро-дифференциальных моделей динамических систем. После краткого изложения классических операционных методов (Лапласа, Фурье, Пухова), широко применяемых в анализе систем, рассматриваются предложенные авторами неклассические операционные методы, названные S-преобразованиями, основанные на полиномиальной аппроксимации сигналов. S-преобразования применяются в 4-й главе для моделирования динамических систем целого, дробного и смешанного порядков.

Третья глава содержит основные положения дробного математического анализа в сопоставлении с классическим математическим анализом целых порядков. После краткого экскурса в историю возникновения и развития дробного математического анализа подробно рассмотрены основы дробного анализа, как обобщения обычного дифференциального и интегрального исчисления. Глава построена на известных и опубликованных положениях без использования каких – либо сложных математических выкладок, доказательств и ориентирована на возможность восприятия студентами, аспирантами и специалистами с политехническим образованием. Сопоставление с классическим математическим анализом начинается с рассмотрения Гамма-функции и функции Миттаг-Лефлера, как обобщений факториала и экспоненциальной функции. Приведены формулы дифференцирования с нецелым порядком некоторых элементарных функций, аппроксимации формул интегро-дифференцирования нецелых порядков, как обобщений формул методов конечных разностей и конечных сумм численного дифференцирования и интегрирования. Далее рассмотрены определения интегро-дифференциальных операций нецелых порядков, как обобщения на нецелые порядки интегральной формулы Коши многократного интегрирования. Главу завершает рассмотрение основных свойств операций дифференцирования и интегрирования нецелых порядков.

Четвертая глава посвящена аппроксимационно-операционным методам решения интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков. В обзорном плане рассмотрена классификация дифференциальных уравнений и методов их решения. Приведено обобщение операционной матрицы интегрирования на нецелые порядки интегральных операторов. На ряде примеров рассмотрены методы решения интегро-дифференциальных уравнений нецелых и смешанных порядков в обыкновенных производных с постоянными и

переменными коэффициентами, а также примеры одномерных по пространственной переменной интегро-дифференциальных уравнений смешанного порядка в частных производных. Моделирование динамических систем с распределенными параметрами нецелых порядков рассмотрено после изложения методов аппроксимации двумерных сигналов, на основе которых выполнено обобщение S-преобразований для уравнений с двумя переменными. Глава содержит в приложении выражения для построения операционных матриц интегрирования нецелых порядков.

В пятой главе обсуждаются методы реализации интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков. Рассмотрены свойства гипотетического элемента электронных цепей, обладающего характеристиками дробных дифференциаторов и интеграторов, и вопросы аппроксимационного синтеза таких элементов на основе теории фрактальных структур. Исследованы пространственно-частотные характеристики импедансов однородных и неоднородных длинных линий RC-типа конечной длины и показано, что на их основе могут реализовываться аппроксиматоры интеграторов нецелых порядков, в частности, с использованием техники операционных усилителей.

Заключительная шестая глава является обзорно-реферативной и содержит изложение существа применений дробного исчисления в математическом моделировании процессов и систем в различных областях науки, техники, естествознания, экономики. В конце главы излагается точка зрения авторов на некоторые тенденции, проявившиеся в теории и применении дробного исчисления, и приводится далеко не полный перечень нерешенных проблем и дискуссионных вопросов, которые могут подтолкнуть интересующихся к постановке и решению новых важных и актуальных задач математического и компьютерного моделирования. Приведенный список литературы не является исчерпывающим, поскольку количество публикаций, посвященных дробному исчислению и его применениям, быстро растет и указание значительно большего числа источников в книге является непосильной задачей.

Авторы будут признательны за замечания и пожелания по существу вопросов, затронутых в книге.

## **Глава 1. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИГНАЛОВ**

Проблема аналитической аппроксимации сигналов в математическом анализе и всевозможных технических приложениях возникает в следующих случаях:

- математическая модель сигнала не задана, а информация о сигнале получена с помощью аналоговых или цифровых регистраторов;
- информация о сигнале содержится в множестве отсчетов значений сигнала в некоторые моменты времени или в некоторых точках пространства (ситуация обычная для экспериментальных исследований);
- существующая математическая модель сигнала по какой-либо причине не устраивает исследователя и нужно аппроксимировать сигнал в иной форме.

В перечисленных случаях, однако, мы имеем дело всего с двумя формами представления сигналов: непрерывной (аналоговой) и дискретной (числовой массив или таблица). Наиболее часто при аппроксимации используется представление сигналов в виде обобщенных полиномов (линейной комбинации известных функций, образующих так называемую систему базисных функций). Полиномиальная аппроксимация сигналов при их последующей обработке предоставляет исследователю ряд возможностей, а именно:

- операции над неизвестными сигналами сводятся к аналогичным операциям над известными функциями, образующими базисную систему, с неизвестными коэффициентами,
- достигается сжатие информации, необходимость в которой возникает при регистрации и передаче сигналов на расстояние,
- появляется возможность низкочастотной фильтрации и сглаживания сигналов, содержащих шум, случайные помехи или высокочастотные наводки,
- аппроксимация сигналов может использоваться в системах шифрования сообщений, так как сообщение может быть восстановлено лишь в случае, когда известна система базисных функций, порождающая аппроксимирующий полином,
- при обработке экспериментальной информации с ограниченной выборкой отсчетов измеряемых сигналов появляется возможность линейной и нелинейной интерполяции и экстраполяции,

- полиномиальная аппроксимация может служить основой для построения операционного исчисления, что особенно важно при исследовании динамических систем, так как любое операционное исчисление позволяет перейти от математической модели динамической системы в форме интегро-дифференциальных уравнений к эквивалентной модели в форме алгебраических уравнений.

Аппроксимация сигналов широко используется в математическом и компьютерном моделировании, построении генераторов сигналов заданной формы, идентификации параметров исследуемых систем и др.

Дополнительную информацию, связанную с теорией аппроксимации, можно получить из приведенной литературы [1, 4, 6, 8, 9 — 13].

Приводимые примеры выполнены в среде системы Mathematica фирмы Wolfram Research Inc.[14, 15]. Для их повторения читателю потребуются первоначальное знакомство с указанной системой. Однако, рассмотренные методы аппроксимации могут быть легко реализованы и в других программных комплексах компьютерной алгебры (MATLAB, MAPPLE, MATHCAD и др.) [2, 3, 7, 16].

## 1.1. Аппроксимация непрерывных сигналов

Пусть сигнал  $x(t)$  задан на интервале  $(a \leq t \leq b)$  изменения аргумента  $t$ . Предположим также, что на этом же интервале задана система линейно-независимых базисных функций  $\{s_i(t)\}_{i=1}^m$ , формирующая обобщенный полином:

$x_a = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t)$ . Для того, чтобы этот полином аппроксимировал сигнал, коэффициенты полинома должны выбираться из условия минимизации нормы функции ошибки аппроксимации:

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_a(t) = x(t) - \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) \quad (1.1)$$

$$\|\varepsilon(t)\| \rightarrow \min(X_i)$$

Для среднеквадратичной нормы получим следующее условие:

$$\mu = \int_a^b \left[ x(t) - \sum_{i=1}^m X_i s_i(t) \right]^2 dt \rightarrow \min(X_i). \quad (1.2)$$

Условие минимизации среднеквадратичной нормы функции ошибки приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полинома:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial X_j} &= 0, \\ \sum_{i=1}^m w_{ij} X_i &= q_j, \\ j &:= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где:

$$\begin{aligned} w_{ij} &= \int_a^b s_i(t) s_j(t) dt, \\ q_j &= \int_a^b x(t) s_j(t) dt. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Задача аппроксимации сигналов, заданная выражениями (1.3, 1.4) в матрично-векторной форме имеет вид:

$$\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{Q}},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1m} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \dots & w_{mm} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

В (1.5) приняты следующие обозначения:  $\mathbf{W}$  — операционная матрица аппроксимирующего полиномиального спектра,  $\bar{\mathbf{Q}}$  — операционный вектор спектра,  $\bar{\mathbf{X}}$  — аппроксимирующий полиномиальный спектр сигнала.

Решение задачи нахождения аппроксимирующего полиномиального спектра сигнала в матрично-векторной форме определяется выражением:

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{W}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}. \quad (1.6)$$

В случае ортогональных базисных систем функций, матрица коэффициентов становится диагональной:  $w_{ij, i \neq j} = 0$ , а в случае ортонормированной базисной системы – единичной:  $w_{ii} = 1$ . Отсюда

вытекает, что система линейных алгебраических уравнений (1.3) вырождается, и мы имеем:  $X_i = q_i$ .

**Пример 1.1.** Сформировать степенную систему базисных функций вида:

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = \left\{ \left(\frac{t}{T}\right)^0, \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{2}{4}}, \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{t}{T}\right), \left(\frac{t}{T}\right)^2, \left(\frac{t}{T}\right)^3, \left(\frac{t}{T}\right)^4 \right\}$$

и определить для нее операционную матрицу аппроксимирующего полиномиального спектра  $W$ .

Ниже приведена программа и результаты ее работы в среде системы Mathematica. Примем значение константы  $T=1$ , а область определения системы функций  $t \in [0,1)$ .

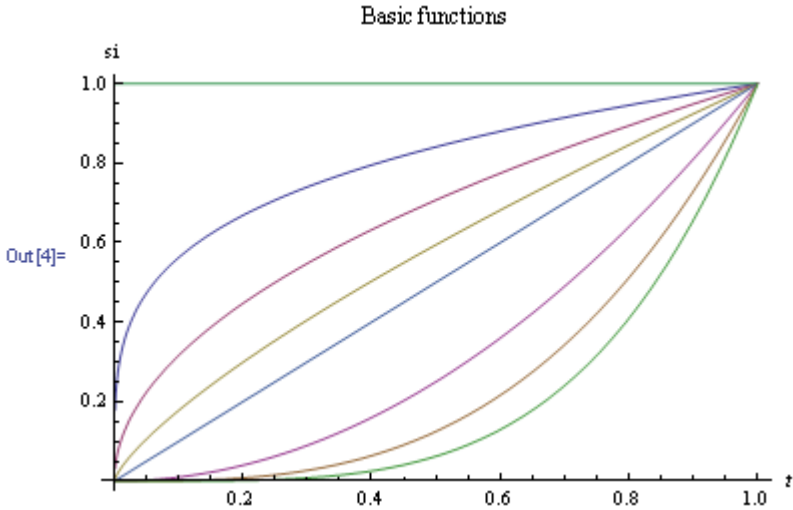


Рис. 1.1. Степенная система базисных функций

Прежде всего определим вид базисной функции и сформируем из нее систему, определив ее параметры (константу  $T=1$  и ее порядок  $m=4$ ):

```
In[1]:= ss[t_, T_, i_, m_] := If[i < m, (t/T)^(i/m), (t/T)^(i-m)];
s = ss[t, 1, i, 4];
S = Table[s, {i, 8}]
```

```
Out[3]= {t^(1/4), sqrt(t), t^(3/4), 1, t, t^2, t^3, t^4}
```

Отобразим на графике полученную систему базисных функций:

```
In[4]:= Plot[Evaluate[S], {t, 0.001, 1}, AxesLabel -> {t, si},
PlotLabel -> Basic functions]
```

Сформируем операционную матрицу аппроксимирующего полиномиального спектра в соответствии с выражениями (1.4-1.5):

```
In[5]:= W = Integrate[Table[S[[i]] * S[[j]], {i, 8}, {j, 8}] dt;
```

```
In[6]:= % // MatrixForm
```

Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \frac{4}{9} & \frac{4}{13} & \frac{4}{17} & \frac{4}{21} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{4}{7} & \frac{4}{9} & \frac{4}{11} & \frac{4}{13} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{3} & \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{5} & \frac{4}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{13} & \frac{2}{7} & \frac{4}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{17} & \frac{2}{9} & \frac{4}{11} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{21} & \frac{2}{11} & \frac{4}{13} & \frac{1}{9} & \frac{1}{11} & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} & \frac{1}{17} \end{pmatrix}$$

**Пример 1.2.** Аппроксимировать сигнал  $x(t) = e^{-t}$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 1$  в полученной системе степенных базисных функций. При повторении примера следует учитывать, что система базисных функций и операционная матрица спектра реализованы в соответствии с программой примера 1.

Фрагмент программы и результаты аппроксимации имеют вид (вектора  $\bar{Q}$  и  $\bar{X}$  в соответствии с выражениями (1.5-1.6):

```
In[7]:= Q = Integrate[Table[S[[i]] Exp[-t], {i, 1, 8}], {t, 0, 1}];
Q1 = N[Q]
```

```
Out[8]:= {0.476959, 0.378945, 0.312208, 0.632121,
0.264241, 0.160603, 0.113929, 0.0878363}
```

```
In[9]:= X = Inverse[W].Q1
```

```
Out[9]:= {-0.00344159, 0.0179984, -0.0397801, 1.00022,
          -0.967455, 0.481421, -0.142962, 0.0218797}
```

Формирование аппроксимирующего полинома:

```
In[32]:= xa = X.S
```

```
Out[32]:= 1.00022 - 0.00344159 t1/4 + 0.0179984 √t - 0.0397801 t3/4 -
          0.967455 t + 0.481421 t2 - 0.142962 t3 + 0.0218797 t4
```

Вывод графика сигнала, совмещенного с его аппроксимацией, и графика функции ошибки аппроксимации:

```
In[11]:= Plot[{Exp[-t], xa}, {t, 0, 1}]
```

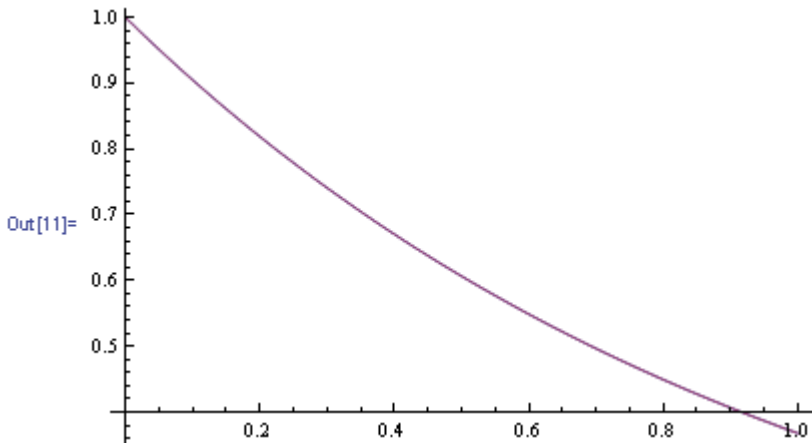


Рис.1.2а. Сигнал экспоненты и его аппроксимация



In[12]:= Plot[Exp[-t] - xa, {t, 0, 1}]

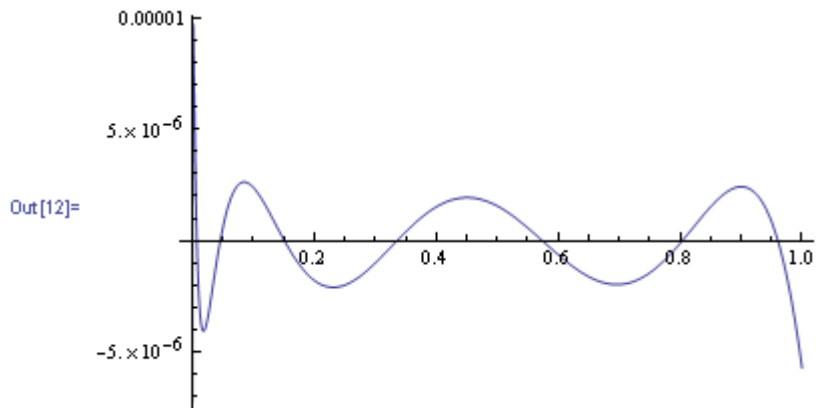


Рис. 1.2b. Функция ошибки аппроксимации экспоненты

**Пример 1.3.** Аппроксимировать сигнал  $y(t) = \text{Cos}(3.14t^2)$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 1$  полиномом в той же системе степенных базисных функций.

Ниже приведены фрагменты программы в среде системы “Mathematica” и результаты ее работы. На графиках изображены сигнал, совмещенная с ним аппроксимация и функция ошибки. Команда Chop предусматривает обращение в нуль пренебрежимо малых составляющих в полученных результатах.

In[13]:= Q2 = Chop [Table[S[[i]] Cos[3.14 t^2], {i, 8}] dt]

Out[13]= {0.210864, 0.110369, 0.0447867, 0.374331,  
0.000253607, -0.0801576, -0.10117, -0.104289}

In[14]:= Y = Inverse[W].Q2

Out[14]= {10.5834, -54.7752, 119.576, 0.302353,  
-96.3983, 50.1747, -52.7558, 22.2821}

In[15]:= ya = Y.S

Out[15]= 0.302353 + 10.5834 t<sup>1/4</sup> - 54.7752 √t + 119.576 t<sup>3/4</sup> -  
96.3983 t + 50.1747 t<sup>2</sup> - 52.7558 t<sup>3</sup> + 22.2821 t<sup>4</sup>

```
In[16]:= Plot[{Cos[3.14 t ^ 2], ya}, {t, 0, 1}]
```

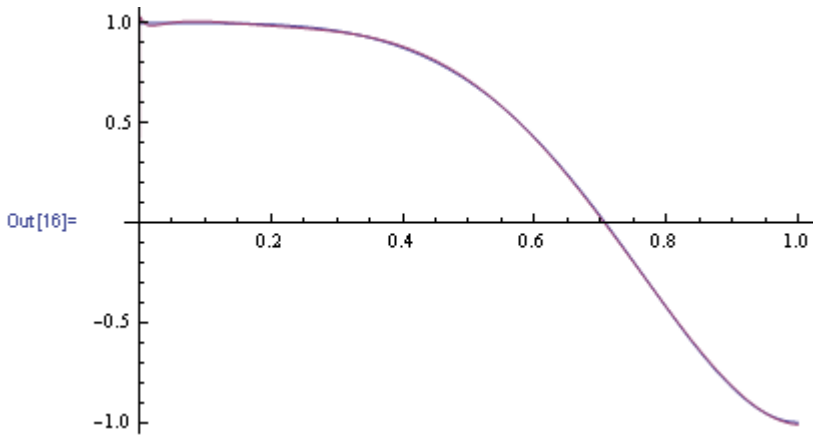


Рис.1.3а. Сигнал  $\text{Cos}(\pi t^2)$  и его аппроксимация

```
In[17]:= Plot[Cos[3.14 t ^ 2] - ya, {t, 0, 1}]
```

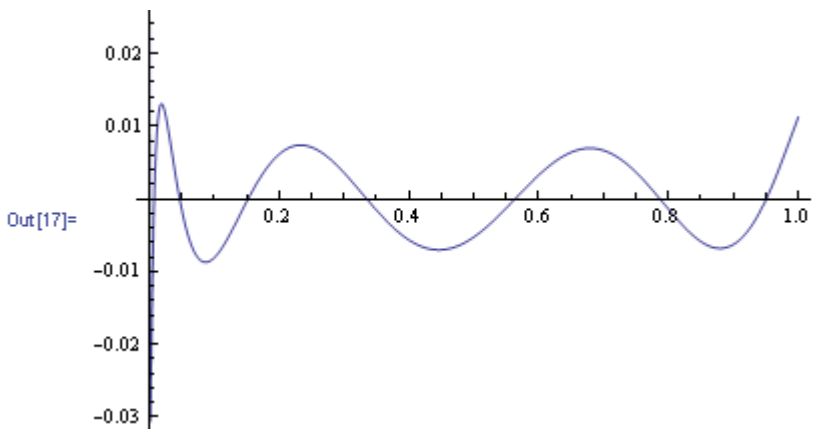


Рис.1.3б. Функция ошибки аппроксимации сигнала  $\text{Cos}(\pi t^2)$

**Пример 1.4.** Аппроксимировать сигнал  $e^{-t} \text{Sin}(\pi t)$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < \pi/2$ , используя экспоненциальную систему базисных функций 5-го порядка:  $\bar{S}(t) = \{1, e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}, e^{-4t}\}$ .

Ниже приведена программа на языке системы Mathematica и результат ее работы.

Определение сигнала и отображение его на графике:

```
In[1]:= f := Exp[-t] * Sin[Pi * t];
```

```
In[2]:= Plot[f, {t, 0, 1.5}]
```

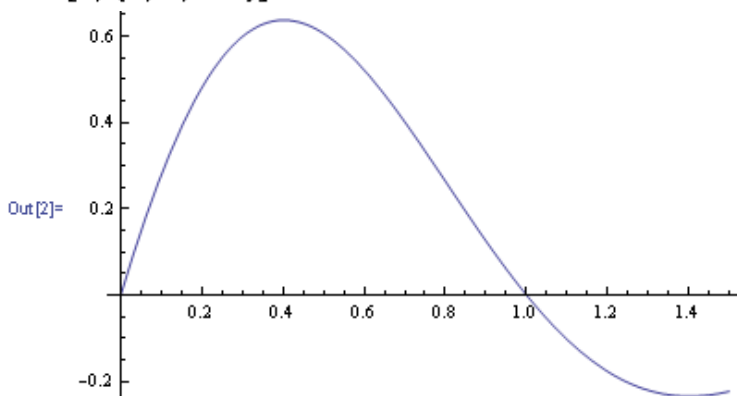


Рис. 1.4а. График сигнала (затухающая синусоида)

Определение системы базисных экспоненциальных функций, операционной матрицы спектра сигнала, нахождение аппроксимирующего полиномиального спектра и вывод вида системы базисных функций:

```
In[3]:= ss[t_, i_, m_] := Table[Exp[-t * (i - 1)], {i, m}];
```

```
s1 = ss[t, i, 5];
```

```
s2 = ss[t, j, 5];
```

```
In[6]:= s1
```

```
Out[6]= {1, e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}, e^{-4t}}
```

Вывод операционной матрицы аппроксимирующего экспоненциального спектра, операционного вектора спектра, вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома и формирование аппроксимирующего полинома:

```
In[7]:= W = N[Table[∫_0^{π/2} s1[[i]] * s2[[j]] dt, {i, 5}, {j, 5}]];
```

```
In[8]:= Q = Chop[N[Table[ $\int_0^{\pi/2} f + s1[[i]] dt$ , {i, 5}]]];
```

```
In[9]:= F = Inverse[W].Q;
```

```
In[10]:= W // MatrixForm
```

```
Out[10]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1.5708 & 0.79212 & 0.478393 & 0.330339 & 0.249533 \\ 0.79212 & 0.478393 & 0.330339 & 0.249533 & 0.199922 \\ 0.478393 & 0.330339 & 0.249533 & 0.199922 & 0.166653 \\ 0.330339 & 0.249533 & 0.199922 & 0.166653 & 0.142855 \\ 0.249533 & 0.199922 & 0.166653 & 0.142855 & 0.125 \end{pmatrix}$$

```
In[11]:= Q // MatrixForm
```

```
Out[11]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0.294426 \\ 0.230428 \\ 0.167553 \\ 0.121671 \\ 0.090142 \end{pmatrix}$$

```
In[12]:= F // MatrixForm
```

```
Out[12]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1.47015 \\ -17.6018 \\ 58.6928 \\ -68.5671 \\ 26.0487 \end{pmatrix}$$

```
In[13]:= fa = F.s1
```

```
Out[13]= 1.47015 + 26.0487 e-4t - 68.5671 e-3t + 58.6928 e-2t - 17.6018 e-t
```

```
In[14]:= Plot[{f, fa}, {t, 0, 1.5}]
```

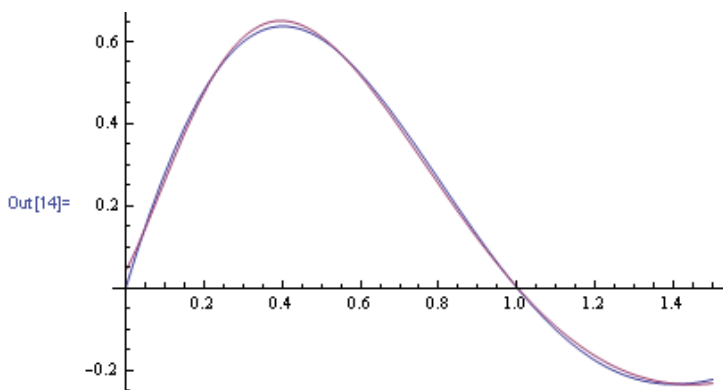


Рис.1.4б. Аппроксимация сигнала, совмещенная с сигналом  $e^{-t} \text{Sin}(\pi t)$

In[15]= Plot[f - fa, {t, 0, 1.5}]

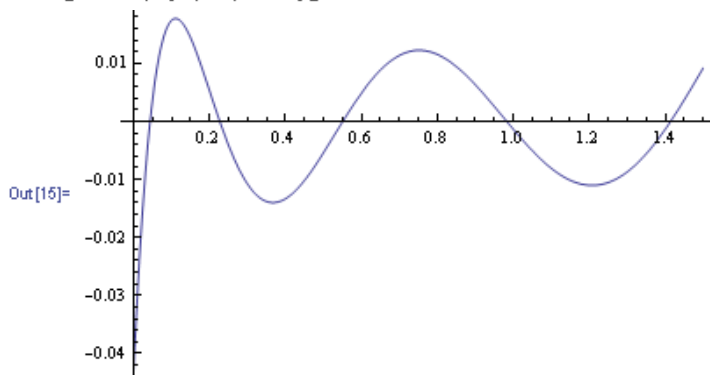


Рис.1.4с. Функция ошибки аппроксимации сигнала  $e^{-t} \text{Sin}(\pi t)$

**Пример 1.5.** Аппроксимировать сигнал  $e^{-t} \text{Sin}(\pi t)$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < \pi/2$ , используя в качестве системы базисных функций тригонометрический полином:

$$\bar{S}(t) = \{1, \text{Cos}(4t), \text{Cos}(8t), \text{Cos}(12t), \text{Cos}(16t), \text{Sin}(4t), \text{Sin}(8t), \text{Sin}(12t), \text{Sin}(16t)\}$$

Ниже приведена программа на языке системы Mathematica и результаты ее работы.

Определение сигнала:

In[1]: **f := Exp[-t] \* Sin[Pi \* t];**

Задание системы базисных функций:

In[2]: **ss[t\_, i\_, m\_] :=**

**Table[If[i ≤ m, Cos[4 t \* (i - 1)], Sin[4 t \* (i - m)]],**  
**{i, 2 m - 1}];**

In[3]: **s1 = ss[t, i, 5];**

In[4]: **s2 = ss[t, j, 5];**

Определение операционной матрицы аппроксимирующего полиномиального спектра, нахождение операционного вектора спектра, вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома и формирование полинома:

In[6]: **W = Chop[N[Table[∫<sub>0</sub><sup>π/2</sup> s1[[i]] \* s2[[j]] dt, {i, 9}, {j, 9}]]];**

```
In[7]:= Q = Chop[N[Table[ $\int_0^{\pi/2} f + s1[[i]] dt, \{i, 9\}]]];$ 
```

```
In[8]:= F = Inverse[W].Q;
```

```
In[9]:= fa = F.s1
```

```
Out[9]= 0.187437 - 0.139988 Cos[4 t] - 0.0595835 Cos[8 t] -  
0.0255808 Cos[12 t] - 0.0141814 Cos[16 t] + 0.419568 Sin[4 t] +  
0.0568154 Sin[8 t] + 0.0278815 Sin[12 t] + 0.0187018 Sin[16 t]
```

Графики сигнала и его аппроксимации изображены на рис.

1.5a:

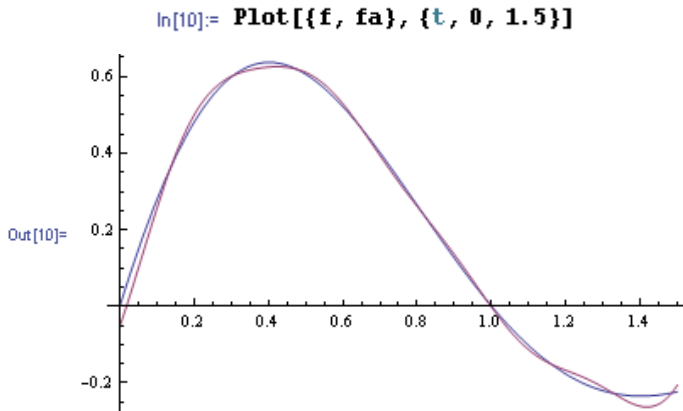


Рис.1.5а. Сигнал затухающей синусоиды и его аппроксимация тригонометрическим полиномом

Функция ошибки аппроксимации приведена на рис. 1.5b.

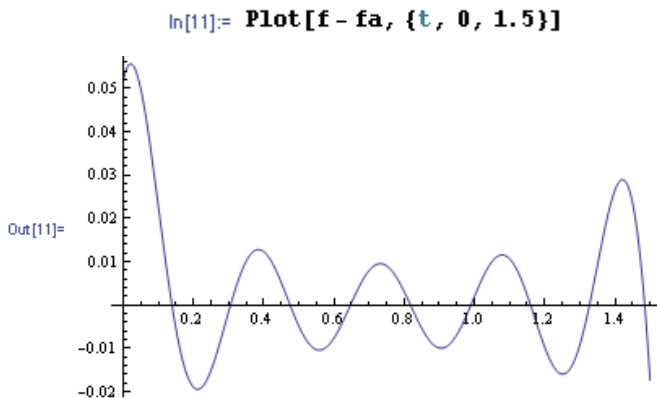


Рис.1.5b. Функция ошибки аппроксимации.

**Пример 1.6.** Аппроксимировать сигнал  $e^{-\frac{(x/90)^2} 2} - e^{-5\frac{(x/90)^2} 2}$  на интервале изменения аргумента  $-90 \leq x \leq 90$ , используя в качестве системы базисных функций систему ортогональных полиномов Лежандра [1, 6, 15].

Определение типа базисной функции и формирование на ее основе базисной системы порядка 16:

```
In[1]:= SL[x_] := Evaluate[Table[LegendreP[n, x], {n, 0, 15}]];
```

Так как классическая система полиномов Лежандра является ортогональной на интервале изменения аргумента  $(-1 < x < 1)$ , то для сохранения ортогональности базисной системы функций командой `In[2]` выполнено масштабирование аргумента  $x/90$ .

```
In[2]:= s1 = Simplify[SL[x/90]];
```

Отображение на графике системы базисных функций:

```
In[3]:= Plot[Evaluate[s1], {x, -90, 90}]
```

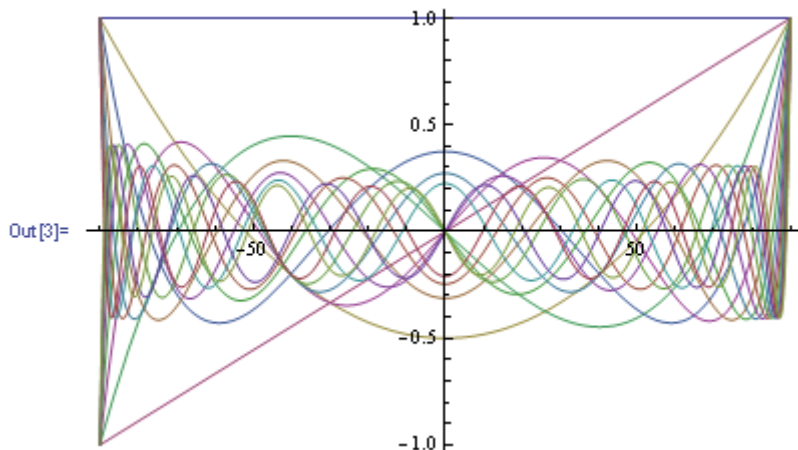


Рис.1.6а. Система полиномов Лежандра

Определение сигнала, подлежащего аппроксимации системой полиномов Лежандра:

```
In[4]:= f = Exp[-0.5 (x/90)^2] - 0.2 Exp[-5 (x/90)^2];
```

Сигнал на интервале аппроксимации приведен на рис. 1.6б.

```
In[5]:= Plot[f, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]
```

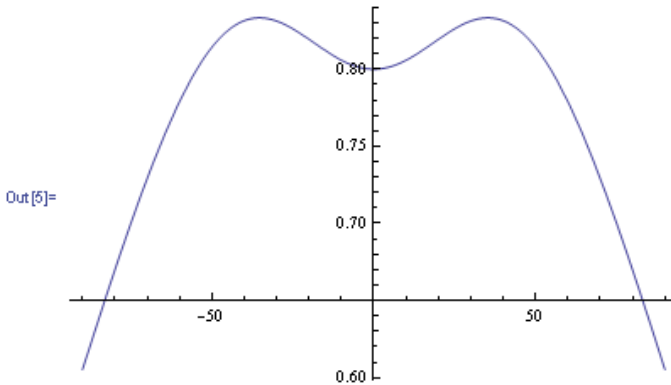


Рис.1.6b. Аппроксимируемый сигнал

Формирование операционной матрицы спектра:

```
In[6]:= W = Table [  $\int_{-90}^{90} s1[[i]] * s1[[j]] dx$ , {i, 16}, {j, 16} ];
```

Вывод фрагмента матрицы (с целью иллюстрации порядок матрицы уменьшен до 8):

```
In[7]:= W1 = Table [  $\int_{-90}^{90} s1[[i]] * s1[[j]] dx$ , {i, 8}, {j, 8} ];
```

```
In[8]:= W1 // MatrixForm
```

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{180}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{180}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{180}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Определение операционного вектора спектра Q:

```
In[9]:= Q = Table [  $\int_{-90}^{90} f * s1[[i]] dx$ , {i, 16} ];
```

Нахождение аппроксимирующего спектра Лежандра для заданного сигнала:

```
In[10]:= F = Inverse[W].Q;
```



In[11]:= **F**

Out[11]= {0.776482, 0., -0.131348, 0., -0.0682659,  
0., 0.0384327, 0., -0.0128701, 0., 0.00336664,  
0., -0.000731138, 0., 0.000135044, 0.}

Формирование аппроксимирующего полинома:

In[12]:= **fa = F.s1;**

Аппроксимация сигнала и ошибка аппроксимации приведены на рис.1.6с, 1.6д.

In[13]:= **Plot[{fa, f}, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]**

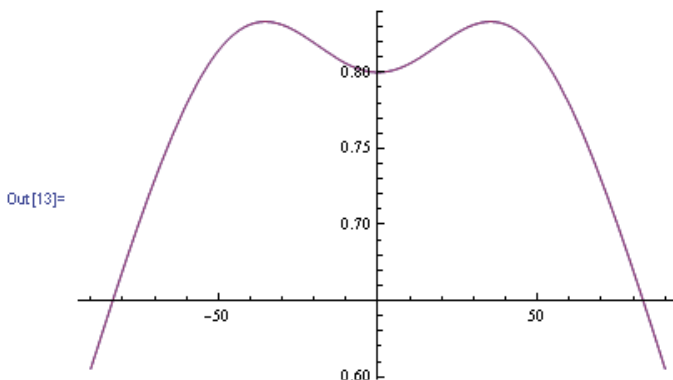


Рис.1.6с. Аппроксимация сигнала в базисной системе на основе полиномов Лежандра

In[14]:= **Plot[fa - f, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]**

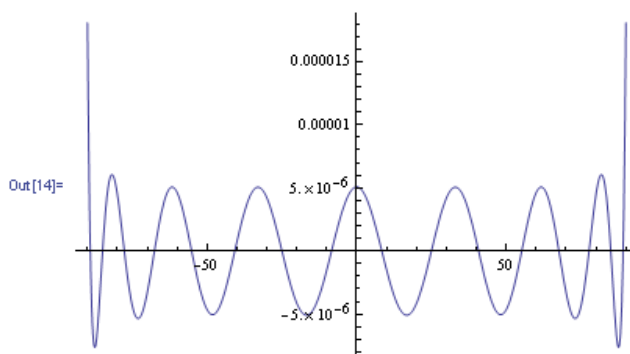


Рис.1.6д. Функция ошибки аппроксимации.

Анализ результатов аппроксимации показывает, что в связи с тем, что аппроксимируемый сигнал является четным, в полученной системе полиномов Лежандра отсутствуют нечетные компоненты, что позволяет уменьшить вдвое порядок базисной системы функций.

Повторим процесс аппроксимации, изменив систему базисных функций.

Задание системы базисных функций в виде системы четных полиномов Лежандра седьмого порядка:

```
In[15]:= SL2[x_] := Evaluate[Table[LegendreP[n, x], {n, 0, 12, 2}]];
```

```
In[16]:= s12 = Simplify[SL2[x/90]];
```

Отображение на графике полученной системы базисных функций (четные компоненты):

```
In[17]:= Plot[Evaluate[s12], {x, -90, 90}]
```

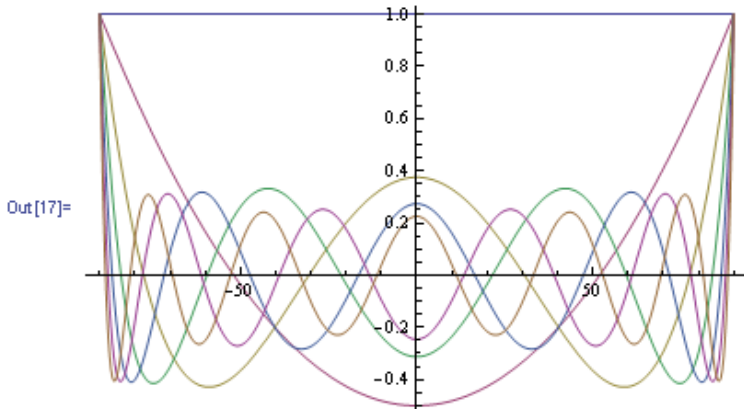


Рис. 1.6е. Базисная система функций на основе четных полиномов Лежандра

Формирование операционной матрицы спектра Лежандра:

```
In[19]:= W2 := Table[Integrate[s12[[i]] * s12[[j]], {x, -90, 90}],
  {i, 7}, {j, 7};
```

Формирование операционного вектора спектра сигнала:

```
In[19]:= Q2 = Table[ $\int_{-90}^{90} s12[[i]] * f dx$ , {i, 7}];
```

```
In[20]:= Q2
```

```
Out[20]:= {139.767, -4.72853, -1.36532,
  0.532145, -0.136272, 0.0288569, -0.0052642}
```

Нахождение аппроксимирующего спектра Лежандра:

In[21]:= **F2 = Inverse[W2].Q2;**

In[22]:= **F2**

Out[22]= {0.776482, -0.131348, -0.0682659,  
0.0384327, -0.0128701, 0.00336664, -0.000731138}

Формирование аппроксимирующего полинома для сигнала:

In[23]:= **fa2 = F2.s12;**

Отображение на графике аппроксимации сигнала и функции ошибки аппроксимации:

In[24]:= **Plot[fa2, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]**

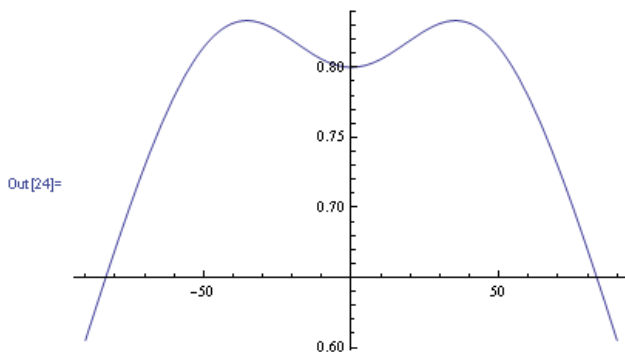


Рис.1.6f. Аппроксимация сигнала на основе базисной системы функций (четные полиномы Лежандра)

In[25]:= **Plot[fa2 - f, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]**

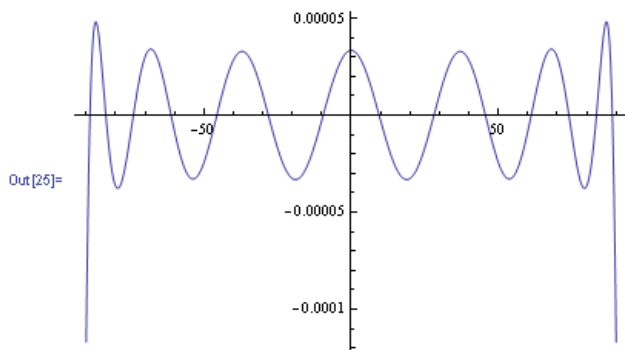


Рис.1.6g.Функция ошибки аппроксимации.

Сравнение коэффициентов аппроксимирующих полиномов показывает, что ненулевые компоненты не изменились.

## 1.2. Аппроксимация сигналов, заданных массивами (в виде таблиц)

При измерениях величин, характеризующих исследуемый процесс, при обработке результатов экспериментальных исследований и в ряде других случаев часто приходится иметь дело с множеством отсчетов сигналов, относящихся к различным моментам времени или различным значениям пространственных координат. Таким образом, сигнал может быть задан в форме следующей таблицы значений:

Таблица 1.1

$k$	1	2	...	$r$
$t_k$	$t_1$	$t_2$	...	$t_r$
$x_k$	$x_1$	$x_2$	...	$x_r$

Поставим задачу аппроксимировать заданный сигнал обобщенным полиномом порядка  $m$  в системе базисных функций  $\{s_i(t)\}_{i=1}^m$ :

$$x = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t). \quad (1.7)$$

Подставим в выражение аппроксимирующего полинома (1.7) значения отсчетов из таблицы:

$$x_k = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t_k), \quad k := 1, \dots, r. \quad (1.8)$$

Последнее выражение может рассматриваться как система линейных алгебраических уравнений относительно искоемых коэффициентов аппроксимирующего полинома. Матрица коэффициентов этой системы уравнений определяется выражением:

$$w_{ki} = s_i(t_k). \quad (1.9)$$

Так как количество отсчетов сигнала и порядок обобщенного полинома, в общем случае, не равны, операционная матрица спектра получается прямоугольной, и решение этой системы уравнений должно получаться с помощью псевдообратной матрицы. Как известно [5], если порядок аппроксимирующего полинома меньше числа отсчетов сигнала ( $m < r$ ), система уравнений является переопределенной, и решение, полученное с помощью псевдообратной матрицы будет обращать в минимум сумму квадратов ошибок в уравнениях, получаемых при подстановки в них значений от-

счетов. Если порядок аппроксимирующего полинома равен числу отсчетов сигнала ( $m = r$ ), решение системы уравнений будет определять систему коэффициентов единственного аппроксимирующего полинома, проходящего через все точки отсчетов. Если порядок аппроксимирующего полинома больше числа отсчетов ( $m > r$ ), система уравнений будет недоопределенной, однако, решение с помощью псевдообратной матрицы будет определять систему коэффициентов аппроксимирующего полинома, для которой минимальна сумма квадратов этих коэффициентов, а сам аппроксимирующий полином будет проходить через все точки отсчетов сигнала.

Рассмотрим иллюстративные примеры аппроксимации сигналов, заданных таблично.

**Пример 1.7.** Аппроксимировать сигнал, заданный значениями функции  $x(t) = \cos(t^2) + 0.1\sin(7t)$  в 10 равноотстоящих точках интервала  $0 \leq t < T = 1$ , с помощью степенных полиномов различных порядков. Программа аппроксимации с комментариями в среде системы Mathematica и результаты ее работы приводятся ниже.

Задаем систему 10 равноотстоящих моментов времени на единичном интервале изменения аргумента:

```
In[1]:= h = 0.1; r = 10;
```

```
tt := Table[i * h, {i, 0, r - 1}];
```

```
In[3]:= tt
```

```
Out[3]= {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}
```

Сформируем сигнал:

```
In[4]:= T = 1;
```

```
x := Cos[(t/T)^2] + 0.1 Sin[7 t/T];
```

и отобразим его на графике:

```
In[6]:= p1 = Plot[x, {t, 0, T}, PlotRange -> All]
```

Сформируем массив отсчетов сигнала в заданные выше моменты времени:

```
In[7]:= xt := Table[x /. t -> tt[[i]], {i, r}];
```

```
In[8]:= xt
```

```
Out[8]= {1, 1.06437, 1.09775, 1.08227, 1.02073,
          0.933834, 0.848739, 0.784088, 0.738969, 0.69118}
```

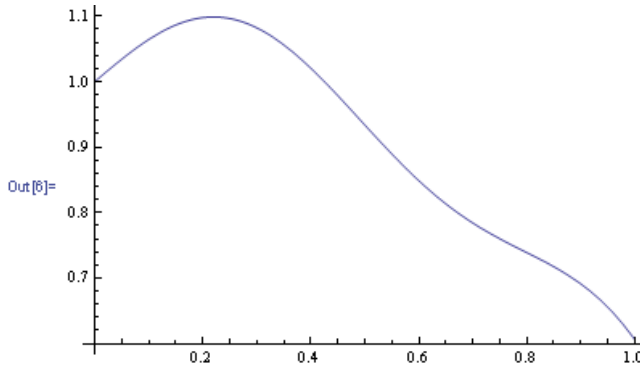


Рис.1.7а. Исходный сигнал

Отообразим полученный массив отсчетов:

```
In[9]:= p2 = ListPlot[Table[{tt[[i]], xt[[i]]}, {i, r}],
  PlotStyle -> PointSize[0.015]]
```

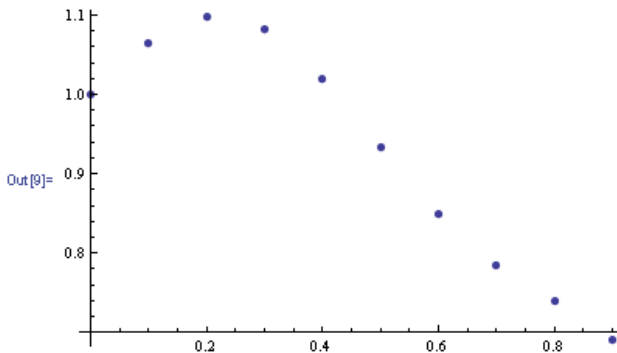


Рис.1.7b. Массив отсчетов сигнала

Сформируем систему степенных базисных функций и выберем ее порядок равный 5:

```
In[10]:= m = 5; k = 10;
```

$$\mathbf{s}[t_, T_, i_] := \left(\frac{t}{T}\right)^{i-1};$$

```
In[12]:= si = s[t, 1, i];
```

```
S = Table[si, {i, m}];
```

```
In[14]:= S
```

```
Out[14]= {1, t, t^2, t^3, t^4}
```

Сформируем операционную матрицу аппроксимирующего степенного спектра для этой системы отсчетов:

In[15]:= **w = Table[si /. t → tt[[j]], {j, k}, {i, m}];**

In[16]:= **w // MatrixForm**

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 0.008 & 0.0016 \\ 1 & 0.3 & 0.09 & 0.027 & 0.0081 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 & 0.1296 \\ 1 & 0.7 & 0.49 & 0.343 & 0.2401 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 & 0.4096 \\ 1 & 0.9 & 0.81 & 0.729 & 0.6561 \end{pmatrix}$$

Определим операционный вектор спектра:

In[17]:= **Q = xt**

Out[17]= {1, 1.06437, 1.09775, 1.08227, 1.02073,  
0.933834, 0.848739, 0.784088, 0.738969, 0.69118}

Определим вектор коэффициентов аппроксимирующего полинома и построим аппроксимирующий полином:

In[18]:= **X = PseudoInverse[w].Q**

Out[18]= {0.994651, 1.18001, -3.86829, 2.75786, -0.361736}

In[19]:= **xa = X.S**

Out[19]= 0.994651 + 1.18001 t - 3.86829 t<sup>2</sup> + 2.75786 t<sup>3</sup> - 0.361736 t<sup>4</sup>

Построим график аппроксимирующего полинома:

In[20]:= **p3 = Plot[xa, {t, 0, T}]**

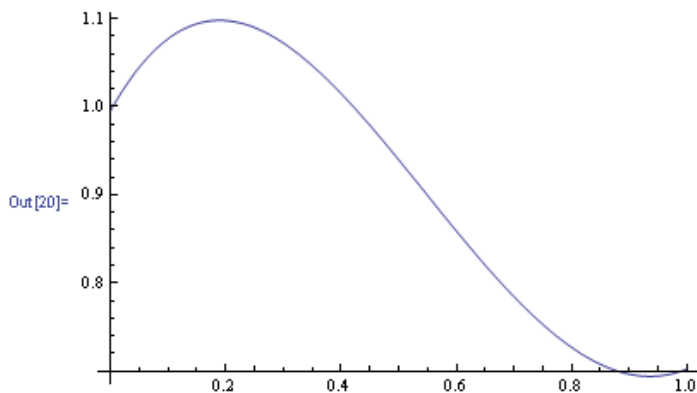


Рис.1.7с. Аппроксимация дискретизованного сигнала

Совместим этот график с картиной точек отсчета сигнала:

```
In[21]:= Show[p2, p3]
```

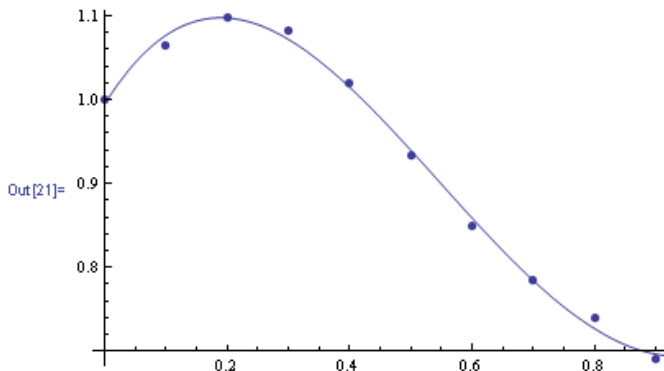


Рис.1.7d. Аппроксимация сигнала, совмещенная с массивом отсчетов

Уменьшим порядок аппроксимирующего полинома до  $m = 3$ . Программа и результаты ее работы приводятся ниже.

```
In[22]:= S1 = Table[s[t, T, i], {i, 3}];
```

```
In[23]:= w1 = Table[si /. t -> tt[[j]], {j, k}, {i, 3}];
```

```
In[24]:= w1 // MatrixForm
```

Out[24]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.1 & 0.01 \\ 1 & 0.2 & 0.04 \\ 1 & 0.3 & 0.09 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.6 & 0.36 \\ 1 & 0.7 & 0.49 \\ 1 & 0.8 & 0.64 \\ 1 & 0.9 & 0.81 \end{pmatrix}$$

```
In[25]:= X1 = PseudoInverse[w1].0
```

```
Out[25]= {1.0493, 0.143689, -0.658845}
```

```
In[26]:= xa1 = X1.S1
```

```
Out[26]= 1.0493 + 0.143689 t - 0.658845 t^2
```

```
In[27]:= p4 = Plot[xa1, {t, 0, T}]
```



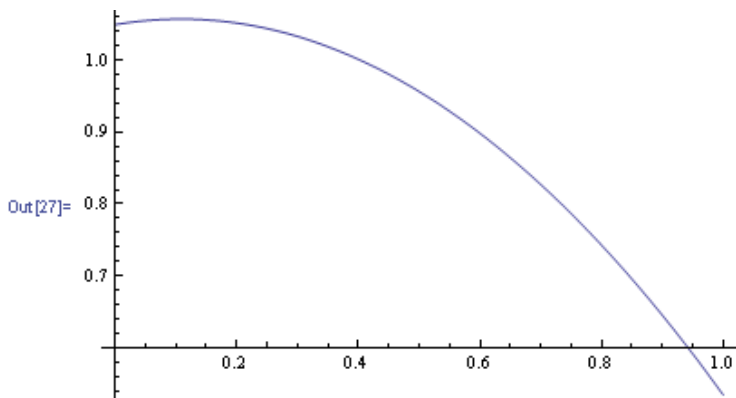


Рис.1.7е. Аппроксимация сигнала полиномом второй степени

In[28]:= Show[p4, p2]

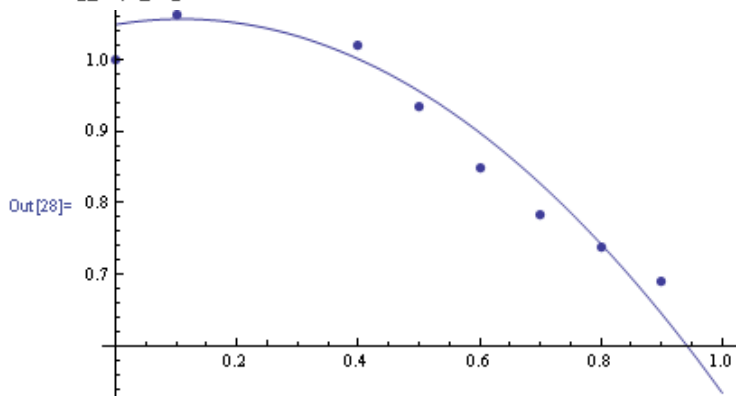


Рис.1.7ф. Аппроксимация полиномом второго порядка, совмещенная с массивом отсчетов сигнала

Ограничимся теперь выборкой из пяти отсчетов сигнала. Для полинома пятой степени получим следующую картину (шаг по времени увеличен вдвое на том же интервале изменения аргумента), программа и результаты ее работы приводятся без комментариев.

In[29]:= **h1 = 0.2; r1 = 5;**

**tt1 = Table[i \* h1, {i, 0, r1 - 1}];**

In[31]:= **tt1**

Out[31]= {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8}

In[32]:= **xt1 = Table[x /. t -> tt1[[i]], {i, r1}];**

```
In[33]:= xt1
```

```
Out[33]:= {1, 1.09775, 1.02073, 0.848739, 0.738969}
```

```
In[34]:= p5 = ListPlot[Table[{tt1[[i]], xt1[[i]]}, {i, r1}],  
PlotStyle -> PointSize[0.017]]
```

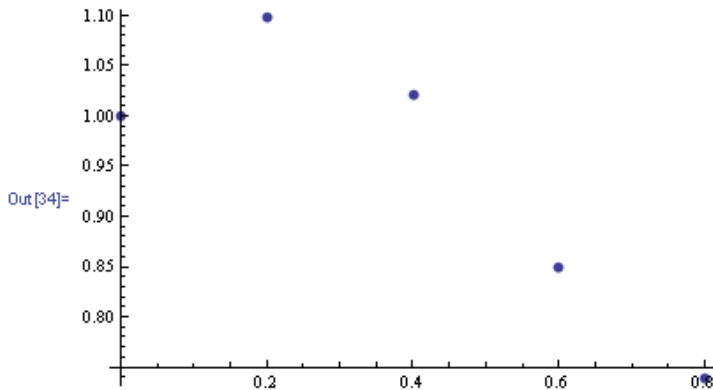


Рис.1.7g. Уменьшенный вдвое массив отсчетов сигнала

```
In[35]:= k = 5;
```

```
In[36]:= w2 = Table[si /. t -> tt1[[j]], {j, k}, {i, m}];
```

```
In[37]:= w2 // MatrixForm
```

Out[37]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 0.008 & 0.0016 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 & 0.1296 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 & 0.4096 \end{pmatrix}$$

```
In[38]:= Q1 = xt1
```

```
Out[38]:= {1, 1.09775, 1.02073, 0.848739, 0.738969}
```

```
In[39]:= X2 = PseudoInverse[w2].Q1
```

```
Out[39]:= {1., 0.961894, -2.29526, -0.755966, 2.01532}
```

```
In[40]:= xa2 = X2.S
```

```
Out[40]:= 1. + 0.961894 t - 2.29526 t2 - 0.755966 t3 + 2.01532 t4
```

```
In[41]:= p6 = Plot[xa2, {t, 0, T}]
```

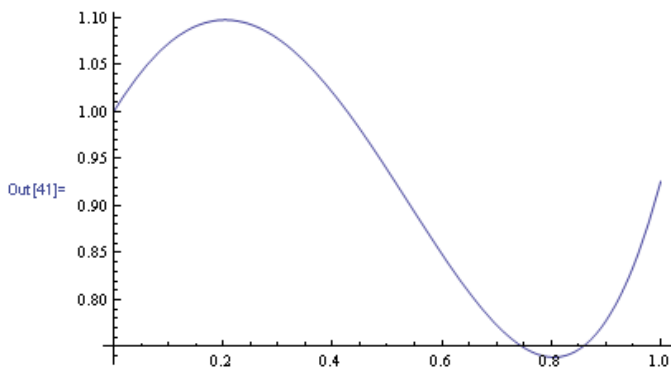


Рис.1.7h. Аппроксимация сигнала с уменьшенным числом отсчетов полиномом четвертой степени

In[42]:= Show[p5, p6]

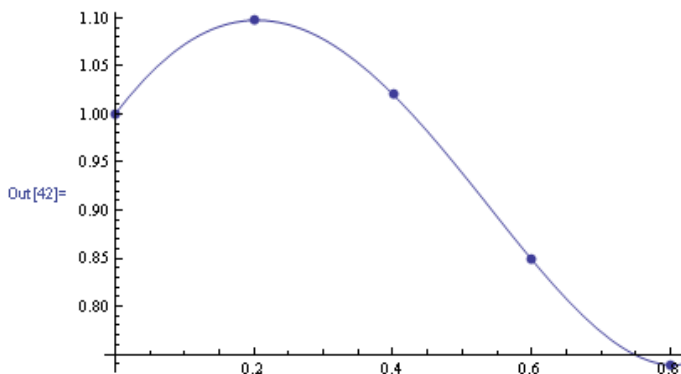


Рис.1.7k. Аппроксимация сигнала, совмещенная с системой отсчетов (5 отсчетов, степень полинома – 4)

Если на той же сокращенной выборке использовать полином шестой степени, получим следующую картину:

In[43]:= m1 = 7;

In[44]:= w3 = Table[si /. t -> tt1[[j]], {j, k}, {i, m1}];

In[45]:= w3 // MatrixForm

Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 0.008 & 0.0016 & 0.00032 & 0.000064 \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 & 0.0256 & 0.01024 & 0.004096 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 & 0.1296 & 0.07776 & 0.046656 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 & 0.4096 & 0.32768 & 0.262144 \end{pmatrix}$$

In[46]:= X3 = PseudoInverse[w3].Q1

```

Out[46]= {1., 0.984985, -2.53474,
          0.0748656, 0.851311, 0.546091, 0.0276269}
In[47]:= S2 := Table[si, {i, m1}];
In[48]:= xa3 = X3.S2
Out[48]= 1. + 0.984985 t - 2.53474 t2 + 0.0748656 t3 +
          0.851311 t4 + 0.546091 t5 + 0.0276269 t6
In[49]:= p8 = Plot[xa3, {t, 0, T}]

```

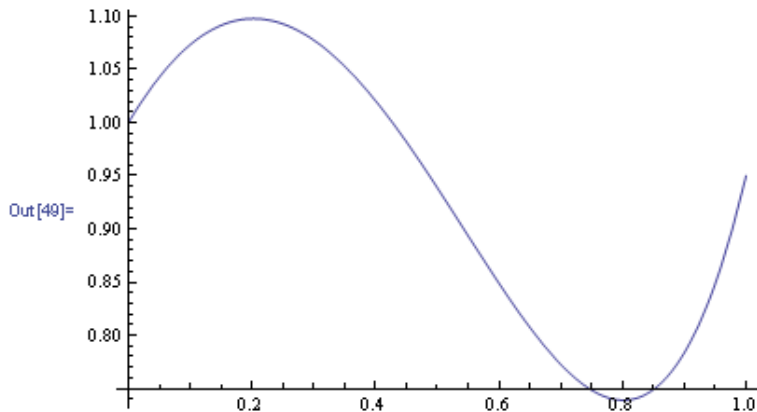


Рис.1.7m. Аппроксимация сигнала полиномом 6 степени

```

In[50]:= p9 = Show[p5, p8]

```

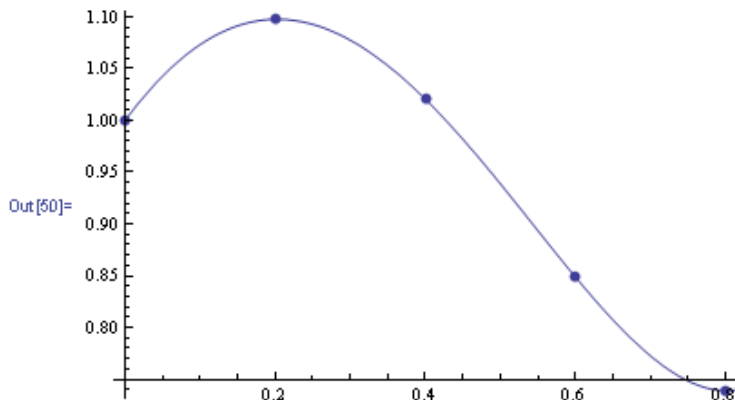


Рис.1.7n. Аппроксимация сигнала, совмещенная с системой отсчетов (5 отсчетов, степень полинома – 6)

Сравнение двух последних графиков показывает, что качество аппроксимации практически не изменилось, несмотря на увеличение порядка аппроксимирующего полинома.

### 1.3. Аппроксимация сигналов, заданных в параметрической форме

При статистической обработке экспериментальных данных, параметрической идентификации процессов и систем и ряде других применений, связанных с цифровой обработкой сигналов, часто сигналы заданы в параметрической форме. Примерами могут служить фазовые портреты систем автоматического управления, диаграммы направленности антенных систем, диаграммы распределения силы света источников светового излучения и т.п. Основные соотношения для параметрических составляющих сигнала в случае непрерывных сигналов определяются выражениями (1.10):

$$\begin{aligned}
 &y(x), \\
 &y = \varphi(t), \\
 &x = \psi(t), \\
 &t = \psi^{-1}(x), \\
 &y = \varphi(\psi^{-1}(x)).
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

При дискретизации подобных сигналов в форме отсчетов возникают многомерные таблицы (Таблица 1. 2) .

Таблица 1.2

№ отсчета	$k$	1	2	...	$r$
Параметрический аргумент	$t_k$	$t_1$	$t_2$	...	$t_r$
Координата 1	$x_k$	$x_1$	$x_2$	...	$x_r$
Координата 2	$y_k$	$y_1$	$y_2$	...	$y_r$

Значения параметрического аргумента могут быть не заданы. Если параметрические составляющие сигнала заданы в явном виде, аппроксимация может быть выполнена описанным выше способом. В том случае, когда значения параметрического аргумента неизвестны, они приближенно могут быть оценены путем использования формул перехода от декартовой к полярным координатам:

$$t_k = \text{Arc cos} \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} = \text{Arc sin} \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}
 \tag{1.11}$$

Рассмотрим примеры аппроксимации сигналов, заданных в параметрической форме.

**Пример 1.8.** Аппроксимировать сигнал, заданный своими параметрическими составляющими:

$$y(t) = e^{-t} \sin(2\pi t),$$

$$x(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t),$$

на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 2$ , используя систему базисных функций 7 порядка.

Ниже приводится программа решения аппроксимационной задачи с комментариями и результаты ее работы.

Задание параметрических составляющих сигнала:

```
In[1]:= Y[t_, ω_] := Exp[-t] * Sin[ω * t];
```

```
In[2]:= x[t_, ω_] := Exp[-2 t] * Cos[ω * t];
```

```
In[3]:= y1 = Y[t, 2 π]; x1 = x[t, 2 π];
```

Отображение на графиках сигнала и его параметрических составляющих:

```
In[4]:= pp = ParametricPlot[{x1, y1}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]
```

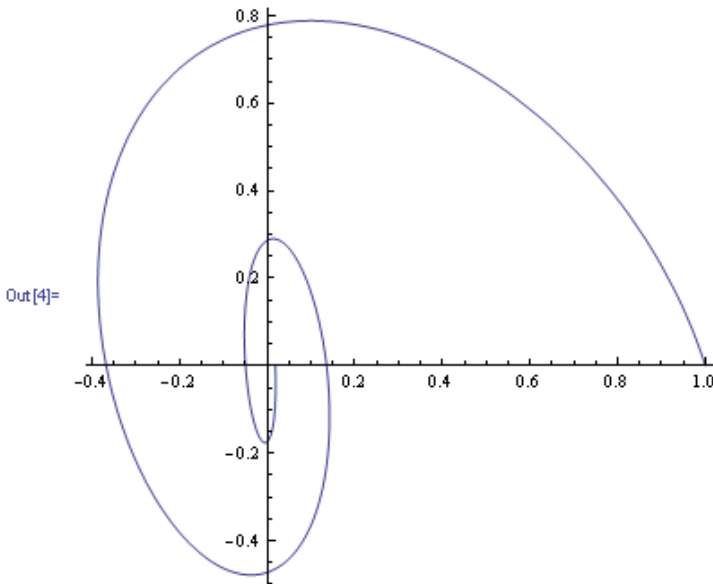


Рис.1.8а. Аппроксимируемый сигнал

```
In[5]:= Plot[y1, {t, 0, 2}]
```

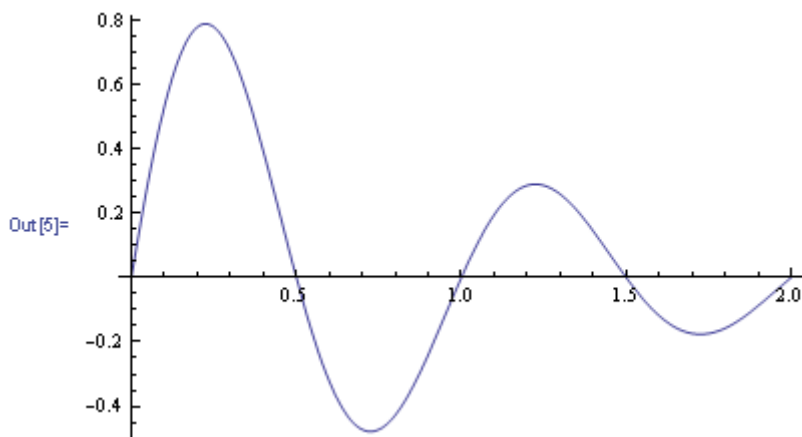


Рис.1.8б. «у»-параметрическая составляющая сигнала

In[6]:= `Plot[x1, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]`

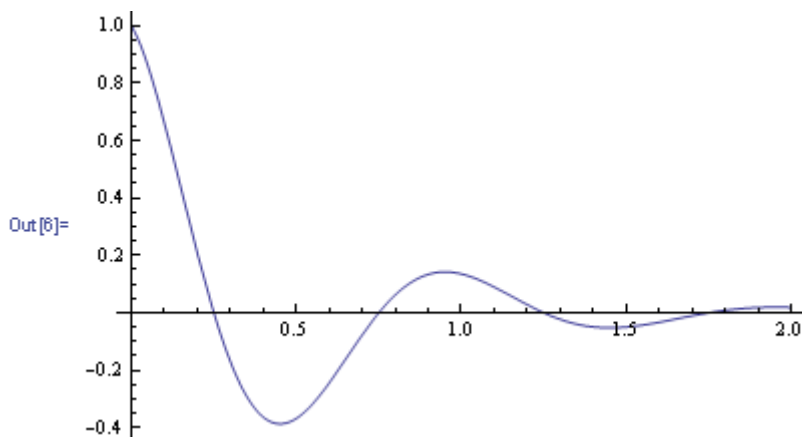


Рис.1.8с. «х»-параметрическая составляющая сигнала

Формирование системы базисных функций:

In[7]:= `m = 7; T = 2;`

In[8]:= `s[t_, n_, T_] := (t/T)^(n-1);`

In[9]:= `S = Table[s[t, n, T], {n, m + 1}];`

In[10]:= `S`

Out[10]=  $\left\{ 1, \frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}, \frac{t^3}{8}, \frac{t^4}{16}, \frac{t^5}{32}, \frac{t^6}{64}, \frac{t^7}{128} \right\}$

Формирование операционной матрицы аппроксимирующего полиномиального спектра:

```
In[11]:= w1 = Transpose[{S}].{S};
```

```
In[12]:= W = ∫02 w1 dt;
```

```
In[13]:= N[%, 4] // MatrixForm
```

```
Out[13]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2.000 & 1.000 & 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 \\ 1.000 & 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 \\ 0.6667 & 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 & 0.2000 \\ 0.5000 & 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 & 0.2000 & 0.1818 \\ 0.4000 & 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 & 0.2000 & 0.1818 & 0.1667 \\ 0.3333 & 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 & 0.2000 & 0.1818 & 0.1667 & 0.1538 \\ 0.2857 & 0.2500 & 0.2222 & 0.2000 & 0.1818 & 0.1667 & 0.1538 & 0.1429 \\ 0.2500 & 0.2222 & 0.2000 & 0.1818 & 0.1667 & 0.1538 & 0.1429 & 0.1333 \end{pmatrix}$$

Нахождение операционных векторов спектров параметрических составляющих сигнала:

```
In[14]:= Qx = N[∫0T x1 * S dt]
```

```
Out[14]= {0.0451573, -0.0100546, -0.00186559, -0.000121196,
          0.000106425, 0.000249044, 0.000471636, 0.00072361}
```

```
In[15]:= Qy = N[∫0T y1 * S dt]
```

```
Out[15]= {0.134216, -0.0176914, -0.0235391, -0.0220961,
          -0.0214461, -0.0209269, -0.0201355, -0.0190608}
```

Определение векторов коэффициентов аппроксимирующих полиномов:

```
In[16]:= X = Inverse[W].Qx
```

```
Out[16]= {0.973018, -1.22185, -137.696,
          952.569, -2618.98, 3551.21, -2369.1, 622.307}
```

```
In[17]:= Y = Inverse[W].Qy
```

```
Out[17]= {-0.0777317, 16.8954, -71.3631,
          -253.027, 1814.67, -3586.16, 3003.6, -924.678}
```

Формирование аппроксимирующих полиномов:

```
In[18]:= x1a = X.S
```

```
Out[18]= 0.973018 - 0.610924 t - 34.424 t2 + 119.071 t3 -
          163.686 t4 + 110.975 t5 - 37.0172 t6 + 4.86178 t7
```

```
In[19]:= y1a = Y.S
```



Out[19]=  $-0.0777317 + 8.44771 t - 17.8408 t^2 - 31.6284 t^3 + 113.417 t^4 - 112.068 t^5 + 46.9313 t^6 - 7.22405 t^7$

Отображение на графике аппроксимаций параметрических составляющих сигналов, совмещенных с исходными сигналами:

In[20]= `Plot[{x1, x1a}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]`

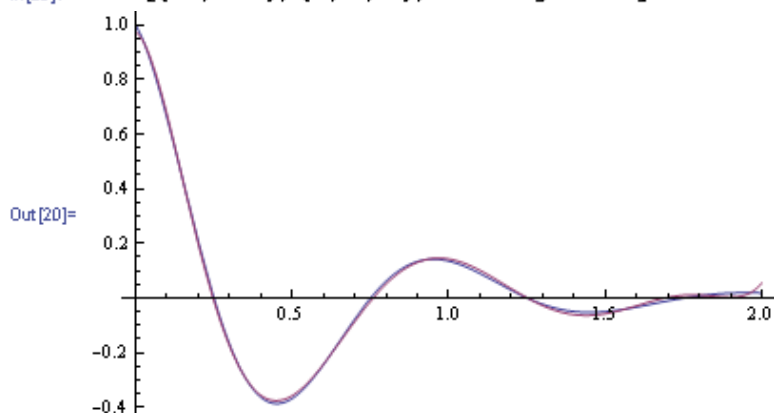


Рис.1.8d. «x»-параметрическая составляющая сигнала и ее аппроксимация

In[21]= `Plot[{y1, y1a}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]`

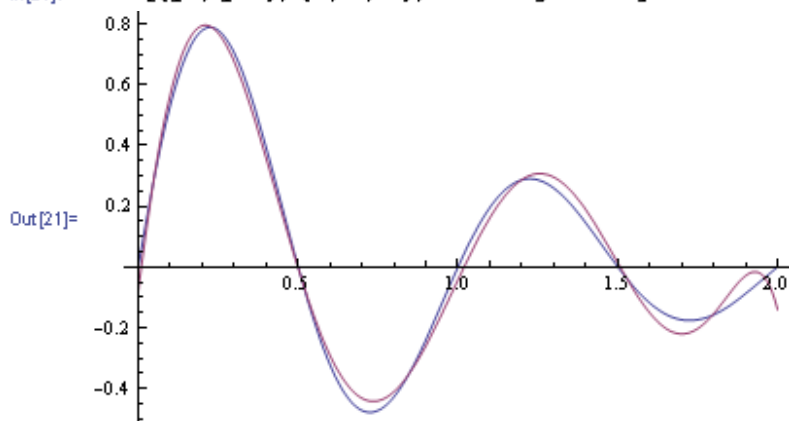


Рис.1.8d. «у»-параметрическая составляющая сигнала и ее аппроксимация

Построение графика аппроксимированного сигнала и графика функций ошибки аппроксимации:

In[22]= `ppa = ParametricPlot[{x1a, y1a}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]`

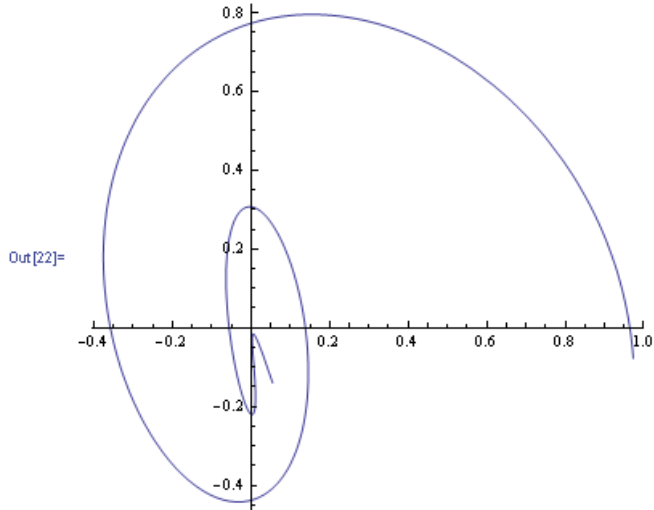


Рис.1.8е. Аппроксимированный сигнал

```
In[23]:= ppe = ParametricPlot[{x1 - x1a, y1 - y1a}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]
```

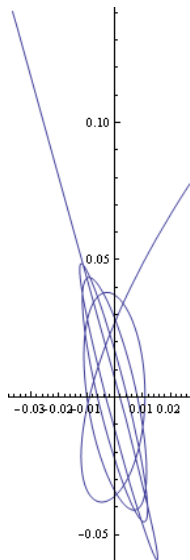


Рис.1.8ф. Ошибка аппроксимации

Повторим процесс аппроксимации сигнала, заданного дискретными отсчетами параметрических составляющих сигнала.

Формирование массива отсчетов параметрических составляющих сигнала и аргумента (шаг по параметрическому аргументу  $t$  выбран равным 0.05):

In[24]:= **h = 0.05;**

In[25]:= **X1 = Table[x[i \* h, 2  $\pi$ ], {i, 0, 40}];**

In[26]:= **Y1 = Table[y[i \* h, 2  $\pi$ ], {i, 0, 40}];**

In[27]:= **tt = Table[i \* h, {i, 0, 40}];**

Отображение системы отсчетов параметрических составляющих сигнала на графиках:

In[28]:= **Px = ListPlot[X1, PlotStyle  $\rightarrow$  PointSize[0.01], PlotRange  $\rightarrow$  All]**

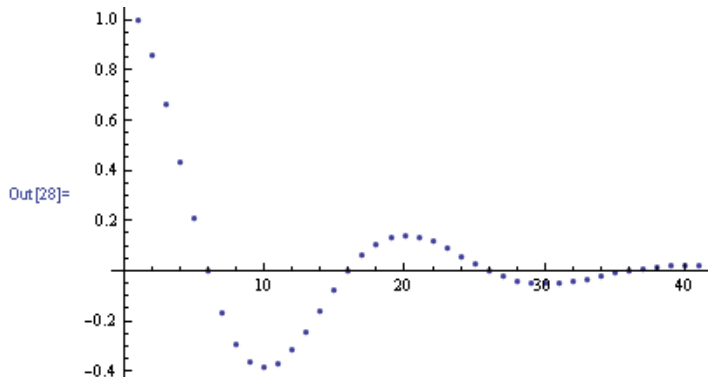


Рис.1.8g. Отсчеты параметрической «x»-составляющей сигнала

In[29]:= **Py = ListPlot[Y1, PlotStyle  $\rightarrow$  PointSize[0.01], PlotRange  $\rightarrow$  All]**

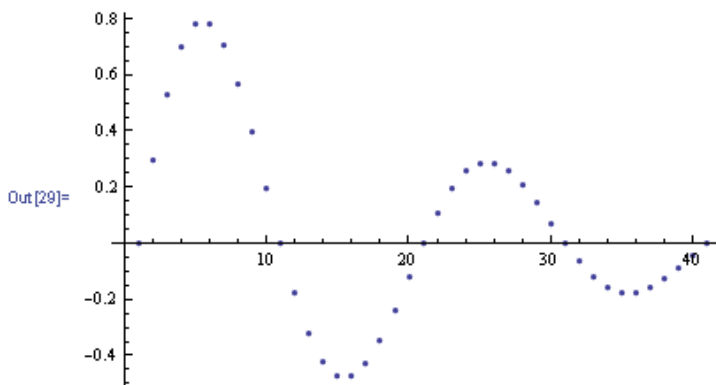


Рис.1.8h. Отсчеты параметрической «y»-составляющей сигнала

В приведенных графиках в качестве аргумента выступает номер отсчета. С целью сравнения удобно переформатировать эти графики, перейдя к естественному параметрическому аргументу  $t$ :

```
In[30]:= Px2 = ListPlot[Table[{tt[[k]], X1[[k]]}, {k, 41}],
PlotStyle -> PointSize[0.01], PlotRange -> All]
```

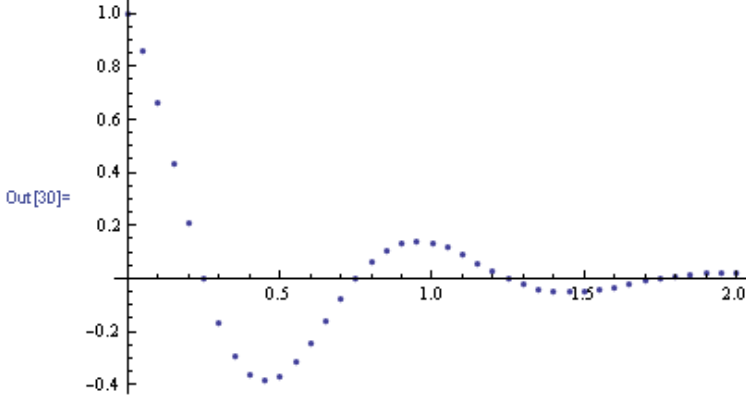


Рис.1.8к. Отсчеты параметрической «x»-составляющей сигнала (параметрический аргумент)

```
In[31]:= Py2 = ListPlot[Table[{tt[[k]], Y1[[k]]}, {k, 41}],
PlotStyle -> PointSize[0.01], PlotRange -> All]
```

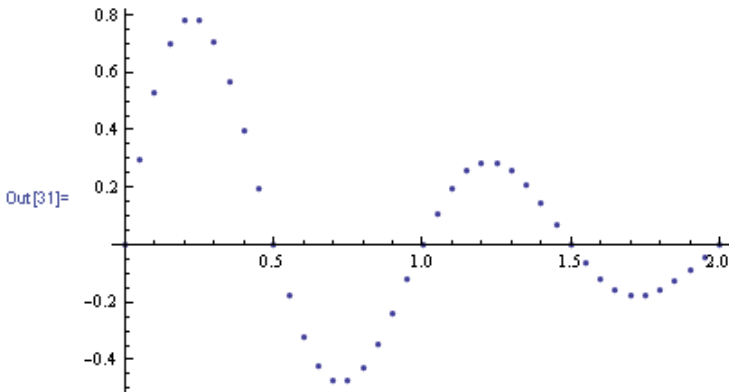


Рис.1.8м. Отсчеты параметрической «y»-составляющей сигнала (параметрический аргумент)

Параметрическая форма дискретизированного сигнала:

```
In[32]:= Pxy = ListPlot[Table[{X1[[k]], Y1[[k]]}, {k, 41}],
PlotStyle -> PointSize[0.01], PlotRange -> All]
```

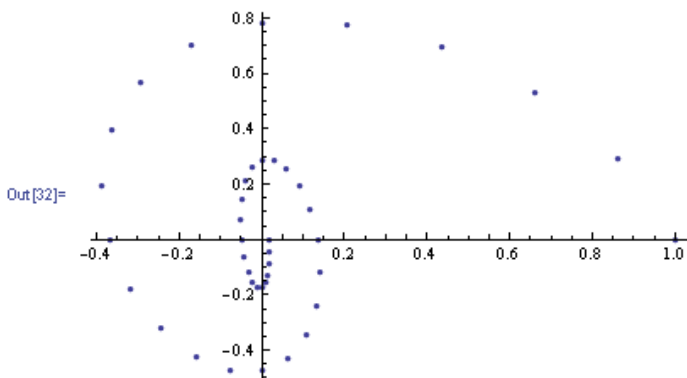


Рис.1.8п. Дискретизированный сигнал

Совмещение исходного и дискретизированного сигналов на одном графике в параметрической форме:

In[33]:= **Show**[[**pp**, **Pxy**]]

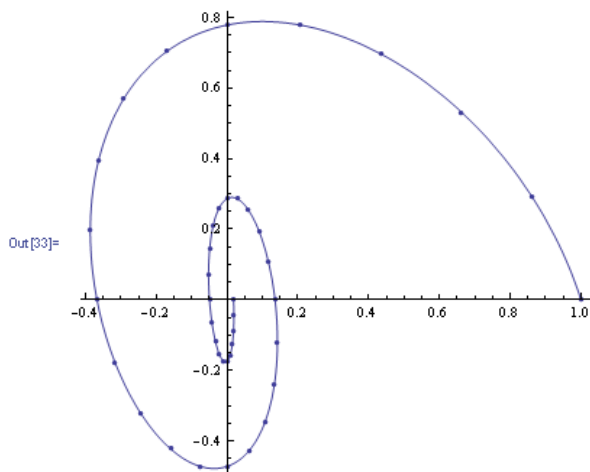


Рис.1.8р. Исходный и дискретизированный сигнал в параметрической форме

Приведенные шаги программы иллюстрировали процесс получения массива данных дискретизированного сигнала и параметрического аргумента (X1,Y1, tt).

Теперь переходим непосредственно к аппроксимации.

Формирование операционной матрицы спектра:

In[34]:= **m = 7; T = 2;**

In[35]:= **w := Table[S[[**p**]] /. **t** → **tt**[[**r**]], {**p**, **m + 1**}, {**r**, 41}];**

Определение векторов аппроксимирующих полиномиальных спектров:

```

In[38]:= q1 = X1;
          q2 = Y1;
          X = PseudoInverse[Transpose[w]].q1
Out[38]:= {0.990612, -1.86241, -130.453,
           915.584, -2521.19, 3412.42, -2268.84, 593.389}
In[39]:= Y = PseudoInverse[Transpose[w]].q2
Out[39]:= {-0.0407251, 16.0334, -65.9639,
           -262.709, 1801.47, -3521.48, 2928.8, -896.161}
Построение аппроксимирующих полиномов:
In[40]:= xa = X.S;
In[41]:= ya = Y.S;
In[42]:= Pxa = Plot[{x1, xa}, {t, 0, 2}]

```

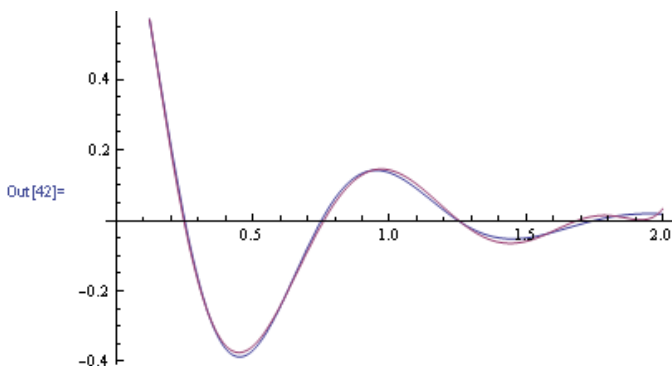


Рис.1.8q. Аппроксимация «x»- параметрической составляющей сигнала

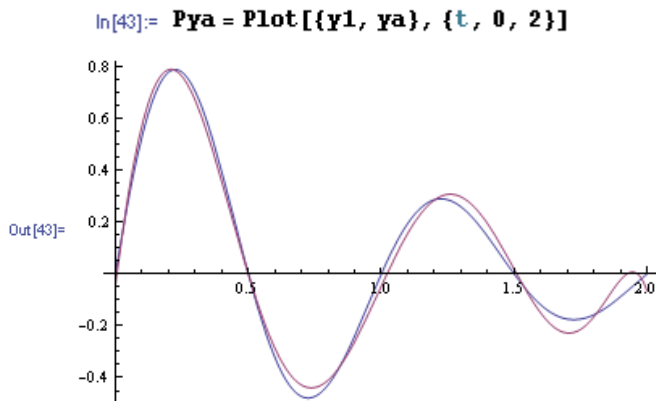


Рис.1.8r. Аппроксимация «y»- параметрической составляющей сигнала

Отображение аппроксимации сигнала в параметрической форме:

```
In[44]:= Pza = ParametricPlot[{xa, ya}, {t, 0, 2}, PlotRange -> All]
```

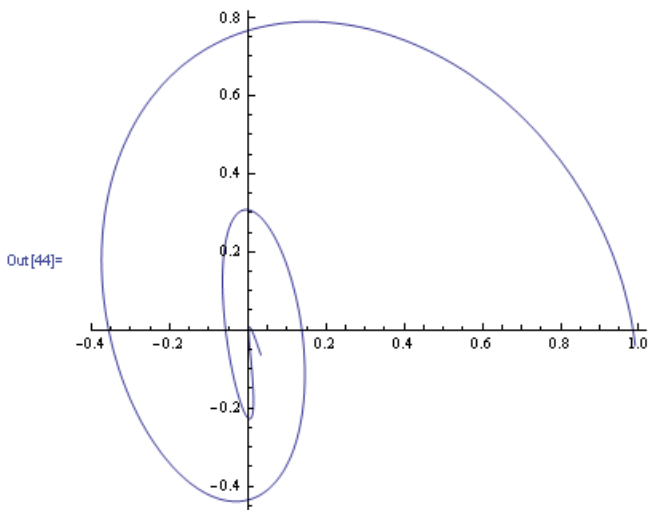


Рис.1.8s. Аппроксимация сигнала в параметрической форме.

Сравнение в параметрической форме заданного сигнала и его аппроксимации, полученной на основе массива отсчетов:

```
In[45]:= Show[{pp, Pza}]
```

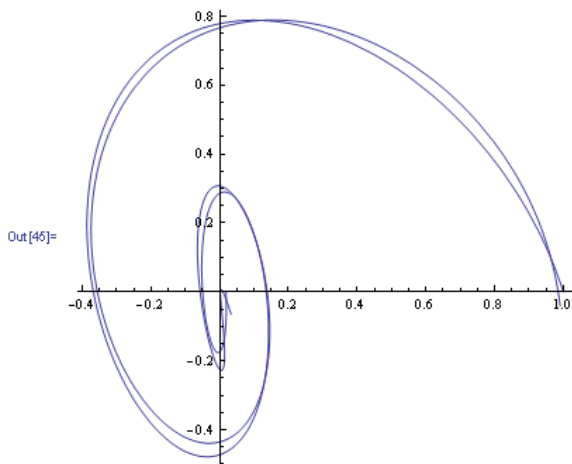


Рис.1.8t. Сравнение аппроксимации сигнала с сигналом в параметрической форме

Сравнение аппроксимации сигнала с массивом отсчетов:

```
In[46]:= Show[{Pza, Pxy}]
```

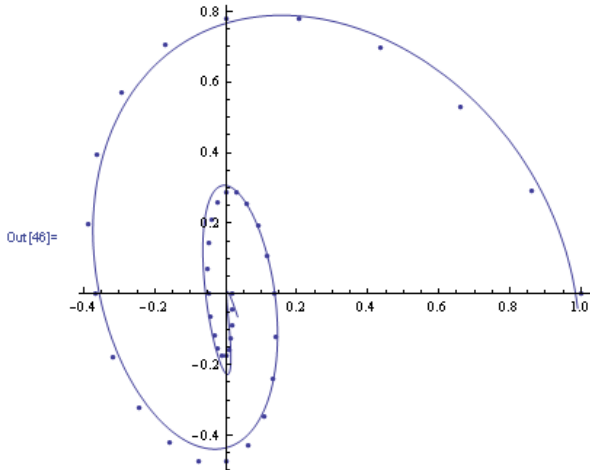


Рис.1.8w. Сравнение аппроксимации сигнала с массивом отсчетов

**Пример 1.9.** Аппроксимировать сигнал  $e^{\frac{(x/90)^2}{2}} - e^{-5\frac{(x/90)^2}{2}}$ , дискретизированный на интервале изменения аргумента  $-90 \leq x \leq 90$ , используя в качестве системы базисных функций систему ортогональных полиномов Лежандра. Аппроксимация непрерывной версии сигнала рассматривалась выше в примере 1.6.

Формирование системы базисных функций на основе четных полиномов Лежандра:

```
In[1]:= SL[x_] := Evaluate[Table[LegendreP[n, x], {n, 0, 12, 2}]];
```

```
In[2]:= s1 = Simplify[SL[x/90]];
```

Задание формы сигнала и массива его дискретных значений (шаг по аргументу выбран равным 9):

```
In[3]:= f = Exp[-0.5 (x/90)^2] - 0.2 Exp[-5 (x/90)^2];
```

```
In[4]:= h = 9;
```

```
In[5]:= fd := Table[{k*h, f /. x -> k*h}, {k, -10, 10}]
```

Формирование цифрового массива отсчета сигнала:

```
In[6]:= fd
```



```
Out[6]= {{-90, 0.605183}, {-81, 0.663492}, {-72, 0.717997},
        {-63, 0.765446}, {-54, 0.80221}, {-45, 0.825196},
        {-36, 0.833251}, {-27, 0.828472}, {-18, 0.816453},
        {-9, 0.804767}, {0, 0.8}, {9, 0.804767},
        {18, 0.816453}, {27, 0.828472}, {36, 0.833251},
        {45, 0.825196}, {54, 0.80221}, {63, 0.765446},
        {72, 0.717997}, {81, 0.663492}, {90, 0.605183}}
```

Отображение на графике отсчетов сигнала:

```
In[7]:= ListPlot[fd, PlotStyle -> PointSize[0.01]]
```

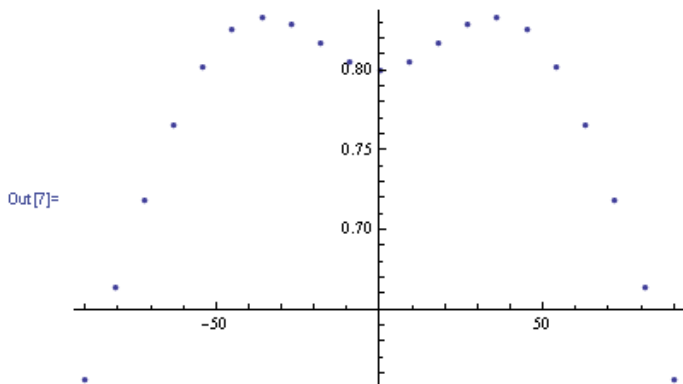


Рис.1.9а. График отсчетов сигнала

Формирование операционной матрицы и операционного вектора аппроксимирующего спектра Лежандра:

```
In[8]:= wd := Table[s1[[i]] /. x -> -90 + (k - 1) * h, {i, 7}, {k, 21}];
```

```
In[9]:= qd := Table[f /. x -> -90 + (k - 1) * h, {k, 21}];
```

Нахождение аппроксимирующего спектра Лежандра для сигнала:

```
In[10]:= Fd = PseudoInverse[Transpose[wd]] . qd
```

```
Out[10]= {0.776492, -0.131301, -0.0681974,
          0.0384969, -0.0128404, 0.00334062, -0.000808219}
```

Формирование аппроксимирующего полинома:

```
In[11]:= fda = Fd.s1;
```

Отображение на графике аппроксимации сигнала:

```
In[12]:= Plot[fda, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]
```

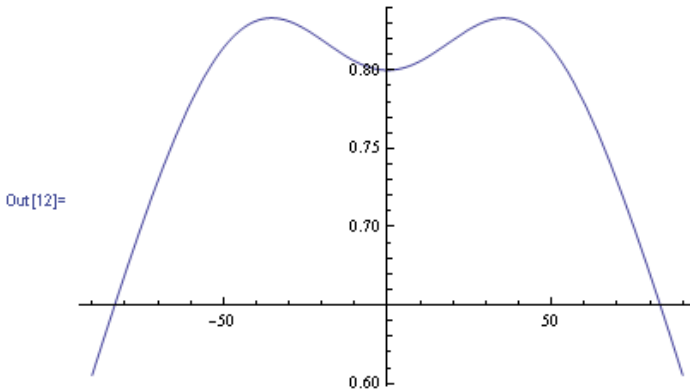


Рис.1.9b. Аппроксимация сигнала

Совмещение на графике массива отсчетов и аппроксимации сигнала:

In[13]:= **Show[Out [7] , Out [12]]**

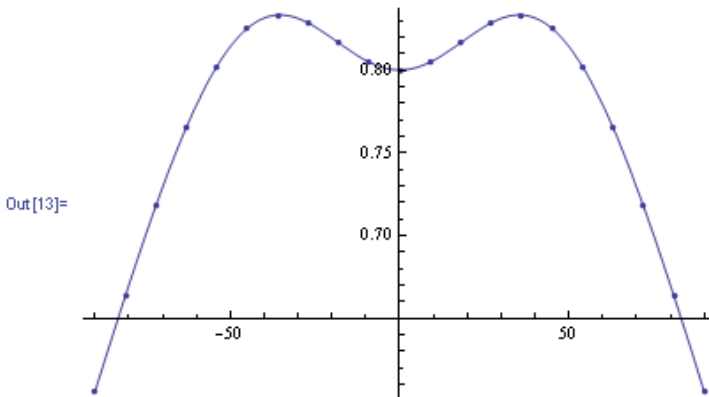


Рис.1.9с. Массив отсчетов и аппроксимация сигнала

Отображение функции ошибки аппроксимации сигнала на основе массива его значений:

In[14]:= **Plot[f - fda, {x, -90, 90}, PlotRange -> All]**

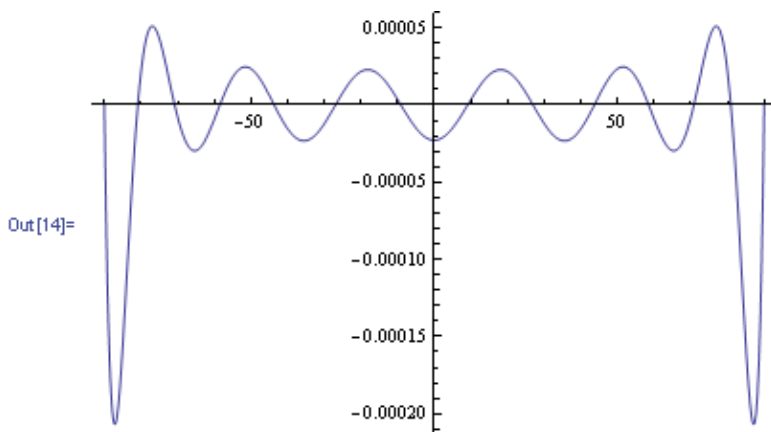


Рис.1.9d. Функция ошибки аппроксимации

## 1.4. Локальные базисные системы

В рассмотренных выше примерах аппроксимации использовались системы базисных функций, которые обладают следующими двумя особенностями:

- функции системы являются непрерывными,
- энергия функций распределена на всем интервале аппроксимации.

Такие системы базисных функций принято называть глобальными. Определение коэффициентов аппроксимирующих полиномов в этих случаях выполняется путем интегрирования сигнала на всем диапазоне изменения аргумента. Это приводит к запаздыванию при аппроксимации на величину, превышающую этот диапазон. Кроме этого, при аппроксимации сигналов на достаточно больших интервалах изменения аргумента (интервалах наблюдения) для обеспечения требуемой точности аппроксимации необходимо значительно увеличивать порядок базисной системы функций. Использование методов аппроксимации с глобальными базисными системами в системах реального времени затруднительно. Избежать таких затруднений можно путем введения локальных аргументов и локальных базисных систем функций. Наибольшее распространение получили локальные импульсные базисные системы функций. Простейшей из таких систем является система блочно-импульсных функций (block-pulse functions) [10].

### 1.4.1. Блочно-импульсная система базисных функций

Эта система основана на использовании импульсных функций, имеющих вид прямоугольных импульсов, сдвинутых друг относительно друга на величину длительности импульса. Диапазон изменения аргумента сигнала (диапазон аппроксимации) разделяется на  $m$  подинтервалов и на полученной сетке вводится система упомянутых импульсных функций. Аналитическое выражение системы блочно-импульсных функций имеет вид:

$$v(t, i, m, h) = \{\sigma(t - (i - 1)h) - \sigma(t - ih)\} \Big|_{i=1}^m, \quad (1.12)$$

где:  $\sigma(x)$  - функция единичного скачка, равная 0 при отрицательных значениях аргумента и 1 в противном случае,  $h = T/m$  - шаг сетки аргумента (длина подинтервала).

В качестве иллюстрации ниже приведена программа генерации системы блочно-импульсных функций в системе Mathematica для случая  $h = T/m$  и  $T = 1, m = 5$  и ее вид.

```
In[1]:= v[t_, m_, h_] := Table[If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0], {i, m}];
```

```
In[2]:= V = v[t, 5, 0.2];
```

```
In[3]:= p1 = Table[Plot[V[[i]], {t, -0.1, 1.1}], {i, 1, 5, 2}]
```

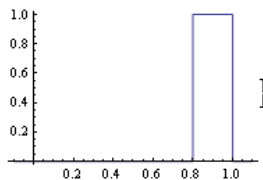
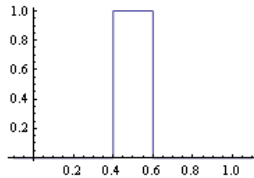
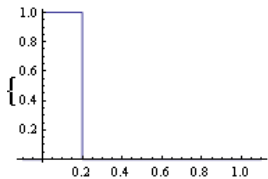


Рис. 1.10а. Блочно-импульсная система базисных функций

Подобные базисные системы являются ортогональными, а энергия каждой базисной функции сосредоточена в ограниченной области изменения аргумента (в пределах шага сетки  $h$ ). Задача нахождения системы коэффициентов аппроксимирующего полинома (блочно-импульсного спектра) упрощается и определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{W}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}, \\ \mathbf{W} &= h\mathbf{E}, \\ \mathbf{W}^{-1} &= \frac{1}{h}\mathbf{E}, \\ q_i &= \int_0^T x(t)v_i(t)dt = \int_{(i-1)h}^{ih} x(t)dt, \\ X_i &= \frac{q_i}{h} = \frac{m}{T} \int_{(i-1)h}^{ih} x(t)dt \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица порядка  $m$ .

Свойства функций базисной системы позволяют заменить интегрирование в пределах всего интервала изменения аргумента  $T$  интегрированием в пределах шага сетки  $h$ . Нахождение блочно-импульсного спектра сигнала осуществляется путем интегрирования сигнала в пределах  $h$ , а аппроксимация сигнала имеет вид кусочно-постоянной функции вида:

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m X_i v_i(t). \quad (1.14)$$

Повышения точности аппроксимации можно достигнуть расширением системы базисных функций, вводя подсистему сдвинутых на величину шага линейных импульсов. Аппроксимирующие спектры в такой расширенной системе получили название аппроксимирующих импульсных спектров[12]. Рассмотрим подробнее такую расширенную систему базисных функций.

#### 1.4.2. Аппроксимирующие импульсные спектры (АИС)

Подсистема кусочно-линейных базисных функций имеет вид:

$$w(t, i, m, h) = \left\{ \left( \frac{2t}{h} - 1 - 2(i-1) \right) v(t, i, m, h) \right\} \Bigg|_{i=1}^m \quad (1.15)$$

Соответствующая (1.15) функция изменяется линейно от -1 до +1 в пределах  $i$ -го шага  $h$  и равна нулю за его пределами. Расши-

ренная подобным образом система базисных функций генерируется следующей программой и имеет вид:

```

In[1]:= v[t_, m_, h_] := Table[If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0],
    {i, m}];
In[2]:= w[t_, m_, h_] :=
    Table[(2 t / h - 1 - 2 (i - 1)) v[t, m, h][[i]], {i, m}];
In[3]:= V = v[t, 5, 0.2];
    W = w[t, 5, 0.2];
In[5]:= p2 = Table[Plot[{V[[i]], W[[i]]}, {t, -0.1, 1.1}],
    {i, 1, 5, 2}]

```

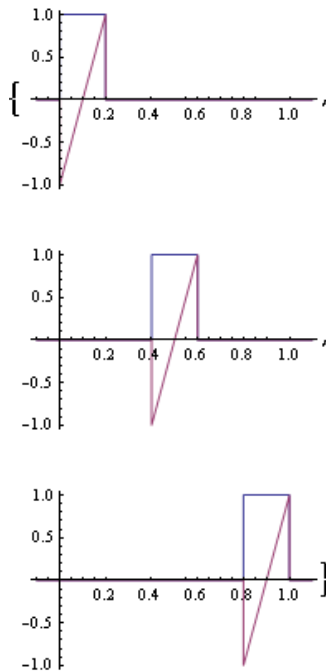


Рис.1.10b. Расширенная система базисных функций.

Аппроксимация сигналов в такой расширенной системе базисных функций является кусочно-линейной и наилучшей в средне-квадратичном смысле. Аппроксимирующий импульсный спектр сигнала в расширенной системе базисных функций является вектором порядка  $2m$ :

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_0 \\ \bar{\mathbf{X}}_1 \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\mathbf{X}}_0$  - вектор порядка  $m$ , определяется в соответствии с выражениями (1.13),  $\bar{\mathbf{X}}_1$  - вектор порядка  $m$ , определяется по аналогичным выражениям (1.16):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_1 &= \mathbf{W}_1^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_1, \\ \mathbf{W}_1 &= \frac{h}{3} \mathbf{E}, \\ \mathbf{W}_1^{-1} &= \frac{3}{h} \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$q_{1i} = \int_0^T x(t) w_i(t) dt = \int_{(i-1)h}^{ih} x(t) w_i dt,$$

$$X_{1i} = \frac{3q_{1i}}{h} = \frac{3m}{T} \int_{(i-1)h}^{ih} x(t) w_i dt$$

Аппроксимация сигнала по расширенной системе базисных функций определяется выражениями:

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m (X_{0i} v_i(t) + X_{1i} w_i(t)) = \bar{\mathbf{X}}_0^T \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) + \bar{\mathbf{X}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{W}}(t) \tag{1.17}$$

Дальнейшее увеличение точности аппроксимации может быть достигнуто путем введения подсистемы импульсных функций, представляющих собой сдвинутые на шаг сетки импульсы параболической формы. Совокупность подсистем импульсов (прямоугольных, линейных и квадратичных), как нетрудно убедиться, является системой первых трех полиномов Лежандра, измененных масштабно и сдвинутых по аргументу таким образом, чтобы сохранить ортогональность на каждом из подинтервалов изменения аргумента длиной  $h$ . С учетом сказанного логично блочно-импульсный спектр сигнала называть локальным спектром Лежандра нулевого порядка, аппроксимирующий импульсный спектр – локальным спектром Лежандра первого порядка, а локальный аппроксимирующий спектр на основе дальнейшего расширения базисной системы функций с применением параболических импульсов – соответственно локальным спектром Лежандра второго порядка.

### 1.4.3. Локальный спектр Лежандра второго порядка

Параболический импульс, формирующий расширение базисной системы функций, имеет вид:

$$u(t, i, m, h) = \left\{ \left( 6 \left( \frac{t}{h} \right)^2 - \frac{6(2i-1)t}{h} + 6i^2 - 6i + 1 \right) v(t, i, m, h) \right\}_{i=1}^m \quad (1.18)$$

Аппроксимирующий спектр сигнала (локальный спектр Лежандра второго порядка) становится вектором порядка  $3m$  вида:

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_0 \\ \bar{\mathbf{X}}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\mathbf{X}}_0, \bar{\mathbf{X}}_1$  определяются по выражениям, приведенным выше, а элементы вектора  $\bar{\mathbf{X}}_2$  вычисляются по формулам:

$$X_{2i} = \frac{5m}{T} \int_{(i-1)h}^{ih} x(t) u_i dt \quad (1.19)$$

Соответственно изменится выражение для аппроксимирующего полинома:

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m (X_{0i} v_i(t) + X_{1i} w_i(t) + X_{2i} u_i(t)) = \bar{\mathbf{X}}_0^T \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) + \bar{\mathbf{X}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{W}}(t) + \bar{\mathbf{X}}_2^T \cdot \bar{\mathbf{U}}(t) \quad (1.20)$$

Генерирующая программа для такой системы функций и графическая иллюстрация имеют вид:

```
ln[1]:= v[t_, m_, h_] := Table[If[(i - 1) * h <= t < i * h, 1, 0],
  {i, m}];
ln[2]:= w[t_, m_, h_] :=
  Table[{2 t / h - 1 - 2 (i - 1)} * v[t, m, h][[i]], {i, m}];
ln[3]:= u[t_, m_, h_] :=
  Table[(6 (t / h)^2 - (6 (2 i - 1) * t) / h + 6 i^2 - 6 i + 1) * v[t, m, h][[i]],
  {i, m}];
ln[4]:= V = v[t, 5, 0.2];
ln[5]:= W = w[t, 5, 0.2];
```



```
In[6]:= U = u[t, 5, 0.2];
```

```
In[7]:= p2 = Table[Plot[{V[[i]], W[[i]], U[[i]]}, {t, -0.1, 1.1}],
  {i, 1, 5, 2}]
```

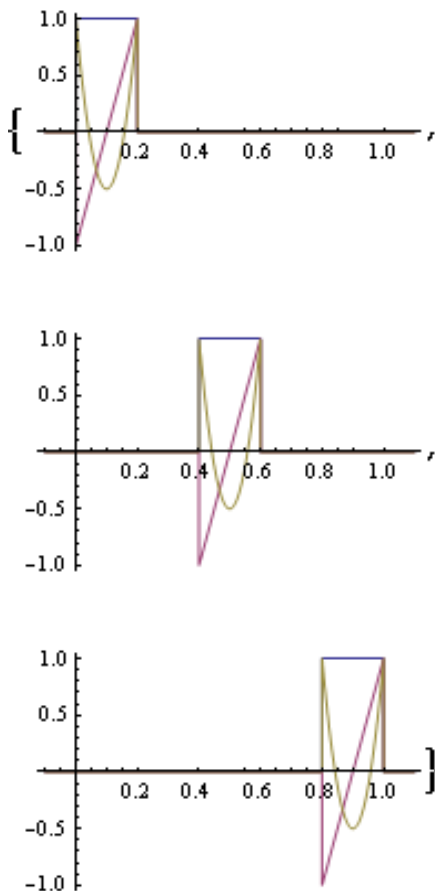


Рис.1.10с. Локальная система базисных функций на основе полиномов Лежандра второго порядка

#### 1.4.4. Интерполяционно-экстраполяционный метод

Аппроксимация сигналов на основе локальных спектров Лежандра нулевого порядка обладает двумя существенными недостатками. Первый заключается в том, что аппроксимация претерпевает

разрывы на границах подинтервалов разбиения аргумента сигнала. Вторым недостатком является относительно низкая точность аппроксимации, обусловленная кусочно-постоянным характером аппроксимирующего полинома. Между тем, использование методов интерполяции и экстраполяции позволяет устранить этот недостаток, сохранив присущие локальным базисным системам преимущества.

Рассмотрим фрагмент сигнала и его блочно-импульсную аппроксимацию (рис.1.11). При достаточно большом числе интервалов разбиения оси абсцисс  $m$  точки пересечения кривой с ее аппроксимацией находятся приблизительно посередине отрезков  $(i-1)h$  и  $ih$ , т.е. имеют абсциссы  $(i-0.5)h$ . Это является следствием метода наименьших квадратов, а именно равенство площадей, ограниченных данной кривой и ее аппроксимацией. Зная элементы блочно-импульсного спектра, можно построить аппроксимацию сигнала на основе линейной интерполяции между серединами подинтервалов разбиения оси аргумента.

Уравнение для определения коэффициентов интерполирующей прямой будет иметь вид:

$$\alpha_i + \beta_i \cdot t = \begin{cases} X(i), & \text{если } t = (i-0.5)h, \\ X(i+1), & \text{если } t = (i+0.5)h. \end{cases}$$

Разрешая это уравнение относительно  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , получим

$$\beta_i = \frac{X(i+1) - X(i)}{h},$$

$$\alpha_i = X(i) \cdot (i+0.5) - X(i+1) \cdot (i-0.5).$$

Используя полученные выражения, можем построить интерполирующую кривую. Но аппроксимация строится на интервале  $\left[0 + \frac{1}{2}h, T - \frac{1}{2}h\right]$ , поэтому на интервалах  $\left[0, \frac{1}{2}h\right]$  и  $\left[T - \frac{1}{2}h, T\right]$  кривая экстраполируется. Тогда полное уравнение аппроксимирующей прямой имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) = & \sum_{i=1}^{m-1} (X(i) \cdot (i+0.5) - X(i+1) \cdot (i-0.5)) + \frac{X(i+1) - X(i)}{h} \cdot t + \\ & + (X(1) \cdot 1.5 - X(2) \cdot 0.5) + \frac{X(2) - X(1)}{h} t \times (\sigma(t) - \sigma(t - \frac{h}{2})) + (X(m-1)(m-0.5) - \\ & - X(m)(m-1.5) + \frac{X(m) - X(m-1)}{h} t) \times (\sigma(t - (m-0.5)h) - \sigma(t - mh)). \end{aligned}$$

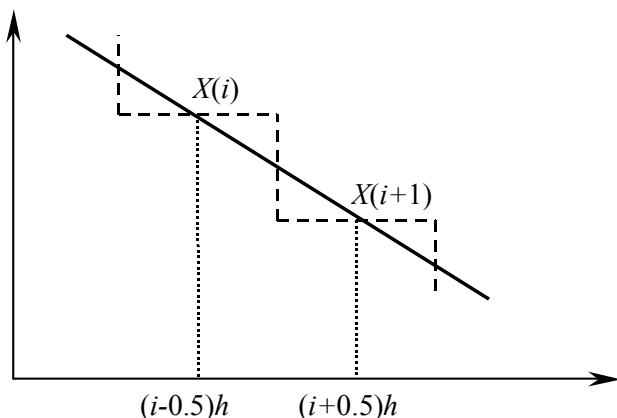


Рис.1.11. Фрагмент сигнала (сплошная линия) и его блочно-импульсная аппроксимация (штриховая линия)

Приведенные выше локальные базисные системы на основе смещенных полиномов Лежандра являются привлекательными для их использования в анализе и моделировании по следующим причинам:

- все подсистемы и система в целом являются ортогональными системами функций, что существенно упрощает решение задачи аппроксимации сигналов,
- определение коэффициентов аппроксимирующих полиномов производится путем интегрирования сигнала, умноженного на соответствующую базисную функцию, причем интегрирование осуществляется только в пределах шага сетки  $h$ ,
- аппроксимации сигналов в зависимости от вида базисной системы являются кусочно-постоянными, кусочно-линейными или кусочно-параболическими функциями,
- при аппроксимации одного и того же сигнала последовательно расширяющимися базисными системами функций (сначала блочно-импульсной, затем на основе смещенных полиномов Лежандра первого и второго порядков) коэффициенты аппроксимирующего полинома, соответствующие блочно-импульсной подсистеме, не изменяют своих значений при расширении базисной системы до смещенных полиномов Лежандра первого порядка, и далее, коэффициенты аппроксимирующего полинома, соответствующие системе базисных функций на основе смещенных полиномов Лежандра, не изменяют своих значений при расширении базисной системы до смещенных полиномов Лежандра второго порядка,

- коэффициенты аппроксимирующих полиномов, соответствующие блочно-импульсным функциям по физическому смыслу являются средними значениями сигналов на соответствующем подинтервале изменения аргумента; коэффициенты, соответствующие второй и третьей подсистемам базисных функций по физическому смыслу являются соответственно средними значениями первой и второй производной сигнала на шаге сетки,
- если сигнал является реализацией какого-либо динамического процесса (обобщенного движения), то коэффициенты аппроксимирующего полинома на шаге сетки пропорциональны средним значениям обобщенных перемещения, скорости и ускорения.

Проиллюстрируем аппроксимацию сигналов на основе локальных импульсных базисных систем (смещенных полиномов Лежандра нулевого, первого и второго порядков) на следующих примерах:

**Пример 1.10.** Аппроксимировать сигнал  $f(t) = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}\right)$  на ин-

тервале изменения аргумента  $0 \leq t < 1$ , используя системы базисных функций на основе смещенных полиномов Лежандра при разбиении интервала изменения аргумента на пять одинаковых подинтервалов ( $m=5$ ).

Фрагмент программы, генерирующей системы базисных функций:

```
ln[1]:= v[t_, m_, h_] := Table[If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0], {i, m}];
```

```
ln[2]:= w[t_, m_, h_] := Table[(2 t / h - 1 - 2 (i - 1)) * v[t, m, h][[i]],  
    {i, m}];
```

```
ln[3]:= u[t_, m_, h_] :=  
    Table[(6 (t / h)^2 - (6 (2 i - 1) * t / h) + 6 i^2 - 6 i + 1) * v[t, m, h][[i]],  
    {i, m}];
```

```
ln[4]:= V = v[t, 5, 0.2];
```

```
ln[5]:= W = w[t, 5, 0.2];
```

```
ln[6]:= U = u[t, 5, 0.2];
```

Подпрограмма, определяющая коэффициенты аппроксимирующих полиномов для различных подсистем базисных функций, и результаты ее работы приведены ниже.

```
ln[7]:= h = 0.2; m = 5;
```

```

In[8]:= f[t_] := Sin[ $\frac{\pi * t}{2}$ ];
In[9]:= sp0 := Table[ $\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt$ , {i, m}];
In[7]:= h = 0.2; m = 5;

In[8]:= f[t_] := Sin[ $\frac{\pi * t}{2}$ ];
In[9]:= sp0 := Table[ $\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt$ , {i, m}];
In[10]:= sp1 := Table[ $\frac{3}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] * (2t/h - 1 - 2(i-1)) dt$ , {i, m}];
In[11]:= sp2 :=
    Table[ $\frac{5}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] * (6(\frac{t}{h})^2 - \frac{6(2i-1)*t}{h} + 6i^2 - 6i + 1) dt$ ,
        {i, m}];
In[12]:= sp0
Out[12]= {0.155792, 0.452126, 0.704203, 0.887347, 0.983632}
In[13]:= sp1
Out[13]= {0.154763, 0.139614, 0.110798, 0.0711369, 0.0245121}
In[14]:= sp2
Out[14]= {-0.00128436, -0.00372735,
    -0.00580548, -0.00731533, -0.0081091}
    Реконструкции сигнала на основе последовательно расширяющихся базисных систем определяются следующими выражениями:
In[15]:= fa0 := Evaluate[sp0.V];
In[16]:= fa1 := Evaluate[sp0.V + sp1.W];
In[17]:= fa2 := Evaluate[sp0.V + sp1.W + sp2.U];
    Графики аппроксимаций сигнала различными системами базисных функций, совмещенные с аппроксимируемым сигналом, имеют вид:
In[18]:= Plot[{f[t], fa0}, {t, 0, 1}]

```

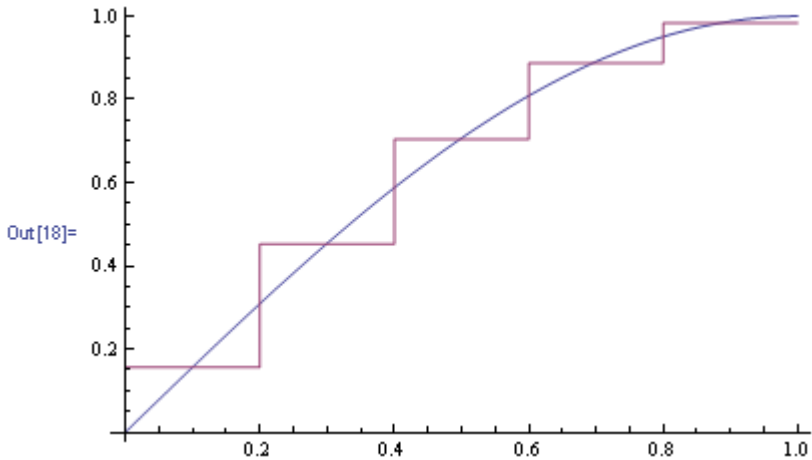


Рис.1.12а. Сигнал и его аппроксимация в локальном базисе Лежандра нулевого порядка

```
In[19]:= Plot[{{f[t], fa1}, {t, 0, 1}}
```

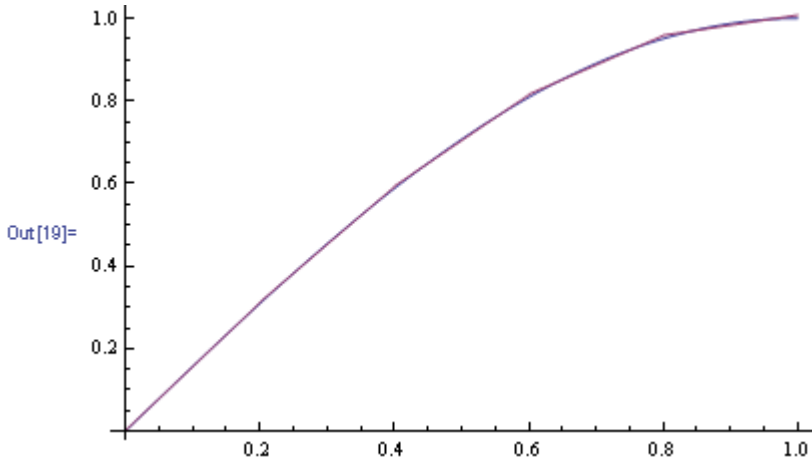


Рис.1.12b. . Сигнал и его аппроксимация в локальном базисе Лежандра первого порядка

```
In[20]:= Plot[{{f[t], fa2}, {t, 0, 1}}
```

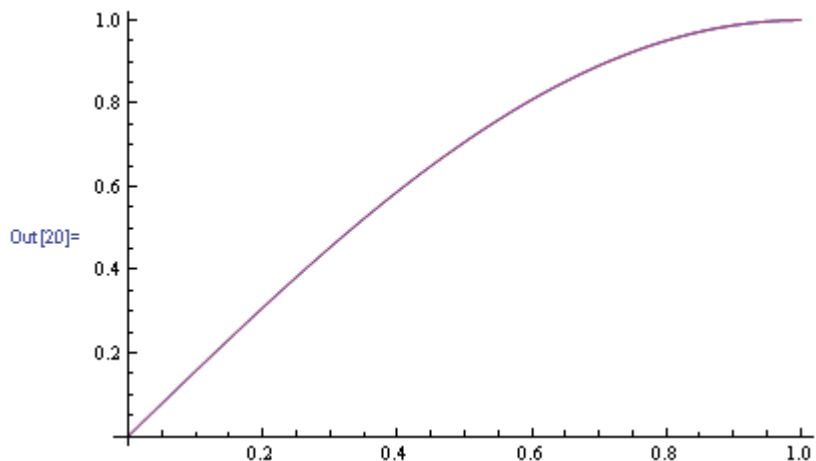


Рис.1.12с. . Сигнал и его аппроксимация в локальном базисе Лежандра второго порядка

Функции ошибок аппроксимации изображены ниже.

In[21]:= **Plot[f[t] - fa0, {t, 0, 1}]**

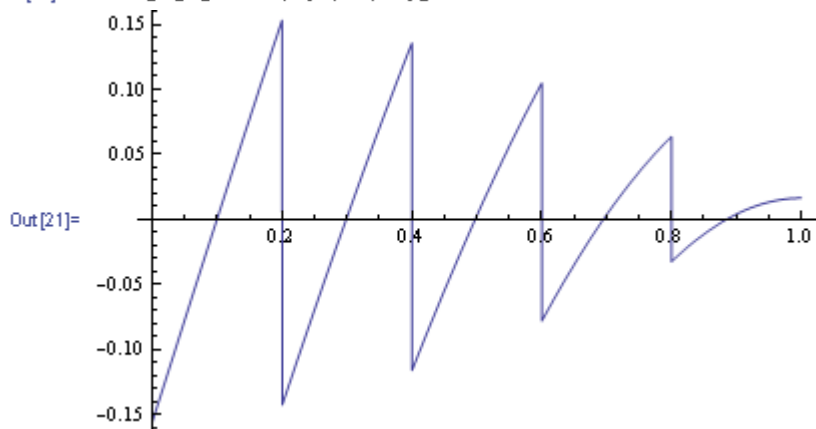


Рис.1.12d. Функция ошибки аппроксимации в локальном базисе Лежандра нулевого порядка

In[22]:= **Plot[f[t] - fa1, {t, 0, 1}]**

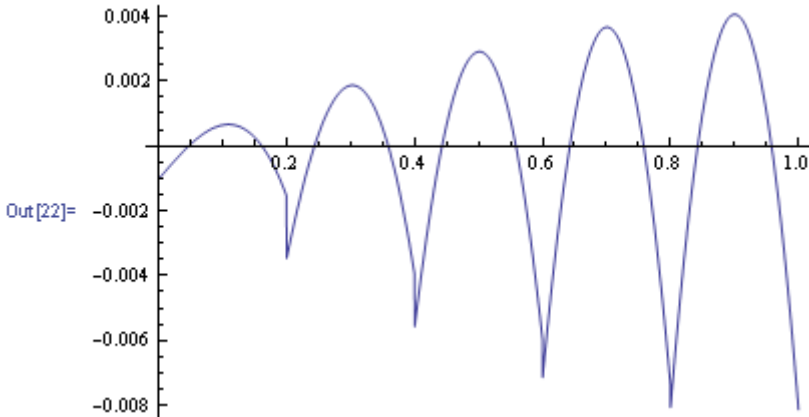


Рис.1.12е. Функция ошибки аппроксимации в локальном базисе Лежандра первого порядка

```
In[23]:= Plot[f[t] - fa2, {t, 0, 1}]
```

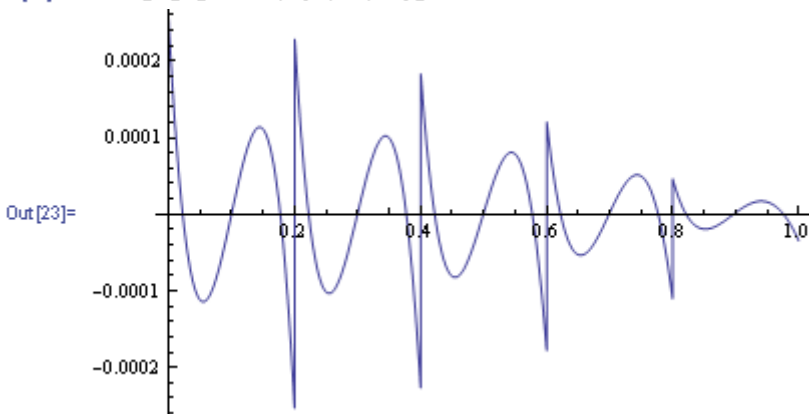


Рис.1.12ф. Функция ошибки аппроксимации в локальном базисе Лежандра второго порядка

**Пример 1.11.** Аппроксимировать сигнал  $f(t) = 5 \cos(\pi t) + 6e^{-15(t-1)^2}$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 2$ , используя локальные базисные системы на основе смещенных полиномов Лежандра нулевого, первого и второго порядков.

Задание базисных систем функций:

```
In[1]:= v[t_, m_, h_] := Table[If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0], {i, m}];
```

```
In[2]:= w[t_, m_, h_] := Table[(2 t/h - 1 - 2 (i - 1)) * v[t, m, h][[i]], {i, m}];
```



```

ln[3]:= u[t_, m_, h_] :=
      Table[ ( 6 (t/h)^2 - (6 (2 i - 1) * t) / h + 6 i^2 - 6 i + 1 ) * v[t, m, h][[i]],
            {i, m}];
ln[4]:= V = v[t, 20, 0.1];
ln[5]:= W = w[t, 20, 0.1];
ln[6]:= U = u[t, 20, 0.1];

```

Задание шага по аргументу, порядка базисной системы функций и сигнала, подлежащего аппроксимации:

```

ln[7]:= h = 0.1; m = 20;
ln[8]:= f[t_] := 5 Cos[π * t] + 6 e-15 (t-1)^2;

```

Определение локального импульсного спектра Лежандра нулевого порядка (блочно-импульсного спектра):

```

ln[9]:= sp0 := Table[ 1/h * ∫(i-1)*hi*h f[t] dt, {i, m}];

```

Определение локального импульсного спектра Лежандра первого порядка (аппроксимирующего импульсного спектра):

```

ln[10]:= sp1 := Table[ 3/h * ∫(i-1)*hi*h f[t] * (2 t/h - 1 - 2 (i - 1)) dt, {i, m}];

```

Определение локального импульсного спектра Лежандра второго порядка:

```

ln[11]:= sp2 :=
      Table[ 5/h * ∫(i-1)*hi*h f[t] * ( 6 (t/h)^2 - (6 (2 i - 1) * t) / h + 6 i^2 - 6 i + 1 ) dt,
            {i, m}];

```

Численное значение спектра нулевого порядка:

```

ln[12]:= sp0
Out[12]= {4.91817, 4.43688, 3.52258, 2.27283, 0.849733,
          -0.472934, -1.27365, -1.1462, -0.172932, 0.794873,
          0.794873, -0.172932, -1.1462, -1.27365, -0.472934,
          0.849733, 2.27283, 3.52258, 4.43688, 4.91817}

```

Численное значение спектра первого порядка:

```

ln[13]:= sp1

```

```
Out[13]= {-0.122547, -0.355512, -0.552373, -0.686962, -0.718431,
          -0.575156, -0.194086, 0.319683, 0.590981, 0.301491,
          -0.301491, -0.590981, -0.319683, 0.194086, 0.575156,
          0.718431, 0.686962, 0.552373, 0.355512, 0.122547}
```

Численное значение спектра второго порядка:

```
In[14]:= sp2
```

```
Out[14]= {-0.0405397, -0.0365102, -0.0284787, -0.0154142, 0.00680277,
          0.0430547, 0.0818118, 0.078951, 0.00146062, -0.0911384,
          -0.0911384, 0.00146062, 0.078951, 0.0818118, 0.0430547,
          0.00680277, -0.0154142, -0.0284787, -0.0365102, -0.0405398}
```

Формирование аппроксимаций сигнала различных порядков:

```
In[15]:= fa0 := Evaluate[sp0.V];
```

```
In[16]:= fa1 := Evaluate[sp0.V + sp1.W];
```

```
In[17]:= fa2 := Evaluate[sp0.V + sp1.W + sp2.U];
```

Аппроксимация сигнала нулевого порядка, совмещенная с сигналом:

```
In[18]:= Plot[{f[t], fa0}, {t, 0, 2}]
```

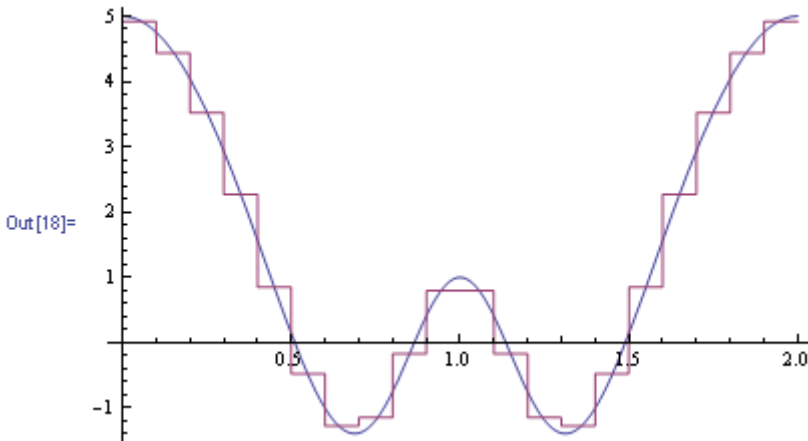


Рис.1.13а. Аппроксимация сигнала нулевого порядка, совмещенная с сигналом

Аппроксимация сигнала первого порядка, совмещенная с сигналом:

```
In[19]:= Plot[{f[t], fa1}, {t, 0, 2}]
```

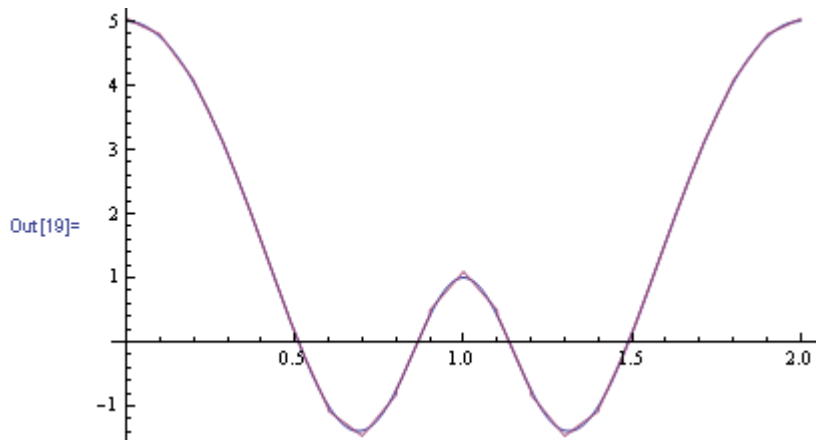


Рис.1.13b. Аппроксимация сигнала первого порядка, совмещенная с сигналом:

Аппроксимация сигнала второго порядка, совмещенная с сигналом:

```
In[20]:= Plot[{f[t], fa2}, {t, 0, 2}]
```

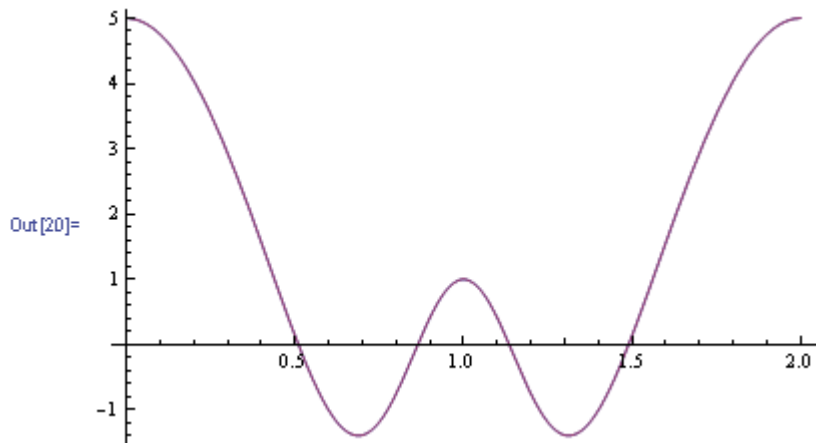


Рис.1.13с. Аппроксимация сигнала второго порядка, совмещенная с сигналом:

Функция ошибки аппроксимации нулевого порядка:

```
In[21]:= Plot[f[t] - fa0, {t, 0, 2}]
```

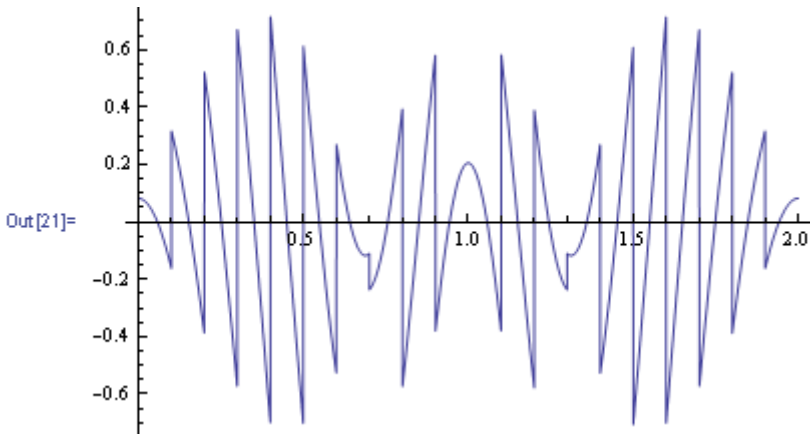


Рис.1.13д. Функция ошибки аппроксимации нулевого порядка

Функция ошибки аппроксимации первого порядка:

In[22]:= `Plot[f[t] - fa1, {t, 0, 2}]`

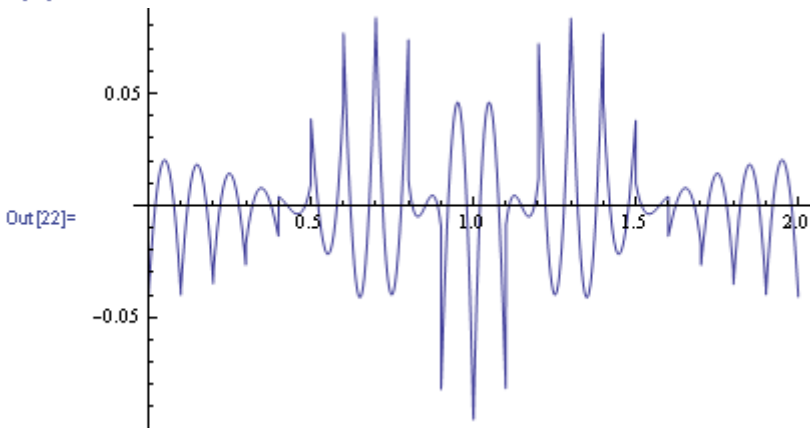


Рис.1.13е. Функция ошибки аппроксимации первого порядка

Функция ошибки аппроксимации второго порядка:

In[23]:= `Plot[f[t] - fa2, {t, 0, 2}]`

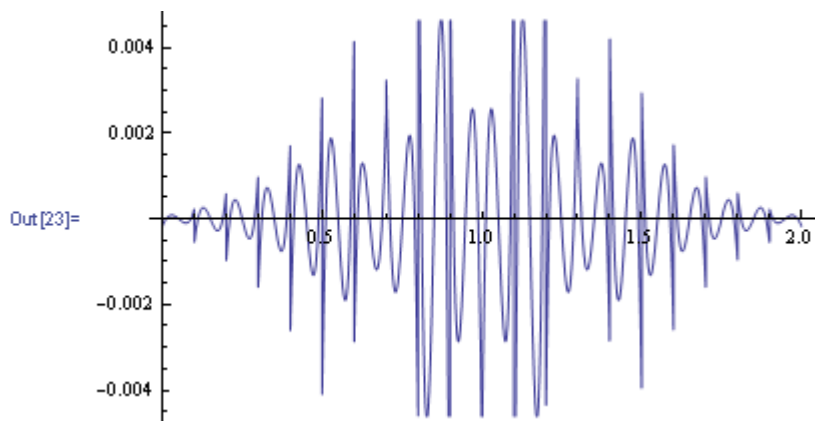


Рис.1.13ф. Функция ошибки аппроксимации второго порядка

## 1.5. Аппроксимация двумерных сигналов в локальных базисных системах сепарабельного типа

Полиномиальная аппроксимация двумерных сигналов связана с использованием базисных систем функций, зависящих от двух аргументов. В качестве таких систем могут использоваться полиномы, определенные в комплексной области, степенные полиномы двух действительных переменных, обобщения на двумерный случай локальных импульсных базисных систем. Ниже рассматривается аппроксимация сигнала  $f(x,y)$  полиномом вида:

$$f_a(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (F_{ij} \cdot v_{ij}(x, y) + F_{xij} \cdot w_{xij}(x, y) + F_{yij} \cdot w_{yij}(x, y)) \quad (1.21)$$

Базисная система функций строится путем обобщения систем на основе смещенных полиномов Лежандра, причем используются сепарабельные версии, получаемые произведением одномерных базисных функций различных переменных [13].

Систему базисных функций независимых переменных  $x$  и  $y$  введем следующим образом. Пусть аргументы  $x$  и  $y$  изменяются в пределах  $0 \leq x < T_x$  и  $0 \leq y < T_y$ . Введем на полученной прямоугольной области сетку, разбивая ее на  $m \times n$  ячеек, причем

$$h_x = \frac{T_x}{m}, h_y = \frac{T_y}{n}. \quad (1.22)$$

Используя введенные выше одномерные версии базисных подсистем функций на основе смещенных полиномов Лежандра нулевого и первого порядков, образуем двумерные базисные подсистемы в соответствии с выражениями:

$$v_{ij}(x, y) = v_i(x) \cdot v_j(y); \quad (1.23)$$

$$w_{xij}(x, y) = w_i(x) \cdot v_j(y); \quad (1.24)$$

$$w_{yij}(x, y) = w_j(y) \cdot v_i(x); \quad (1.25)$$

где

$$v_i(x) = \sigma(x - (i-1)h_x) - \sigma(x - ih_x), \quad (1.26)$$

$$v_j(y) = \sigma(y - (j-1)h_y) - \sigma(y - jh_y), \quad (1.27)$$

$$w_i(x) = \left(\frac{2x}{h_x} - 1 - 2(i-1)\right)v_i(x), \quad (1.28)$$

$$w_j(y) = \left(\frac{2y}{h_y} - 1 - 2(j-1)\right)v_j(y). \quad (1.29)$$

Коэффициенты аппроксимирующего полинома ( $F_{ij}, F_{xij}, F_{yij}$ ) определяются из условия минимума двойного интеграла квадрата функции ошибки, взятого по области изменения аргументов сигнала:

$$J = \int_0^{T_x} \int_0^{T_y} (f(x, y) - f_a(x, y))^2 dy dx \rightarrow \min. \quad (1.30)$$

С учетом ортогональности системы базисных функций эти коэффициенты определяются выражениями:

$$F_{ij} = \frac{1}{h_x h_y} \int_{(i-1)h_x}^{ih_x} \int_{(j-1)h_y}^{jh_y} f(x, y) dy dx, \quad (1.31)$$

$$F_{xij} = \frac{3}{h_x h_y} \int_{(i-1)h_x}^{ih_x} \int_{(j-1)h_y}^{jh_y} f(x, y) \cdot w_i(x) dy dx, \quad (1.32)$$

$$F_{yij} = \frac{3}{h_x h_y} \int_{(i-1)h_x}^{ih_x} \int_{(j-1)h_y}^{jh_y} f(x, y) \cdot w_j(y) dy dx, \quad (1.33)$$

Коэффициенты (1.31)-(1.33) по физическому смыслу соответствуют:  $F_{ij}$  - среднему значению сигнала,  $F_{xij}$  - среднему значению

первой частной производной по  $x$ ,  $F_{yij}$  - среднему значению первой частной производной по  $y$  на элементе сеточной области  $ij$ .

В целом выражение (1.21) является кусочно-плоскостной аппроксимацией сигнала, наилучшей в средне-квадратичном смысле.

Рассмотрим пример формирования локальной базисной системы функций двух переменных.

**Пример 1.12.** Определить локально-импульсную базисную систему функций, определенную на единичном квадрате изменения аргументов ( $T_x = T_y = 1$ ) и на равномерной сетке с шагом

$h_x = h_y = 0.1$ . Программа-генератор такой системы функций и результаты ее работы приведены ниже. На графиках изображены три характерных базисных функции для случая  $i = j = 5$ .

Задание параметров системы функций:

```
In[1]:= m := 10; n := 10; Tx := 1; Ty := 1;
```

Формирование подсистемы двумерной базисной системы функций нулевого порядка:

```
In[2]:= v[x_, i_, m_, T_] := If[(i - 1) * T / m ≤ x < i * T / m, 1, 0];
```

```
In[3]:= vx = v[x, i, m, Tx];
```

```
In[4]:= vy = v[y, j, n, Ty];
```

```
In[5]:= v = vx * vy;
```

```
In[6]:= Vxy = Table[v, {i, m}, {j, n}];
```

Отображение одной из функций сформированной подсистемы на части координатной плоскости:

```
In[7]:= Plot3D[Vxy[[5, 5]], {x, 0.35, 0.55}, {y, 0.35, 0.55},
PlotPoints → 47]
```

Формирование подсистем двумерной базисной системы функций первого порядка:

```
In[8]:= w[x_, i_, m_, T_] := 1 - 2 i +  $\frac{2 m * x}{T}$ ;
```

```
In[9]:= wx = w[x, i, m, Tx] * v;
```

```
In[10]:= wy = w[y, j, n, Ty] * v;
```

```
In[11]:= Wx = Table[wxx, {i, m}, {j, n}];
```

```
In[12]:= Wy = Table[wyy, {i, m}, {j, n}];
```

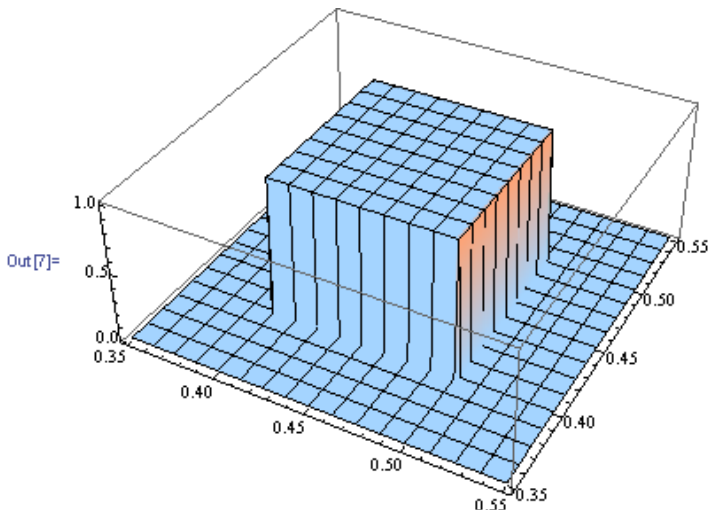


Рис.1.14а. Отображение одной из функций двумерной подсистемы нулевого порядка на части координатной плоскости

Отображение некоторых функций сформированной подсистемы на части координатной плоскости:

```
In[13]:= Plot3D[Wx[[5, 5]], {x, 0.35, 0.55}, {y, 0.35, 0.55}, PlotPoints -> 47]
```

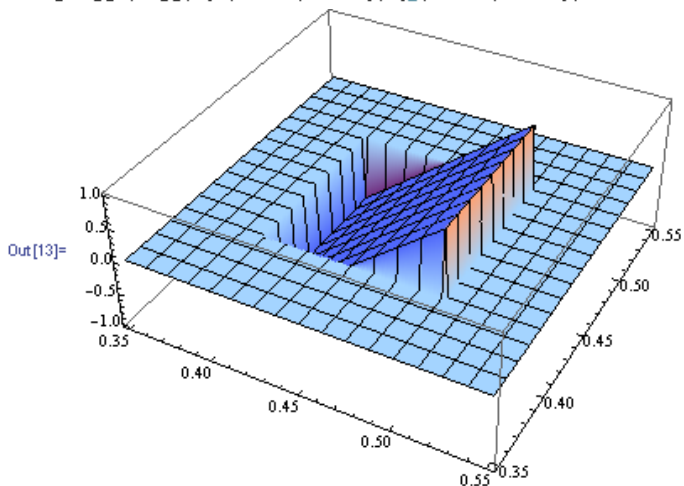


Рис.1.14б. Отображение одной из функций  $Wx$  двумерной подсистемы первого порядка на части координатной плоскости



```
In[14]:= Plot3D[Wy[[5, 5]], {x, 0.35, 0.55}, {y, 0.35, 0.55}, PlotPoints -> 47]
```

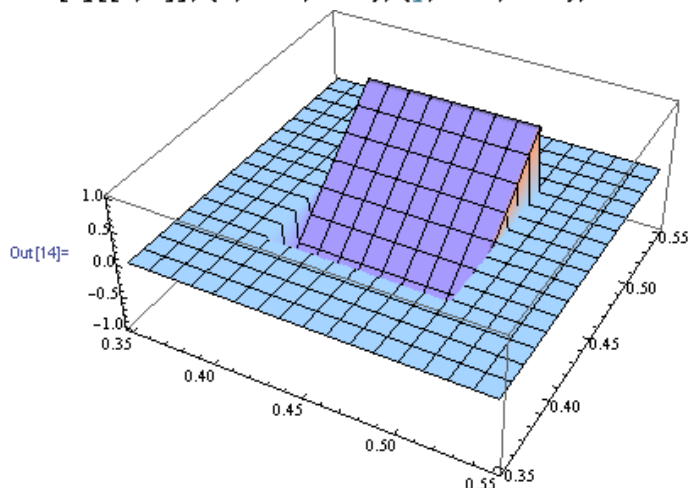


Рис.1.14с. Отображение одной из функций  $Wy$  двумерной подсистемы первого порядка на части координатной плоскости

```
In[15]:= Plot3D[Vxy[[2, 2]] + Wx[[4, 4]] + Wy[[6, 6]], {x, 0.05, 0.65},  
{y, 0.05, 0.65}, PlotPoints -> 97]
```

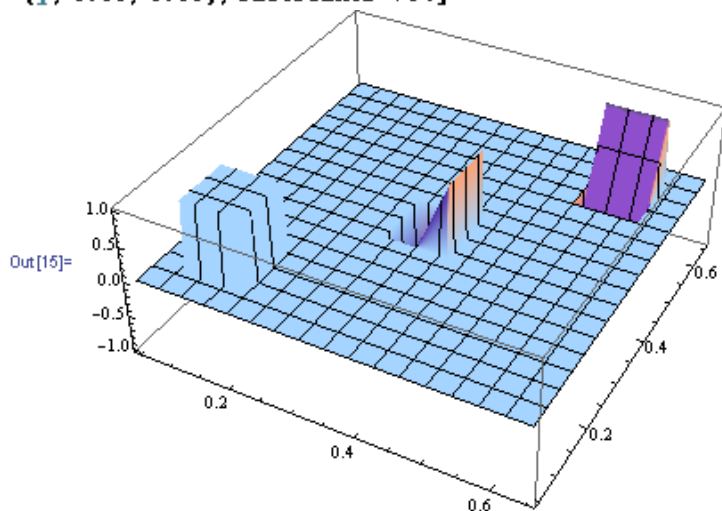


Рис.1.14d. Отображение нескольких функций двумерной системы на части координатной плоскости

Рассмотрим несколько иллюстративных примеров аппроксимации двумерных сигналов.

**Пример 1.13.** Аппроксимировать сигнал

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \text{ определенный в области } \begin{pmatrix} 0 \leq x < 1, \\ 0 \leq y < 1 \end{pmatrix},$$

применив равномерную сетку с шагом  $h_x = h_y = 0.1$ .

Программа аппроксимации сигнала и результаты ее работы приведены ниже.

Определение двумерной базисной системы функций:

```
In[1]:= v[x_, i_, m_, T_] := If[(i - 1) * T / m ≤ x < i * T / m, 1, 0];
```

```
In[2]:= vx = v[x, i, 10, 1];
```

```
In[3]:= vy = v[y, j, 10, 1];
```

```
In[4]:= Vxy = vx * vy;
```

```
In[5]:= vxy1 = Table[Vxy, {i, 10}, {j, 10}];
```

```
In[6]:= w[x_, i_, m_, T_] := 1 - 2 i +  $\frac{2 m * x}{T}$ ;
```

```
In[7]:= wx = w[x, i, 10, 1] * Vxy;
```

```
In[8]:= wy = w[y, j, 10, 1] * Vxy;
```

```
Wx = Table[wk, {i, 10}, {j, 10}];
```

```
In[10]:= Wy = Table[wj, {i, 10}, {j, 10}];
```

Определение сигнала, подлежащего аппроксимации:

```
In[11]:= f[x_, y_] := 1 - x2 - y2;
```

```
In[12]:= f1 = f[x, y];
```

Нахождение аппроксимирующего блочно-импульсного спектра сигнала:

```
In[13]:= Fv[i_, j_] := 100  $\int_{(i-1)/10}^{i/10} \int_{(j-1)/10}^{j/10} f1 \, dy \, dx$ ;
```

```
In[14]:= FV = Table[Fv[i, j], {i, 10}, {j, 10}];
```

Отображение массива спектра сигнала с интерполяцией по 100 элементам спектра (внутренняя функция команды ListPlot3D):

```
In[15]:= ListPlot3D[%]
```

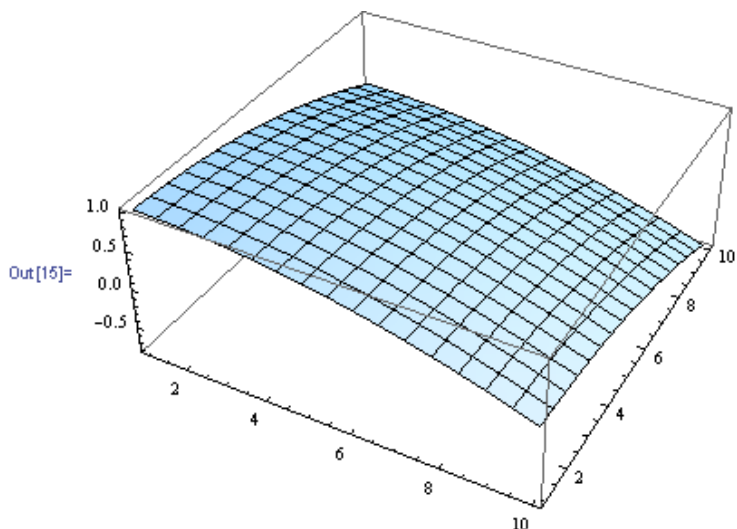


Рис. 1.15а. Аппроксимация сигнала по 100 элементам спектра

Определение аппроксимации сигнала по блочно-импульсному спектру:

$$\text{In}[16]:= \mathbf{fa} = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \mathbf{FV}[[i, j]] + \mathbf{vxy1}[[i, j]];$$

**In[17]:= Plot3D[fa, {x, 0, 0.99}, {y, 0, 0.99}, PlotPoints → 59]**

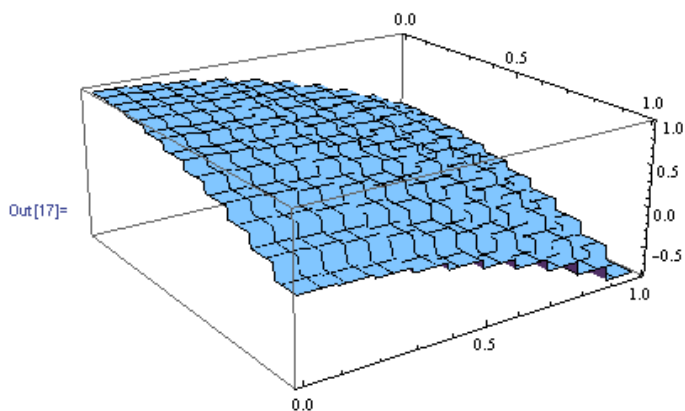


Рис. 1.15б. Блочно-импульсная аппроксимация сигнала

Визуализация функции ошибки аппроксимации:

```
In[18]:= Plot3D[fa - f1, {x, 0, 0.99}, {y, 0, 0.99}, PlotPoints -> 59]
```

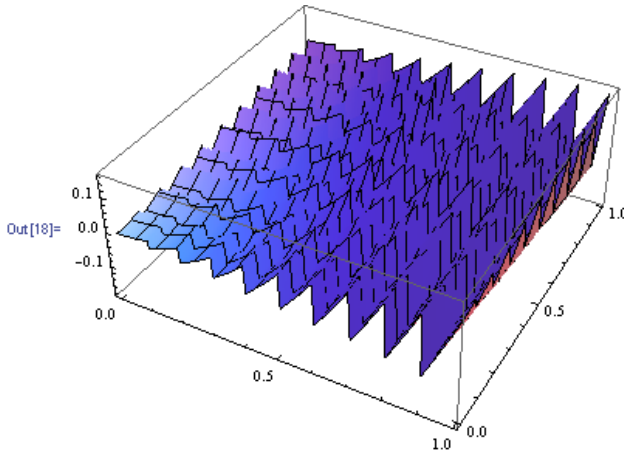


Рис.1.15с. Функция ошибки блочно-импульсной аппроксимации сигнала

Нахождение фрагмента аппроксимирующего импульсного спектра сигнала, соответствующего кусочно-линейным базисным функциям:

```
In[19]:= wx1 = w[x, i, 10, 1];
```

```
In[20]:= wy1 = w[y, j, 10, 1];
```

```
In[21]:= Fwx[i_, j_] := 300 ∫(i-1)/10i/10 ∫(j-1)/10j/10 f1 * wx1 dy dx;
```

```
In[22]:= Fwy[i_, j_] := 300 ∫(i-1)/10i/10 ∫(j-1)/10j/10 f1 * wy1 dy dx;
```

```
In[23]:= Fwx1 = Table[Fwx[i, j], {i, 10}, {j, 10}];
```

```
In[24]:= Fwy1 = Table[Fwy[i, j], {i, 10}, {j, 10}];
```

Определение аппроксимации сигнала по аппроксимирующему импульсному спектру:

```
In[25]:= fa1 = ∑i=110 ∑j=110 (FV[[i, j]] + Fwx1[[i, j]] * Wx[[i, j]] +
```

Fwy1[[i, j]] \* Wy[[i, j]]) \* wx1[[i, j]];

```
In[26]:= Plot3D[fa1, {x, 0, 0.99}, {y, 0, 0.99}, PlotPoints -> 59]
```

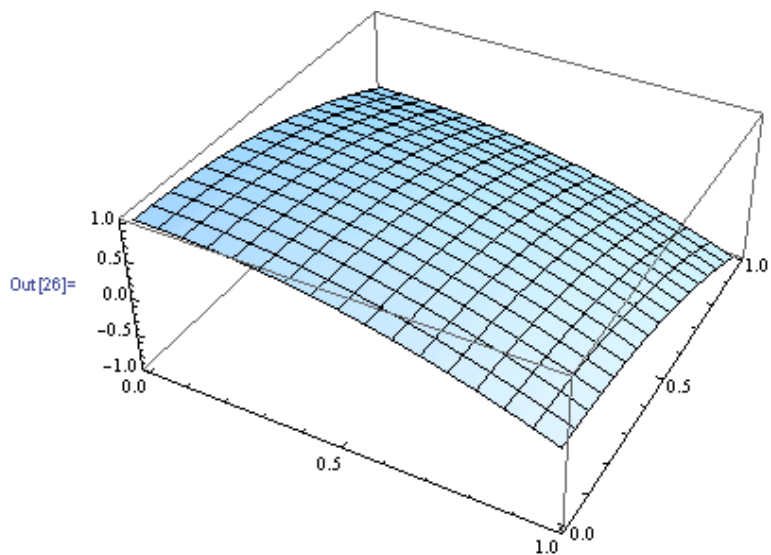


Рис.1.15d. Кусочно-линейная аппроксимация сигнала

Визуализация функции ошибки аппроксимации:

```
In[27]:= Plot3D[f1 - fa1, {x, 0, 0.99}, {y, 0, 0.99}, PlotPoints -> 59]
```

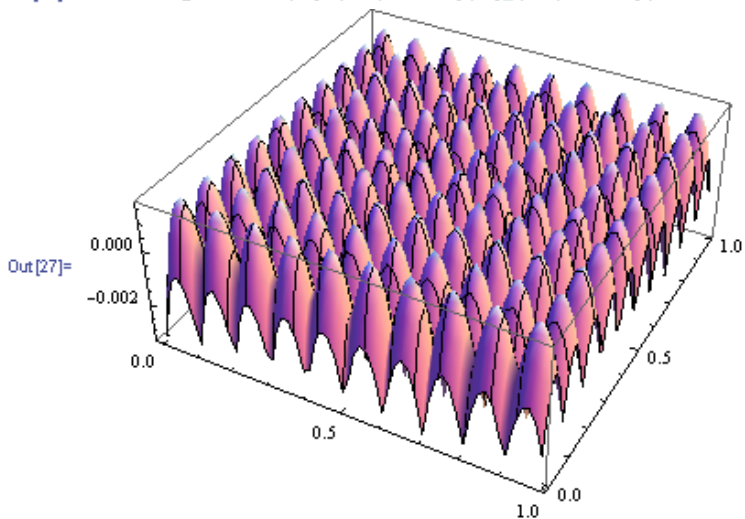


Рис.1.15e. Функция ошибки кусочно-линейной аппроксимации сигнала

Ниже приведены для сопоставления графический образ сигнала (слева) и его кусочно-линейная аппроксимация (справа).

```
In[29]:= Show[GraphicsArray[{Out [28], Out [26]}]]
```

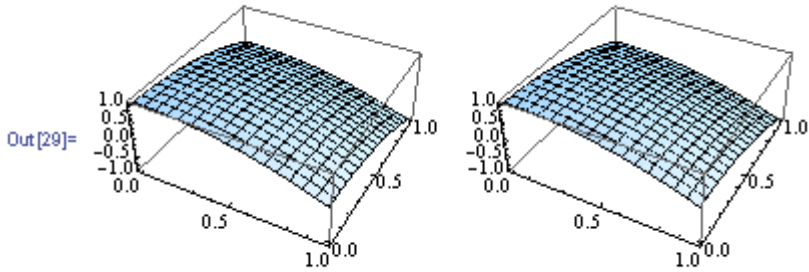


Рис. 1.15f. Сопоставление сигнала и его аппроксимации

### Список литературы к Главе 1

1. *Андре Анго* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: «Наука», 1965. – 780 с.
2. *Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н.* MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
3. *Васильев А.Н.* Maple 8. Самоучитель. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 352 с.
4. *Васильев В.В., Грездов Г.И., Симак Л.А.* и др. Моделирование динамических систем: Аспекты мониторинга и обработки сигналов. – К.: НАН Украины, 2002.– ISBN 966-02-0966-5. – 344 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: «Наука», 1966. – 576 с.
6. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций.– М.: ГИТТЛ, 1954. – 328 с.
7. *Кирьянов Д.В.* Самоучитель Mathcad 11. – СПб.:БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: «Наука», 1977. – 832 с.
9. *Пухов Г.Е.* Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. – К.: «Наукова Думка», 1967. – 568 с.
10. *Симак Л.А.* Аппроксимирующие полиномиальные спектры непрерывных сигналов и их применение // Препринт № 112. – К.: Институт проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1987.– 45 с.
11. *Симак Л.А.* Метод определения аппроксимирующего спектра функций, заданных реальными сигналами // Электронное моделирование. – 1984, Т.6, № 4. – С. 89 -96.
12. *Симак Л.А.* Аппроксимирующие импульсные спектры в приложении к дробно-дифференциальному анализу // Препринт № 8-89. – К.: Институт проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1989. – 53 с.
13. *Симак Л.А.* Аппроксимирующие импульсные спектры нескольких переменных и их применение к моделированию дифференциальных уравнений в частных производных, включающих дифференциальные операторы нецелых порядков // Препринт № 18-89. – К.: Институт проблем моделирования в энергетике АН УССР, 1989. – 56 с.
14. *Шмидский Я.К.* Mathematica 5: Самоучитель. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004ю – 592 с.
15. *Stephen Wolfram* The Mathematica Book. – Wolfram Media & Cambridge University Press, 1999. -1470 p.
16. *Taan S. ElAli, Mohammad A. Karim* Continuous Signals and Systems with MATLAB. – CRC Press, 2001. – 532 с.

## **Глава 2. ОПЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НА БАЗЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ**

Операционные методы анализа занимают важное место в общей теории систем, обработке сигналов, моделировании и автоматическом управлении. Особо необходимо подчеркнуть широкое использование операционных методов в исследовании, проектировании динамических систем, разработке систем автоматического управления. Популярность операционных методов легко объяснить, поскольку их использование позволяет исследовать динамические системы, которые описываются интегро-дифференциальными уравнениями, как алгебраические объекты.

Традиционно операционными методами анализа считаются преобразование Лапласа (операционное исчисление) и Фурье (спектральный анализ) [5--7]. В математическом анализе с операционными методами связывают интегральные преобразования [6, 11]. Преобразование Лапласа получило широкое распространение при исследовании неперiodических переходных процессов в электротехнике, механике и других областях, связанных с решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Преобразование Фурье используется преимущественно для исследования периодических процессов. Глубокая внутренняя связь этих преобразований привела к развитию спектральных и частотных методов анализа, особенно в автоматическом управлении, что придало этим преобразованиям классический характер.

### **2.1. Общая характеристика операционных методов**

В основе любого операционного метода лежит так называемая пара операционных преобразований (прямое и обратное операционное преобразование). Вводится в рассмотрение пространство исходных сигналов (пространство оригиналов) и преобразованное пространство (операционное пространство или пространство изображений).

Прямое операционное преобразование ставит в соответствие каждому сигналу-оригиналу его операционный образ – изображение. Правила, определяющие какие математические операции необходимо выполнить над изображениями, когда над соответствующими



оригиналами выполняются те или иные операции, составляют основу так называемой операционной алгебры.

Одними из важнейших правил являются операционные аналогии операций дифференцирования и интегрирования в пространстве оригиналов. Для любого операционного метода такими аналогами в пространстве изображений являются алгебраические операции. Для разных операционных методов они имеют различный вид. Интегро-дифференциальная математическая модель исследуемой системы или процесса в пространстве оригиналов преобразуется в алгебраическую в пространстве изображений путем применения к сигналам и операций над ними правил операционной алгебры. При этом известным сигналам оригиналам сопоставляются известные (полученные) изображения, тогда как для неизвестных сигналов вводятся соответствующие неизвестные изображения. Решение алгебраической модели приводит к нахождению изображений неизвестных сигналов. Обратное операционное преобразование позволяет выполнить реконструкцию (восстановление) неизвестных сигналов на основе полученных изображений.

Важными особенностями любого операционного метода (исчисления), которые определяют его преимущества и недостатки являются:

- численный или аналитический характер,
- простота нахождения изображения и реконструкции сигнала,
- чувствительность к шумам и внешним воздействиям при аппаратной реализации и к погрешностям применяемых численных методов при программной реализации,
- возможность применения в случае нелинейных систем.

## **2.2. Преобразование Лапласа**

Преобразование Лапласа является одним из наиболее распространенных операционных методов, который позволяет анализировать линейные динамические системы в переходном режиме. В рамках этого преобразования рассматриваются два пространства: пространство оригиналов (сигнальное пространство) и пространство изображений сигналов (изображение по Лапласу). Математической моделью переходного процесса динамической системы в первом пространстве являются интегро-дифференциальные уравнения. Во втором (преобразованном) пространстве математической моделью переходного процесса являются алгебраические уравнения. Теория электрических цепей уже давно использует преобразование Лапласа [1].

### 2.2.1. Определение

Любой ограниченный однозначный сигнал  $f(t)$  (функция времени или другой независимой переменной) может быть преобразован в изображение по Лапласу с помощью следующего выражения:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (2.1)$$

где:  $p = s + j\omega$  – так называемая комплексная частота,  $F(p)$  – изображение по Лапласу сигнала  $f(t)$ . Иногда используется следующее преобразование:

$$\tilde{F}(p) = p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (2.2)$$

Это так называемое преобразование Хевисайда. Оба приведенные определения имеют различные преимущества и недостатки. Так, преобразование Хевисайда постоянного сигнала также является постоянной величиной, это естественно и удобно для приложений. С другой стороны, преобразование Лапласа хорошо подходит для оценивания частотного спектра сигнала.

Выражение (2.2.) является прямым преобразованием Лапласа. Исходный сигнал может быть восстановлен с помощью обратного преобразования Лапласа, которое имеет следующий вид:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s-j\infty}^{s+j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dt. \quad (2.3)$$

Необходимо отметить, что вместо оператора  $p$  в зарубежных публикациях часто используется символ  $s$ .

Преобразование Лапласа определяется альтернативно в виде  $L[f(t)]$ . В этом случае операция нахождения соответствующего сигнала  $f(t)$  (Обратное преобразование Лапласа) обозначается как  $L^{-1}[F(p)]$ :

$$f(t) = L^{-1}[F(p)]. \quad (2.4)$$

Далее мы будем использовать символ  $\Leftrightarrow$  для обозначения соответствия между сигналом (оригинал) и его изображением по Лапласу.

### 2.2.2. Свойства

**Одним из важнейших свойств преобразования Лапласа является линейность этого преобразования.**

Пусть  $f_r(t) \Leftrightarrow F_r(p)$ ,  $r:=1, \dots, m$ . Тогда для

$y(t) = \sum_{r=1}^m a_r \cdot f_r(t)$  имеет место следующее выражение:

$$Y(p) = \sum_{r=1}^m a_r \cdot F_r(p), \quad (2.5)$$

где:  $y(t) \Leftrightarrow Y(p)$ , и  $a_r$  - постоянные коэффициенты.

Упомянутое свойство линейности означает, что преобразование Лапласа конечной линейной комбинации функций  $f_r(t)$  является такой же комбинацией изображений по Лапласу в пространстве изображений.

#### **Преобразования Лапласа дифференциальных операторов**

Пусть  $F(p) \Leftrightarrow f(t)$  и  $f(t)$  и ее производные до  $(n-1)$ -го порядка существуют и непрерывны справа от  $t=0$  ( $0_+$ ). Предположим также, что начальные значения функции  $f(t)$  и ее производных известны:

$$f^k(0_+) = f_0^k, k := 0, \dots, n-1. \quad (2.6)$$

Тогда:

$$f^k(t) \Leftrightarrow p^k [F(p) - \sum_{i=1}^k f^{i-1}(0_+) / p^i]. \quad (2.7)$$

Если все начальные значения равны нулю:  $f_i(0_+) \equiv 0, (i, \dots, n-1)$ , то

$$f^k(t) \Leftrightarrow p^k F(p). \quad (2.8)$$

#### **Преобразования Лапласа интегральных операторов**

Следующие две интегральные операции над сигналом  $f(t)$ :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

имеют следующие операционные изображения:

$$\begin{aligned} F(p)/p, \\ F(0) + F(p)/p \end{aligned} \quad (2.10)$$

соответственно. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow F(p)/p, \\ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow F(0) + f(p)/p \end{aligned} \quad (2.11)$$

### **Масштабное преобразование аргумента $t$**

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot F(p/a) \quad (2.12)$$

### **Сдвиг по аргументу $t$**

$$f(t - \tau) \Leftrightarrow F(p) \cdot e^{-p\tau} \quad (2.13)$$

### **Сдвиг по аргументу $p$**

$$F(p - p_0) \Leftrightarrow f(t) \cdot e^{p_0 t} \quad (2.14)$$

### **Свертка двух сигналов**

$$f(t) = x(t) * y(t) \Leftrightarrow F(p) = X(p) \cdot Y(p). \quad (2.15)$$

Теперь необходимо ввести функцию единичного скачка, которая играет важную роль в математике и технических науках. Функция единичного скачка определяется следующим образом:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Произведение сигнала  $f(t)$  и функции единичного скачка  $\sigma(t)$  весьма эффективно для описания переходного процесса.

Другой важной функцией является Дельта - функция (Дирака)  $\delta(t)$ . Эта функция является обобщенной и имеет следующее фундаментальное свойство и определение:

$$\delta(t) = 0, \text{ if } t \neq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.17)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - a) dt = f(a). \quad (2.18)$$

### 2.2.3. Примеры преобразований Лапласа некоторых функций

Таблица 2.1

№	Сигнал $f(t)$	Преобразование Лапласа $F(p)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\sigma(t)$	$1/p$
3	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{p+a}$
4	$e^{-at} \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{p+a}$
5	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
6	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$
9	$t^\alpha, \text{Re}(\alpha) > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
10	$t^\alpha \cdot e^{\lambda t}, \text{Re}(\alpha) > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
11	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
12	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
13	$ch(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$

Восстановление исходного сигнала может быть осуществлено с помощью обратного преобразования Лапласа (2.3), или с помощью так называемой формулы разложения Хевисайда. Последний случай имеет место, когда изображение по Лапласу представляется в виде отношения двух полиномов от  $p$ :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{r=1}^n \frac{N(p_r)}{D'(p_r)} e^{p_r t}. \quad (2.19)$$

В (2.19)  $D'(p_r)$  является значением производной  $\left. \frac{\partial D(p)}{\partial p} \right|_{p \rightarrow p_r}$ . Это выражение должно использоваться, если  $m < n$  и

корни полинома  $D(p)$ , а именно,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , все различны, и только один из них может быть равным нулю. В последнем случае знаменатель содержит множитель  $p$ , то-есть  $p \cdot D(p)$ , а  $D(p)$  больше не содержит сомножителя  $p$ . В этом случае используется другая форма выражения (2.19):

$$F(p) = \frac{N(p)}{p \cdot D(p)} \Leftrightarrow f(t) = \frac{N(0)}{D(0)} + \sum_{r=1}^n \frac{N(p_r)}{p_r D'(p_r)} e^{p_r t}. \quad (2.20)$$

Более подробную информацию можно получить в работах [1, 5-7].

### 2.3. Фазоры, ряды и преобразование Фурье

Синусоидальные функции весьма широко используются в теоретической электротехнике, радиоэлектронике, механике. Теория *фазоров* занимается представлением синусоидальных функций времени вращающимися векторами на комплексной плоскости. На основе теории фазоров развит комплексный метод [7,8], который применяется при анализе линейных электрических и магнитных цепей переменного тока в установившемся режиме при синусоидальных источниках энергии одной частоты. *Ряды Фурье* используются для представления периодических несинусоидальных сигналов конечными или бесконечными рядами (линейными комбинациями) тригонометрических функций (синусов и косинусов) кратных частот. Обобщение рядов Фурье на случай непериодических сигналов при уменьшении шага по частоте и предельном переходе ( $T \rightarrow \infty, \Delta\omega \rightarrow d\omega$ ) приводит к *интегралу Фурье*. Рассмотрим последовательно эти три раздела, общим для которых является ис-

пользование тригонометрического базиса для представления сигналов и формирования соответствующих операционных исчислений.

### 2.3.1. Комплексный метод

Комплексный метод основан на представлении синусоидальных функций времени вращающимися векторами на комплексной плоскости. Такие вектора обычно называют *фазорами*. Так как в линейных электрических цепях переменного тока с синусоидальными источниками напряжения и тока одной и той же частоты в установившемся режиме все токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени той же частоты, то при использовании комплексного метода все токи и напряжения изображаются соответствующими векторами, которые вращаются с одинаковой угловой скоростью и только сдвинуты относительно друг друга на некоторые фазовые углы. Это позволяет изображать векторные и топографические диаграммы неподвижными, предполагая, что вращается координатная система в противоположном направлении. Мгновенные значения токов и напряжений могут быть в этом случае определены путем проектирования векторов, изображающих эти напряжения и токи, на одну из координатных осей.

Прежде всего напомним некоторые сведения из алгебры комплексных чисел и их геометрической интерпретации. Любая точка  $A$  на комплексной плоскости, имеющая координаты  $x_A, y_A$ , может быть представлена вектором из начала координат в точку  $A$ , длина которого равна  $|R_A|$  и который составляет с осью действительных чисел угол  $\varphi_A$ . Связь между этими величинами, которые определяют две формы представления комплексного числа, определяется формулами:

$$R = \sqrt{x_A^2 + y_A^2},$$

$$\varphi_A = \arctg\left(\frac{y_A}{x_A}\right).$$
(2.21)

$$x_A = R \cdot \cos(\varphi_A),$$

$$y_A = R \cdot \sin(\varphi_A).$$
(2.22)

Этим двум выражениям соответствуют две формы представления комплексного числа, геометрической интерпретацией которого на комплексной плоскости являются точка  $A$  и вектор  $Z_A$ :

**экспоненциальная или полярная форма:**

$$Z_A = R \cdot \exp(j\varphi_A) = R \angle \varphi_A,$$
(2.23)

**тригонометрическая или алгебраическая форма:**

$$Z_A = R(\cos(\varphi_A) + j \cdot \sin(\varphi_A)) = x_A + j \cdot y_A, \quad (2.24)$$

Необходимо отметить, что  $\exp(j\varphi)$  представляет собой вектор единичной длины, составляющий с осью действительных чисел угол  $\varphi$ , в то время как  $\exp(j\pi/2) = j$  и оператор  $j$  соответствует повороту вектора на угол  $\pi/2$ , а  $j^2 = -1$ .

Обратимся теперь к определению фазора. Пусть некоторый сигнал является синусоидальной функцией времени с амплитудой  $U$ , частотой  $\omega$  и начальным фазовым углом  $\varphi$ :

$$u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi). \quad (2.25)$$

Фазором  $\dot{U}$  называется вектор, вращающийся против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  длиной  $U$ , который при  $t=0$  находится под углом  $\varphi$  к оси действительных чисел (Рис. 2.1).

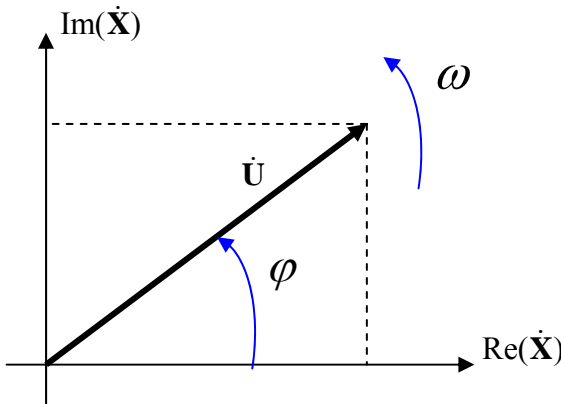


Рис. 2.1. Фазор на комплексной плоскости

Таким образом, фазор характеризуется тремя параметрами: амплитудой, угловой скоростью (частотой) и начальным углом (начальной фазой). Проекция фазора на мнимую ось определяет мгновенное значение сигнала (2.25) как функцию времени.

Различным математическим операциям над сигналами соответствуют другие (эквивалентные) операции над фазорами, изображающими эти сигналы. Так, операции сложения нескольких синусоидальных сигналов соответствует операция геометрического сложения фазоров, как векторов. Эту операцию над фазорами удобнее производить, когда они заданы в алгебраической форме. Операции интегрирования синусоидального сигнала соответствует



операция деления фазора на вектор  $j \cdot \omega$ . Эту операцию над фазором удобно выполнять, если он задан в полярной форме. При этом длина фазора уменьшается в  $\omega$  раз, и он поворачивается на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Операции дифференцирования синусоидального сигнала соответствует операция умножения фазора на вектор  $j \cdot \omega$ . В отличие от интегрирования при дифференцировании длина фазора увеличивается в  $\omega$  раз, и он поворачивается на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки.

### 2.3.2 Ряды Фурье

Ряды Фурье применяются для представления периодических несинусоидальных сигналов и при анализе систем с такими сигналами. Отличительной особенностью такого представления сигналов является то, что используются синусоидальные функции кратных частот с наименьшей частотой, соответствующей периоду рассматриваемых сигналов:  $\omega = 2\pi / T$ . Существует две формы представления сигнала рядом Фурье: в обычной и комплексной формах.

#### Обычная форма ряда Фурье

Периодическая функция или сигнал с периодом  $T$  представляется тригонометрическим рядом Фурье вида:

$$f(t) = f(t + T) = A_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (B_k \cdot \sin(k\omega t) + C_k \cdot \cos(k\omega t)), \quad (2.26)$$

в котором коэффициенты следующим образом зависят от сигнала:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt, \\ C_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt. \end{aligned} \quad (2.27)$$

#### Комплексная форма ряда Фурье

Используя связи между тригонометрическими и экспоненциальными функциями, можно ряд Фурье представить следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot \exp(jk\omega t), \quad (2.28)$$

$$D_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot \exp(jk\omega t) dt.$$

В инженерных приложениях вместо бесконечно большого числа членов ряда используют отрезки ряда, ограничиваясь конечными значениями  $k$ . Появляющиеся при такой приближенной аппроксимации погрешности должны оцениваться в каждом конкретном случае. Если сигнал не является строго периодическим и только предполагается, что за пределами  $[0, T]$  он повторяется, то ряд Фурье на границах интервала сходится к среднему арифметическому значений сигнала на границах интервала:

$$f_a(0) = f_a(T) = \frac{f(0) + f(T)}{2}. \quad (2.29)$$

### 2.3.3. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье применяется к непериодическим функциям и сигналам, которые удовлетворяют ограничениям:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = 0, \quad (2.30)$$

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-s_0 t) dt = M < \infty.$$

Формально преобразование Фурье может быть получено из ряда Фурье предельным переходом при  $T \rightarrow \infty$ .

Прямое и обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt, \quad (2.31)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot \exp(j\omega t) d\omega$$

Первое из выражений (2.31) сопоставляет сигналу  $f(t)$  во временной области его изображение  $F(j\omega)$  в частотной области. Второе восстанавливает сигнал по его частотному спектру  $F(j\omega)$ .

Оба преобразование можно объединить и получить уравнение, которое называют двойным интегралом Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(t) \cdot \exp(-j\omega t) dt \right) \cdot \exp(j\omega t) d\omega. \quad (2.32)$$

Необходимо указать на тесную связь преобразований Лапласа и Фурье. Если одно из преобразований получено, переход к другому может быть выполнен взаимной заменой операторов  $p$  и  $j\omega$ .

Более подробно изложение вопросов, связанных с применением операционных исчислений классического типа можно найти в работах [6 - 8, 10].

## 2.4. Дифференциальные преобразования Пухова

В основе операционного метода дифференциальных преобразований Пухова [9] лежит представление сигналов степенными рядами Тейлора или Маклорена. Прямое и обратное преобразования Пухова имеют вид:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^k} \right]_{t=t_i}, \quad (2.33)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_i)^k}{H^k} X(k),$$

где первое из выражений (2.33) сопоставляет сигналу  $x(t)$  его операционное изображение –  $X(k)$ , которое является функцией дискретного целочисленного индекса  $k$ , тогда как второе выражение осуществляет реконструкцию сигнала в виде степенного ряда.

Операции дифференцирования сигнала в области оригиналов соответствует операция сдвига в области изображений:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow Y(k) = \frac{k+1}{H} X(k) \quad (2.34)$$

При интегрировании сигнала с переменным верхним пределом операционное правило имеет вид:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow Y(k) = \frac{H}{k} X(k-1) + AB(k), \quad (2.35)$$

где  $A$  – константа, определяемая на основе начальных условий,  $B(k)$  – операционное изображение единицы – вектор, первая компонента которого равна 1, а остальные являются нулями.

К числу значительных преимуществ преобразований Пухова относятся:

- численно-аналитический характер, позволяющий в общем виде составлять и преобразовывать математические модели сложных динамических систем и одновременно быстро и просто переходить к численным реализациям,
- простота обратного операционного преобразования (восстановления сигналов),
- возможность оперативного контроля точности вычислений, позволяющая оценить качество полученного решения.

Однако, в ряде применений дифференциальные преобразования наталкиваются на достаточно серьезные трудности, препятствующие их эффективному использованию. Наиболее существенными из них являются:

- реконструкция сигналов связана с необходимостью суммирования бесконечных степенных рядов, что в вычислительном отношении неудобно,
- сходимости степенных рядов ограничена радиусом сходимости, что требует постоянного оценивания достоверности реконструкции сигнала при ограничении числа членов ряда,
- прямое операционное преобразование сигналов реальных динамических систем связано с необходимостью многократного дифференцирования, что практически невозможно в связи с шумами, высокочастотными наводками и другими помехами (свойство чувствительности операций дифференцирования к ошибкам измерений и случайным флюктуациям сигналов).

## **2.5. Операционные исчисления неклассического типа (S-преобразования)**

Определенный класс операционных исчислений порождается при использовании методов полиномиальных аппроксимаций, рассмотренных в первой главе. В основе таких исчислений лежит представление сигнала на конечном диапазоне изменения аргумента обобщенным полиномом по некоторым системам линейно-независимых базисных функций. Каждая система базисных функций порождает свое операционное исчисление. В дальнейшем такие операционные исчисления в отличие от классических будем называть S-исчислениями.

### 2.5.1. Определение S-преобразований

Прямое и обратное преобразования для S-преобразований в матрично-векторном виде можно вывести из формул средне-квадратической аппроксимации (1.4-1.6). Для системы линейно-независимых базисных функций:

$$\bar{\mathbf{S}}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)] \quad (2.36)$$

прямое и обратное преобразования имеют вид:

$$\bar{\mathbf{X}} = \left( \int_0^T \bar{\mathbf{S}}(t) \bar{\mathbf{S}}^*(t) dt \right)^{-1} \cdot \left( \int_0^T x(t) \cdot \bar{\mathbf{S}}(t) dt \right) \quad (2.37)$$

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m X_i \cdot s_i(t) = \bar{\mathbf{X}}^* \bar{\mathbf{S}}(t) = \bar{\mathbf{S}}^*(t) \cdot \bar{\mathbf{X}} \quad (2.38)$$

В выражениях (2.37) и (2.38) интегрирование производится над каждым элементом векторов и матриц, \* - означает транспонирование векторов.

Основное операционное правило для операции интегрирования записывается следующим образом:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}_s \cdot \bar{\mathbf{X}}, \quad (2.39)$$

где  $\mathbf{P}$  – операционная матрица интегрирования, элементы которой зависят только от системы базисных функций. Вывод формул для элементов операционных матриц для различных систем базисных функций будет рассмотрен позднее.

Подобный подход позволяет получить целый ряд особенностей, устраняющих указанные недостатки преобразований Пухова, в частности:

- элементы дифференциального спектра можно получать, не прибегая к многократному дифференцированию сигнала, что позволяет оценивать зашумленные сигналы реальных динамических систем,
- реконструкция сигнала осуществляется на основе полинома конечной длины с минимально возможной для данной степени полинома среднеквадратичной погрешностью, при этом отпадает необходимость суммирования бесконечных рядов,
- сохраняется численно-аналитический характер операционных преобразований, что позволяет исследовать математические модели динамических систем, варьировать системы базисных функций и лишь на конечном этапе получать числовой результат.

Для S-преобразований, которые, в основном, являются предметом рассмотрения в данной работе, существует целый ряд правил операционной алгебры, не зависящих от выбора систем базисных функций.

Основные правила операционной алгебры для S-преобразований приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2.

### Основные правила операционной алгебры.

Сигналы, математические операции	Пространство оригиналов	Пространство операционных изображений
Сигналы	$x(t), y(t), z(t)$	$X(i), Y(i), Z(i)$
Алгебраическое суммирование	$z(t) = x(t) \pm y(t)$	$\bar{Z} = \bar{X} \pm \bar{Y}$
Умножение на константу	$y(t) = cx(t)$	$\bar{Y} = c\bar{X}$
Умножение двух сигналов	$z(t) = x(t) \cdot y(t)$	$\bar{Z} = \bar{X} \otimes \bar{Y}$
Деление двух сигналов	$z(t) = \frac{y(t)}{x(t)}, x(t) \neq 0$	$\bar{Z} = \bar{X} \oslash \bar{Y}$
Интегрирование с переменным верхним пределом	$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$	$\bar{Y} = P_s \cdot \bar{X}$
Дифференцирование	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$\bar{Y} = P_s^{-1} \cdot \bar{X}$
Запаздывание по аргументу	$y(t) = x(t - \tau)$	$\bar{Y} = P_\tau \cdot \bar{X}$
Суперпозиция функций	$z(t) = y(x(t))$	$\bar{Z} = \bar{Y} \in \bar{X}$
Свертка	$z(t) = \int_0^t x(t_1) y(t - t_1) dt_1$	$\bar{Z} = \bar{X} \Theta \bar{Y}$

### 2.5.2. Операционная матрица интегрирования для S-преобразований

Вывод операционных матриц интегрирования производится следующим образом. В выражении операции интегрирования сигнала с переменным верхним пределом

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

сигнал заменяется его полиномиальной аппроксимацией:

$$y_a(t) = \int_0^t \left( \sum_{i=1}^m X(i) s_i(\tau) \right) d\tau. \quad (2.41)$$

Изменяя порядок выполнения операций суммирования и интегрирования получим следующее выражение:

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^m \left( X(i) \cdot \int_0^t s_i(\tau) d\tau \right) = \bar{\mathbf{X}}^* \cdot \int_0^t \bar{\mathbf{S}}(\tau) d\tau, \quad (2.42)$$

из которого вытекает, что операция интегрирования сводится к операции умножения компонент спектра подинтегральной функции  $X(i)$  на соответствующие интегралы базисных функций. Рассмотрим вектор, элементами которого являются интегралы базисных функций:

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_0^t \bar{\mathbf{S}}(\tau) d\tau = \left[ \int_0^t s_0(\tau) d\tau, \int_0^t s_1(\tau) d\tau, \dots, \int_0^t s_m(\tau) d\tau \right]^*, \quad (2.43)$$

где  $*$ , как и раньше, означает транспонирование вектора. По формулам (1.4)-(1.6) определяются вектора аппроксимирующих полиномиальных спектров интегралов базисных функций. Обозначая их символами:  $\bar{\mathbf{p}}_i, i := 1, 2, \dots, m$ , получим:

$$y_a(t) = \bar{\mathbf{Y}}^* \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{t}) = \bar{\mathbf{X}}^* \cdot \mathbf{P}^* \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{t}), \quad (2.44)$$

где  $\mathbf{P}$  – матрица, составленная из векторов  $\bar{\mathbf{p}}_i$ :

$$\mathbf{P} = \{ \bar{\mathbf{p}}_1, \bar{\mathbf{p}}_2, \dots, \bar{\mathbf{p}}_m \} \quad (2.45)$$

Из выражения (2.44) следует:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{X}}, \quad (2.46)$$

Таким образом, столбцы операционной матрицы интегрирования формируются из векторов аппроксимирующих полиномиальных спектров интегралов базисных функций.

Рассмотрим на примерах порядок формирования операционных матриц интегрирования для различных систем базисных функций.

**Пример 2.1.** Степенная система базисных функций 4 порядка

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{t}) = \{t^{i-1}\}_{i=1}^{i=4} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Вектор интегралов базисных функций будет иметь вид:

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_0^t \bar{\mathbf{S}}(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} t \\ t^2 / 2 \\ t^3 / 3 \\ t^4 / 4 \\ t^5 / 5 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Столбцы операционной матрицы интегрирования  $\bar{\mathbf{p}}_i$  определяются следующим образом (интервал изменения аргумента принят равным единице:  $0 \leq t < 1$ ):

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{252} \\ -\frac{5}{42} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{20}{9} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

а сама матрица примет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{252} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{42} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{20}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

**Пример 2.2.** Блочнo-импульсная система базисных функций 5 порядка.

В соответствии с определением блочно-импульсных базисных функций (1.12) система таких функций в нашем случае будет иметь вид:



$$\bar{\mathbf{S}}(t) = \{v_i(t)\}_{i=1}^{i=5} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

где 
$$v_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i-1)h \leq t < ih, \\ 0, & \text{если } t < (i-1)h \text{ или } t \geq ih \end{cases}.$$

Интегралы с переменным верхним пределом базисных функций определяются выражением:

$$\int_0^t v_i(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } t < (i-1)h, \\ t - (i-1)h, & \text{если } (i-1)h \leq t < ih, \\ h, & \text{если } t \geq ih. \end{cases} \quad (2.52)$$

Столбцы операционной матрицы интегрирования  $\bar{\mathbf{p}}_i$  определяются следующим образом (интервал изменения аргумента принят равным единице:  $0 \leq t < 1$ ):

$$\bar{\mathbf{p}}_1 = h \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_2 = h \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_3 = h \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_4 = h \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{p}}_5 = h \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

а сама матрица при  $h=1/5$  примет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Необходимо отметить, что операции повторного (кратного) интегрирования в операционной области будет соответствовать повторное (многократное) применение операционной матрицы интег-

рирования. Позднее будет рассмотрен вопрос об операционном аналоге (операционной матрице) интегрирования нецелого порядка.

Рассмотрим порядок применения S-преобразований на примере решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка при использовании блочно-импульсной системы базисных функций.

**Пример 2.3.** Задано дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.1 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = t$$

с начальными условиями:  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ . Найти аппроксимацию решения уравнения на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 10$ , используя блочно-импульсную систему базисных функций порядка  $m=100$ .

Перед использованием операционного метода преобразуем заданное дифференциальное уравнение в эквивалентное интегральное путем двукратного интегрирования обеих частей уравнения. После несложных преобразований с учетом начальных условий получим:

$$y(t) + 0.1 \int_0^t y(\tau) d\tau + 2 \int \int_0^t y(\tau) d\tau^2 = \frac{t^3}{6} - 0.9t + 1.$$

Перейдем в операционное пространство. Операционным аналогом интегрального уравнения будет следующее выражение:

$$\bar{\mathbf{Y}} + 0.1 \mathbf{P}^{(1)} \cdot \bar{\mathbf{Y}} + 2 \mathbf{P}^{(2)} \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{F}}.$$

Решение этого векторно-матричного уравнения будет иметь вид:  $\bar{\mathbf{Y}} = (\mathbf{E} + 0.1 \mathbf{P}^{(1)} + 2 \mathbf{P}^{(2)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}$ . Аппроксимацию решения можно построить с помощью выражения:  $y_a(t) = \bar{\mathbf{Y}}^* \cdot \mathbf{S}(t)$ .

Фрагменты программы и результаты решения в системе Mathematica приводятся ниже. В приводимом примере использованы выражения операционных матриц интегрирования произвольного порядка, вывод которых будет рассмотрен в главе 4.

- Задание базисной системы, ее параметров и порядков интегральных операторов:

```
In[1]:= h = 0.1; m = 100; beta1 = 1; beta2 = 2;
```

```
In[2]:= v[t_, i_, h_] := If[{i - 1} * h <= t < i * h, 1, 0];
```

```
In[3]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];
```

- Формирование операционных матриц интегрирования первого и второго порядков:

In[4]:=  $p[\beta, x] :=$

$$\frac{h^\beta}{\Gamma[\beta + 2]} *$$

If [ $x == 0, 1,$

If [ $x > 0, (x + 1)^{\beta+1} - 2x^{\beta+1} + (x - 1)^{\beta+1}, 0$ ]]];

In[5]:=  $P1 = \text{Table}[p[\beta1, i - j], \{i, 0, m - 1\}, \{j, 0, m - 1\}];$

In[6]:=  $P2 = \text{Table}[p[\beta2, i - j], \{i, 0, m - 1\}, \{j, 0, m - 1\}];$

- Формирование операционных матриц интегрирования первого и второго порядков:

$p[\beta, x] :=$

$$\frac{h^\beta}{\Gamma[\beta + 2]} *$$

If [ $x == 0, 1,$  If [ $x > 0, (x + 1)^{\beta+1} - 2x^{\beta+1} + (x - 1)^{\beta+1}, 0$ ]]];

$P1 = \text{Table}[p[\beta1, i - j], \{i, 0, m - 1\}, \{j, 0, m - 1\}];$

$P2 = \text{Table}[p[\beta2, i - j], \{i, 0, m - 1\}, \{j, 0, m - 1\}];$

- Определение операционного изображения правой части интегрального уравнения:

In[7]:=  $f2 = 1 - 0.9t + \frac{t^3}{6};$

$$F2 = \frac{1}{h} * \text{Table} \left[ \int_{(i-1)*h}^{i*h} f2 dt, \{i, m\} \right];$$

- Решение уравнения в операционной области:

In[8]:=  $Y = \text{Inverse}[\text{IdentityMatrix}[m] + 0.1P1 + 2P2].F2;$

- Формирование аппроксимации решения:

In[9]:=  $ya = Y.S;$

Для сравнения аппроксимации решения с точным решением исходного дифференциального уравнения зададим его в виде функции:

In[10]:=  $f1 = -0.025 + 0.5t +$

$$e^{-0.05t} * 1.025 (\text{Cos}[1.413t] - \text{Sin}[1.413t]);$$

- Визуализация аппроксимации решения, совмещенного с точным решением:

In[11]:=  $\text{Plot}[\{f1, ya\}, \{t, 0, 10\}]$

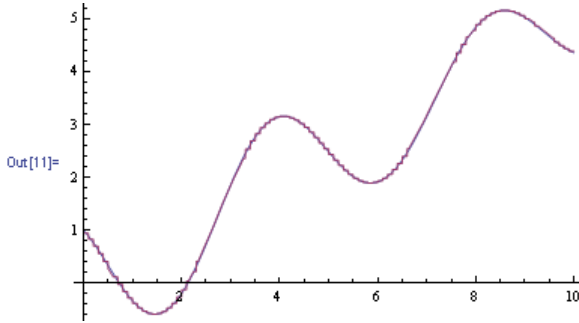


Рис.2.2а. Аппроксимация решения, совмещенная с точным решением уравнения

- Визуализация погрешности аппроксимации:

```
In[12]:= Plot[f1 - ya, {t, 0, 10}]
```

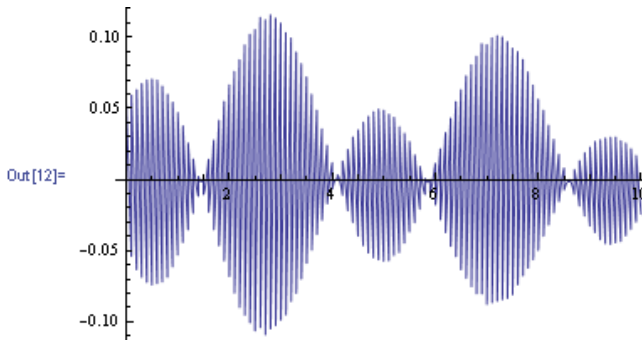


Рис.2.2b. Функция погрешности аппроксимации решения уравнения

Более подробно с неклассическими операционными методами можно ознакомиться в работах [2-4].

## **Список литературы к Главе 2**

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи . - М.: Гардарики, 1999. – 640 с.
2. Васильев В.В., Симак Л.А. Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем: Аппроксимация сигналов с применением системы Mathematica®. – К.: НАН Украины, 2007. – 127 с.
3. Васильев В.В., Симак Л.О. Элементы операційного числення на основі поліноміальних апроксимацій сигналів // Електроніка та системи управління. – 2004, № 1. – С. 43 – 45.
4. Васильев В.В., Симак Л.О., Зеленков О.А. та ін. Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі неklasичних операційних числень. – К.: НАН України, 2006. – 184 с.
5. Конторович М.И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 228 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
7. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. – К.: Наукова Думка, 1967. – 568 с.
8. Пухов Г.Е. Комплексное исчисление и его применение . – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – 230 с.
9. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наукова Думка, 1980. – 420 с.
10. Martin J.D. Signals & Processes. A Foundation Course . – Pitman, 1991. – 421 p.
11. Poularikas A.D. (Editor-in-Chief) The Transforms and Applications Handbook. – CRC Press & IEEE Press, 2000. – 1313 p.

## **Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ В СРАВНЕНИИ С КЛАССИЧЕСКИМ**

### **3.1 Введение и краткий исторический экскурс**

Математический анализ с использованием интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков или дробное исчисление (Fractional Calculus) имеет более чем трехвековую историю. Первое упоминание о производных нецелого порядка содержится в переписке Я. Бернулли и Г. Лейбница. Последний, в частности, в письме к Г. Лопиталю, датированном 1695 г., обсуждая возможности дифференциалов порядка  $\frac{1}{2}$ , пророчески заявил, что это кажущийся парадокс, из которого однажды последуют полезные результаты. В 18 веке дробному исчислению не уделялось пристального внимания. Известно лишь несколько публикаций, связанных с именами Эйлера и Лагранжа. Весь XIX и первая половина XX века явились периодом накопления результатов и формирования дробного исчисления как самостоятельного раздела математического анализа. Известны публикации по этому вопросу знаменитых математиков, механиков и физиков: Лапласа, Фурье, Абеля, Лиувилля, Римана, Грюнвальда, Хэвисайда, Харди, Зигмунда, Куранта и др. Большой вклад в развитие математического анализа нецелых порядков внес известный русский математик, президент Московского математического общества А.В. Летников. Его докторская диссертация и цикл работ, опубликованных в Математическом сборнике [2-4], посвящены теории дифференцирования дробного порядка, историческому развитию этого направления математики, применению теории дробного исчисления к интегральному исчислению и решению дифференциальных уравнений. Первые публикации А.В.Летникова по дробному исчислению относятся к 1868-1872 г.г. Новый всплеск интереса научного сообщества к дробному исчислению, произошел после публикации книги «Дробное исчисление» (K.V.Oldham, J.Spanier) в 1974 г.[13]. В этой книге систематически изложена теория дробного исчисления, а также рассмотрены области его применения. Дробному исчислению посвящен ряд научно-технических конференций и семинаров [6, 8, 11, 15, 18], организованы специальные журналы [7, 11]. Появляются тематические выпуски различных журналов, посвященные применениям дробного исчисления в различных областях науки, техники, естествознания [9]. Подробный анализ истории развития дробного исчисления не входит в цели настоящей работы. Этому

вопросу посвящено большое число великолепных обзоров в работах [5, 13, 16]. В частности, интересующимся следует обратить внимание на аннотированную хронологическую библиографию, составленную Б. Россом, которая приведена во введении к работе [13], а также на литературу к монографиям [14, 17].

В настоящее время дробное исчисление находится в процессе бурного развития и в теоретическом плане и в его применениях. Можно сказать, что этот раздел математического анализа превратился в инструмент математического моделирования сложнейших динамических процессов в обычных и фрактальных средах, позволяющий решать на новой основе самые различные задачи анализа, синтеза, идентификации, диагностики, создания новых систем управления. В последующих главах будут в обзорном плане рассмотрены некоторые наиболее характерные примеры применения дробного исчисления в различных областях науки и техники.

### 3.2 Сопоставление классического и дробного математического анализа

В дробном математическом анализе часто встречаются функции, являющиеся обобщением широко известных и применяемых в классическом математическом анализе, в частности, экспоненциальной функции и факториала. Начнем сопоставление с рассмотрения этих функций.

#### 3.2.1 Гамма-функция Эйлера и родственные ей функции

Гамма-функция определяется следующим образом [1, 2, 13]:

$$\Gamma(x) \left\{ \begin{array}{l} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \operatorname{Re}(x) > 0, \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, (x - \text{любой}). \end{array} \right.$$

В качестве аргументов Гамма - функции могут быть любые числа (действительные и комплексные, целые и нецелые). Гамма-функция для целых положительных  $x = n$  связана с факториалом следующим образом:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, n > 0 - \text{целое.}$$

На рис. 3.1 и 3.2 показан вид модуля Гамма - функции комплексного и Гамма - функции действительного аргументов.

### Программа вариантов визуализации Гамма-функции:

```
In[1]:= z1v = Plot3D[Abs[Gamma[x + I * y]], {x, -4, 4.1}, {y, -1, 1},
  PlotPoints -> 50, PlotLabel -> "Abs of Gamma function"]
```

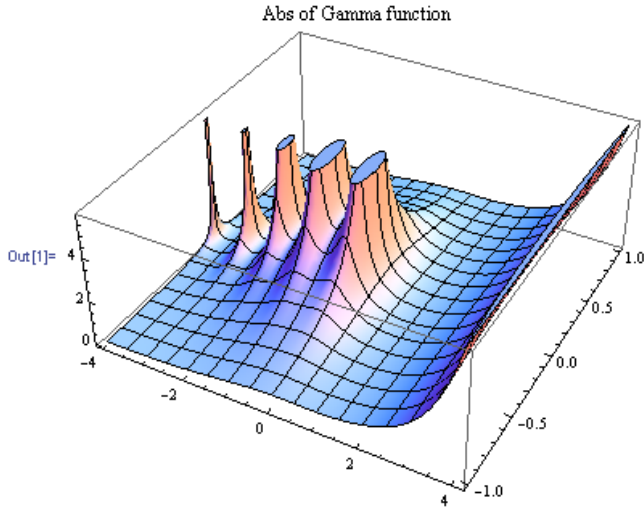


Рис.3.1a Модуль Гамма-функции комплексного аргумента

```
In[2]:= z1c = ContourPlot[Abs[Gamma[x + I * y]], {x, -4, 4.1},
  {y, -1, 1}, PlotPoints -> 50,
  PlotLabel -> "Abs of Gamma function"]
```

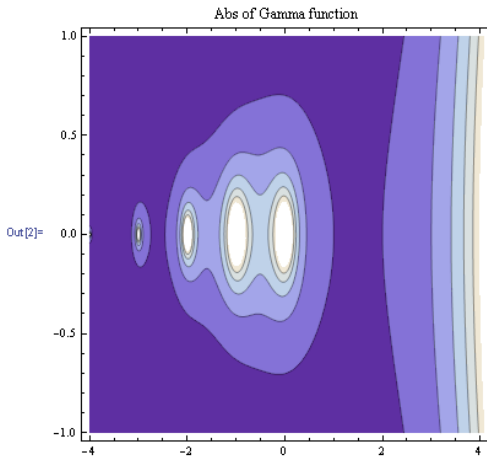


Рис.3.1b Модуль Гамма-функции комплексного аргумента (контурный график)



```
In[3]:= z2 = Plot[Gamma[x], {x, -4, 4.1},
PlotLabel -> "Gamma function of Real argument"]
```

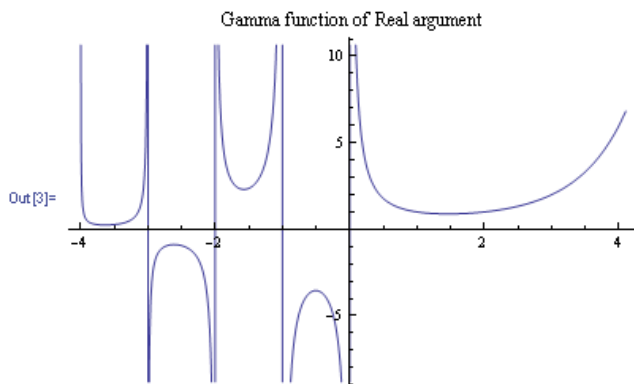


Рис. 3.2 Гамма-функция действительного аргумента

На рис. 3.2 видно, что Гамма-функция претерпевает разрывы вида  $\pm\infty$  в нуле и при целых отрицательных значениях аргумента. Однако, в дробном анализе чаще всего встречаются значения Гамма - функции в степени -1 или отношения Гамма - функций различных аргументов, которые являются непрерывными функциями на множестве рассматриваемых значений аргументов. Для примера на рис. 3.3 показан вид функции  $1/\Gamma(x)$ , которая является непрерывной функцией.

```
In[4]:= z3 = Plot[1/Gamma[x], {x, -4, 4.1},
PlotLabel -> "1/Gamma function of Real argument"]
```

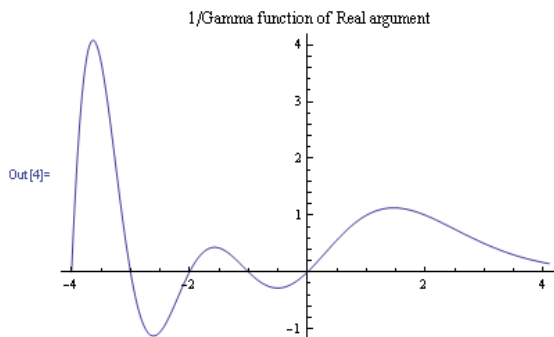


Рис.3.3. График функции  $1/\Gamma(x)$

Наряду с рассмотренной Гамма-функцией находят применение несколько функций, тесно связанных с ней. К ним, в частности, относятся неполная Гамма-функция, Бэта-функция и  $\psi$ -функция [13]:

Неполная Гамма-функция определяется следующими выражениями:

$$\gamma(c, x) = \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \int_0^x y^{x-1} \exp(-y) dy = \exp(-x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)}$$

Программа визуализации неполной Гамма-функции и ее внешний вид показаны ниже.

```
In[5]:= z4 = Plot3D[Gamma[a, x], {a, -2, 2}, {x, 0.1, 4}]
```

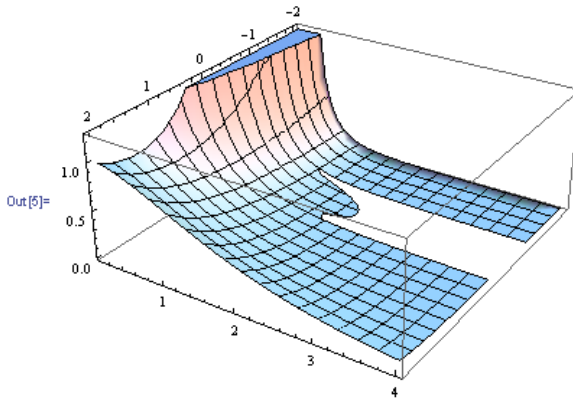


Рис.3.4. Неполная Гамма – функция действительных аргументов а и х.

**Бэта-функция следующим образом выражается через Гамма-функции:**

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Программа визуализации Бэта – функции и ее графический образ в диапазоне изменения аргументов

$\left( \begin{array}{l} -2 \leq p \leq 2, \\ -2 \leq q \leq 2 \end{array} \right)$  приведены ниже.

$$\text{In}[6]:= \text{B}[p_, q_] := \frac{\text{Gamma}[p] + \text{Gamma}[q]}{\text{Gamma}[p] + \text{Gamma}[q]};$$

`In[7]:= z5 = Plot3D[B[p, q], {p, -2, 2}, {q, -2, 2}]`

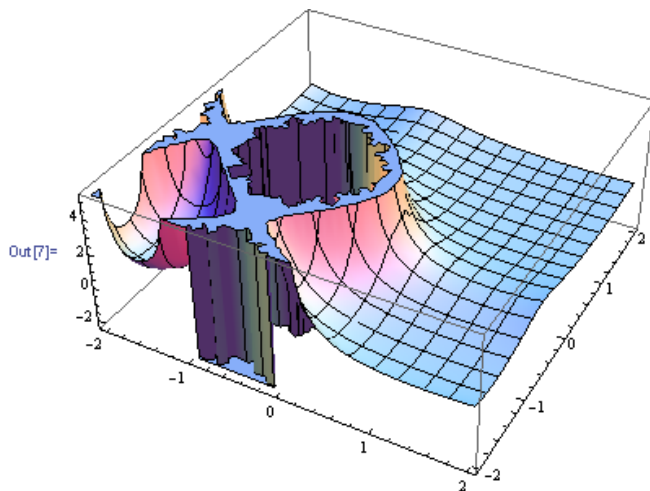


Рис. 3.5. Бэ́та-функция действительных аргументов  $p$  и  $q$ .

Контурный график этой функции в той же области изменения аргументов показан на рис. 1.6.

`In[8]:= z5c = ContourPlot[B[p, q], {p, -2, 2}, {q, -2, 2}]`

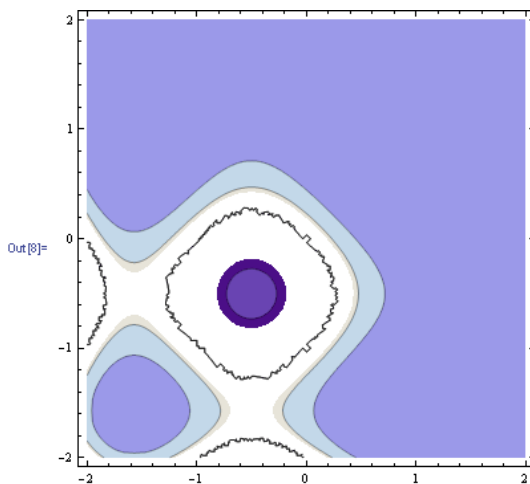


Рис. 3.6. Контурный график Бэ́та – функции

$\psi$  - функция связана с Гамма - функцией соотношением вида:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}$$

$\psi$  - функция обладает интересными свойствами, которые часто используются в дробном исчислении:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + x^{-1},$$

$$\psi(n+1) = \psi(1) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$\psi$  - функция является частным случаем Поли-Гамма - функции:

```
In[11]:=  $\psi[x_] := D[\text{Gamma}[x], x] / \text{Gamma}[x]$ 
```

```
In[12]:=  $\psi[x]$ 
```

```
Out[12]= PolyGamma[0, x]
```

Ее вид изображен на рис. 3.7.

```
In[13]:= Plot[PolyGamma[0, x], {x, -4, 4}, PlotLabel -> "psi-function"]
```

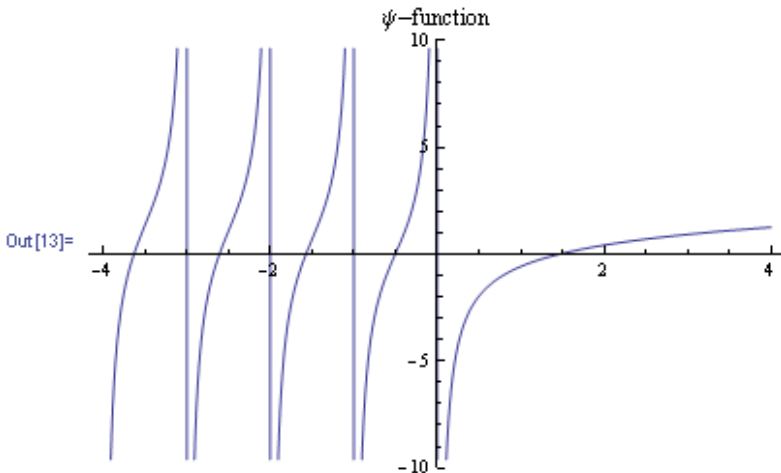


Рис. 3.7. «Пси»-функция

### 3.2.2 Функция Миттаг - Лефлера

Функция Миттаг-Лефлера [14, 17] задается на множестве значений комплексного аргумента  $z$  с помощью бесконечного ряда и зависит от двух параметров  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \alpha \in \mathbf{R}_+, \beta \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C}.$$

Приведенная формула для случая  $\alpha = \beta = 1$  определяет экспоненциальную функцию  $e^z$ :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

В качестве иллюстрации на рис.1.8 изображено семейство функций Миттаг-Лефлера  $E_{1,m}$  для  $m = 1, \dots, 5$ . Эти функции определяются следующими выражениями:

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2},$$

⋮

$$E_{1,m}(z) = \frac{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}}{z^{m-1}}.$$

```
In[1]:= MLm := Table[ $\frac{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}}{z^{m-1}}$ , {m, 5}];
```

```
In[2]:= Plot[MLm, {z, -3, 3},
```

```
AxisLabel -> {"z", "MittagLeffler[m, z]"}]
```

Функции Миттаг-Лефлера играют важную роль в решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков.

Многие специальные функции могут быть выражены через функции Миттаг-Лефлера с различными параметрами. К таким функциям, в частности, относятся гиперболические синус и косинус, функции Миллера-Росса, Работнова и др. Подробнее об этом см.[17].

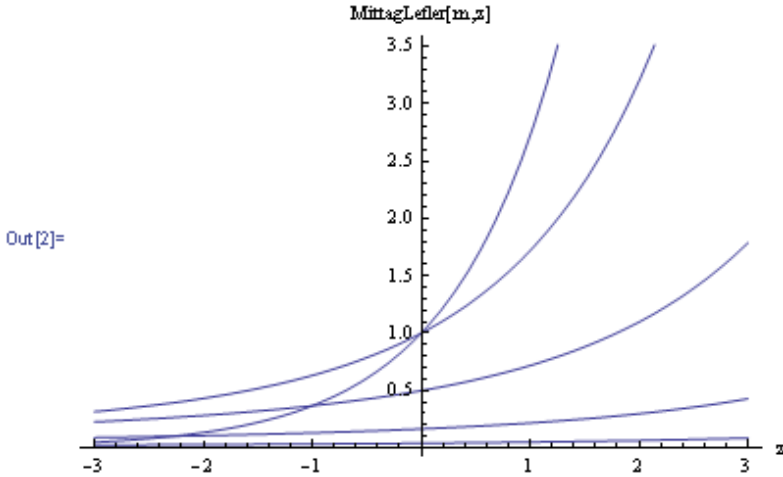


Рис.3.8. Функции Миттаг-Лефлера  $E_{1,1}(z), E_{1,2}(z), \dots, E_{1,5}(z)$ .

Сравнение математического анализа дробных порядков с классическим анализом начнем с формул дифференцирования некоторых элементарных функций.

### 3.2.3. Дифференцирование с нецелым порядком некоторых элементарных функций

#### Степенные функции

Запишем для степенной функции  $x(t) = t^k$  хорошо известные формулы дифференцирования с порядками  $1, 2, \dots, n$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = kt^{k-1},$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = k(k-1)t^{k-2}, \quad (3.1)$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = k(k-1)\dots(k-n+1)t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}t^{k-n}.$$

Анализ формулы для производной порядка  $n$  (последняя строка выражений (3.1)) показывает, что нет никаких препятствий для того, чтобы порядок дифференцирования был отличным от целого. Для этого необходимо использовать Гамма-функцию, обоб-

щающую факториальную функцию на случай нецелочисленных аргументов. Выполнив замену целого порядка дифференцирования  $n$  на дробный  $\beta$  и вводя Гамма-функцию, получим следующую формулу дифференцирования степенной функции с дробным порядком:

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} t^{k-\beta} \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) может рассматриваться как функция трех аргументов:  $t$ ,  $k$  и  $\beta$  и, таким образом, дает более подробное описание функции и всех ее производных и интегралов (как целого, так и дробного порядков).

В качестве иллюстрации приведем графические образы выражения (3.2) для случаев  $k=0$ , когда порядок дифференциального оператора изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$  (Рис.3. 9–3. 10).

```
In[1]:= Y[t_, β_, k_] := Gamma[k + 1] / Gamma[k - β + 1] * t^{k-β};
In[2]:= Plot3D[Y[t, β, 0], {t, 0, 1}, {β, -1, 1}, AxesLabel -> {t, β},
PlotLabel -> "Differintegral of t^0=1"]
```

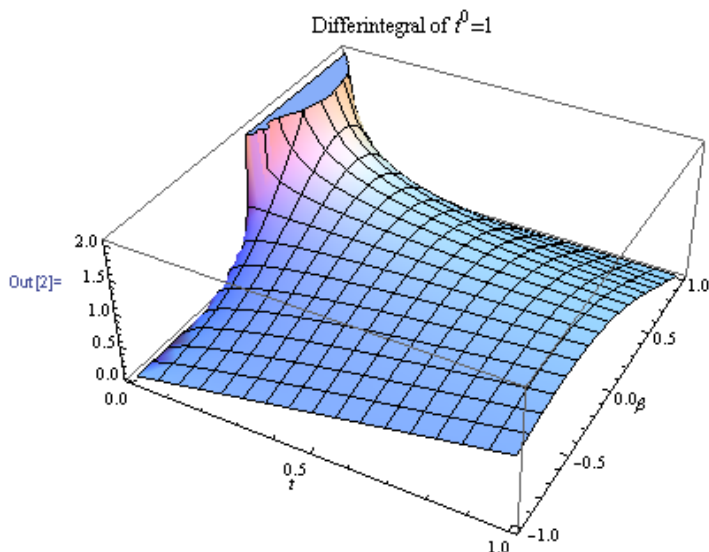


Рис.3.9. Дифферинтегралы константы 1 порядков  $\beta$  ( $-1 < \beta < 1$ )

```
In[3]:= Plot[Table[Y[t, β, 0], {β, -1, 1, 0.1}], {t, 0, 1},
PlotLabel -> "DifferIntegrals of t^0=1", AxesLabel -> {t}]
```

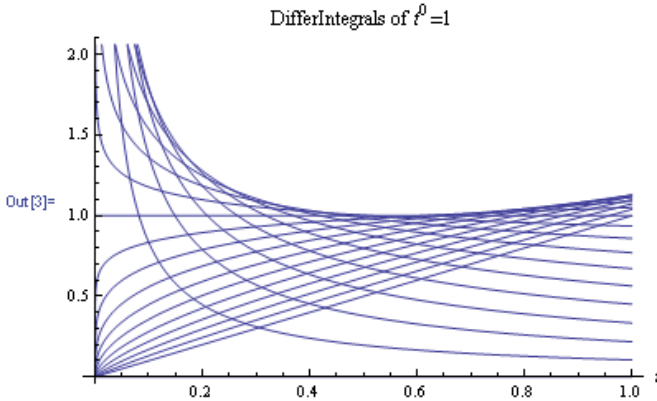


Рис.3.10. Дифферинтегралы константы 1 порядков  $\beta$  ( $-1 < \beta < 1$ ), шаг по порядку равен 0.1

### Экспоненциальные функции

Пусть задана экспоненциальная функция  $y(t) = e^{kt}$ . Дифференцируя ее с порядками 1, 2, ...,  $n$ , получим:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ke^{kt},$$

...

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = k^n e^{kt}. \quad (3.3)$$

Выражение производной порядка  $n$  обобщается на дробные порядки путем простой замены  $n$  на  $\beta$ :

$$\frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = k^\beta e^{kt}. \quad (3.4)$$

Графический образ дифферинтегралов экспоненциальной функции для случая положительных значений  $k=+2$  приведен на рис. 3.11.

```
In[1]:= Y[t_, k_, beta_] := k^beta * e^k*t;
```

```
In[2]:= Plot3D[Y[t, 2, beta], {t, 0, 1}, {beta, -1, 1},
```

```
PlotLabel -> "differintegrals of exp-function"]
```



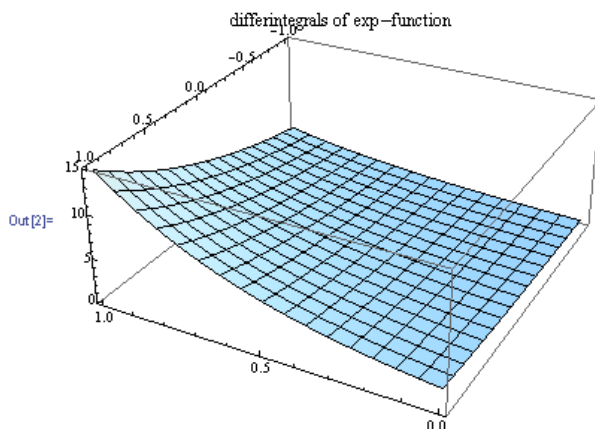


Рис.3.11. Дифферинтегралы экспоненциальной функции ( $2^k e^{2t}$ )

Необходимо отметить, что дифферинтегралы дробных порядков экспоненциальной функции с отрицательными показателями являются функциями комплексного переменного, действительная и мнимая части таких дифферинтегралов приведены на рис. 3.12 и 3.13.

```
In[3]:= Plot3D[Re[y[t, β, -2]], {t, 0, 1}, {β, -1, 1},
PlotLabel → "Real part of exp-function"]
```

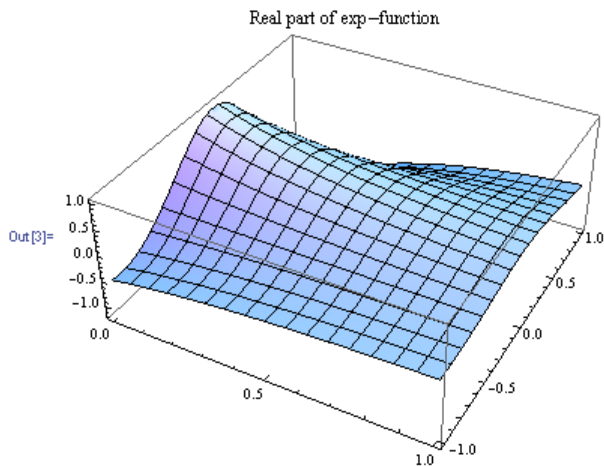


Рис. 3.12. Действительная часть дифферинтеграла экспоненциальной функции ( $\text{Re}((-2)^k e^{-2t})$ )

```

In[4]:= Plot3D[Im[y[t, β, -2]], {t, 0, 1}, {β, -1, 1},
  PlotLabel → "Imaginary part of exp-function"
  Imaginary part of exp-function

```

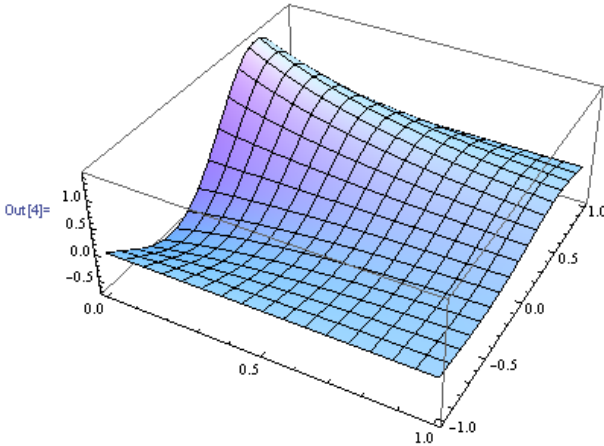


Рис. 3.13. Мнимая часть дифферинтеграла экспоненциальной функции

$$(\operatorname{Im}((-2)^k e^{-2t}))$$

Существует и другое определение дифферинтегралов экспоненциальной функции. В соответствии с [13] дифферинтегралы экспоненциальной функции определяются выражениями:

$$\frac{d^\beta e^{d-bt}}{dt^\beta} = \frac{e^{d-bt}}{t^\beta} \Gamma(-\beta, -bt) \quad (3.5)$$

Программа визуализации дифферинтеграла экспоненциальной функции в приведенной выше постановке имеет вид:

```

In[5]:= yd[d_, b_, t_, β_] := (e^{d-b*t} / t^β) * Gamma[-β, -b * t];

```

- Для положительных значений показателя степени экспоненты ( $b < 0$ ):

```

In[6]:= yd2 = yd[0, -2, t, β];

```

```

In[7]:= Plot3D[yd2, {t, 0.1, 1}, {β, -1, 1}, PlotRange → All]

```

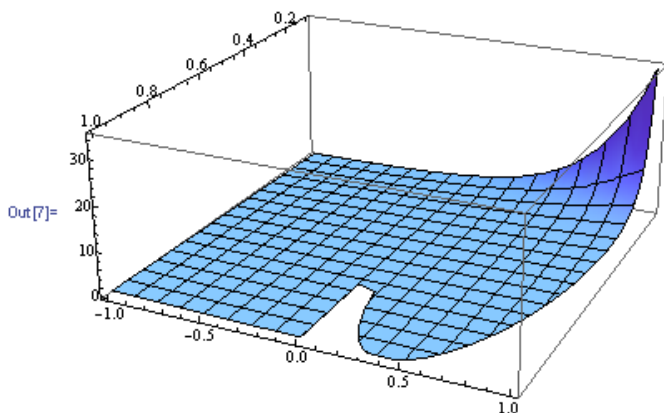


Рис.3.14а. Альтернативный дифференциал экспоненты ( $b < 0$ )

- Для отрицательных показателей степени экспоненты ( $b > 0$ )

```
In[8]:= yd3 = yd[0, -2, t, β];
```

```
In[9]:= Plot3D[yd3, {t, 0.1, 1}, {β, -1, 1}, PlotRange → All]
```

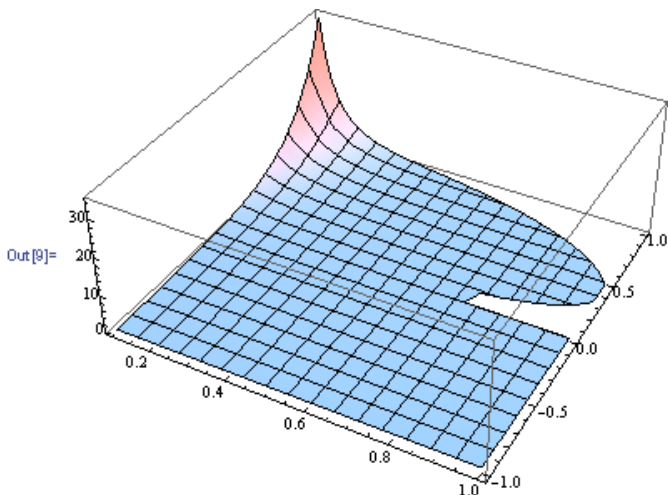


Рис.3.14б. Альтернативный дифференциал экспоненты ( $b < 0$ )

### Логарифмические функции

Первая производная натурального логарифма, как известно, является гиперболой:

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}. \quad (3.6)$$

Формула  $n$ - ной производной натурального логарифма имеет вид [1]:

$$\frac{d^n \ln t}{dt^n} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{t^n}. \quad (3.7)$$

Если основание логарифма равно  $a$ , эти выражения изменяются незначительно и принимают вид:

$$\frac{d \log_a t}{dt} = \frac{1}{t \ln a}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d^n \log_a t}{dt^n} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{t^n \ln a}. \quad (3.9)$$

Дифференциалы логарифмической функции в соответствии с [13] определяются следующим выражением:

$$\frac{d^\beta \ln t}{dt^\beta} = t^{-\beta} (\ln t + \psi(1) - \psi(1 - \beta)) \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)}. \quad (3.10)$$

Программа формирования дифференциалов логарифмической функции приведена ниже.

```

ln[1]:= ylog[x_, β_] :=
      
$$\frac{x^{-\beta}}{\Gamma[1 - \beta]}$$
 *
      (Log[x] + PolyGamma[0, 1] - PolyGamma[1 - β]);
ln[2]:= y1 = ylog[x, β];
ln[3]:= Plot[Evaluate[Table[y1, {β, -2, 2, 1/2}]], {x, 0., 5},
      AxesLabel → {x, "y1"},
      PlotLabel → "Differintegrals of ln(x)"]

```

Графические образы дифференциалов логарифма, построенные для ряда значений  $\beta$ , имеют вид:

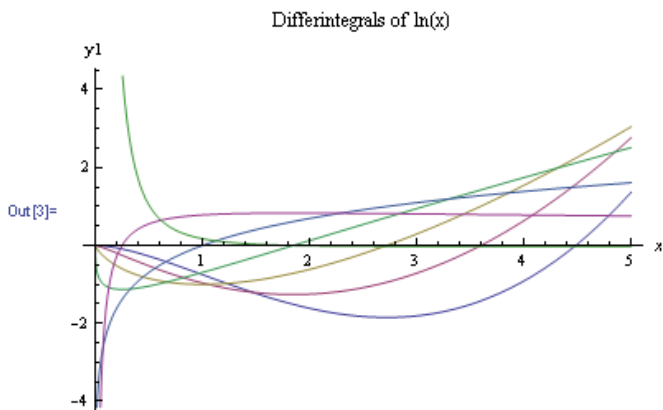


Рис. 3.15. Дифферинтегралы логарифмической функции для различных порядков дифферинтегральных операторов ( $\beta := -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ )

Графический образ дифферинтегралов логарифмической функции как функции порядка оператора и времени приведен на рис. 3.16.

In[4]:= `Plot3D[y1, {x, 0, 5}, {beta, -2, 2}]`

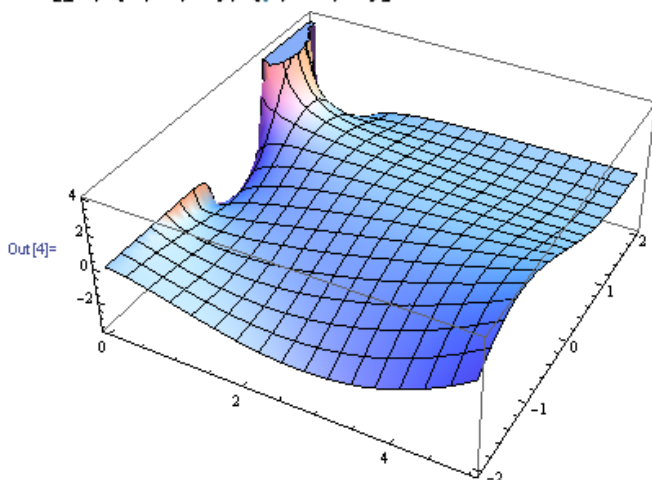


Рис.3.16. Дифферинтегралы логарифмической функции

### Синусоидальные функции

Поступая аналогично, получим следующую систему формул целочисленного и дробного дифференцирования синусоидальной функции  $z(t) = \text{Sin}(\omega t + \alpha)$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz(t)}{dt} &= \omega \cos(\omega t + \alpha) = \omega \sin(\omega t + \alpha + \pi / 2), \\
 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} &= \omega^2 \sin(\omega t + \alpha + 2\pi / 2), \\
 &\dots \\
 \frac{d^n z(t)}{dt^n} &= \omega^n \sin(\omega t + \alpha + n\pi / 2), \\
 \frac{d^\beta z(t)}{dt^\beta} &= \omega^\beta \sin(\omega t + \alpha + \beta\pi / 2).
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Выражение для производной синусоидальной функции порядка  $\beta$ , которое приведено в последней строке формул (3.11), позволяет построить графический образ синусоидальной функции и всех ее производных, как целого, так и дробного порядков (рис. 3.17).

Программа визуализации дифферинтегралов синусоидальной функции для  $\omega = 2, \alpha = 0$  приведена ниже.

```

In[1]:= z[ $\omega$ _,  $\alpha$ _,  $\beta$ _, t_] :=  $\omega^\beta$  * Sin[ $\omega$  * t +  $\alpha$  +  $\beta$  *  $\frac{\pi}{2}$ ];
In[2]:= z1 = z[2, 0,  $\beta$ , t];
In[3]:= Plot3D[z1, { $\beta$ , -1, 1}, {t, 0, 8}, AxesLabel -> { $\beta$ , t},
PlotLabel -> "DifferIntegrals of sin function"]

```

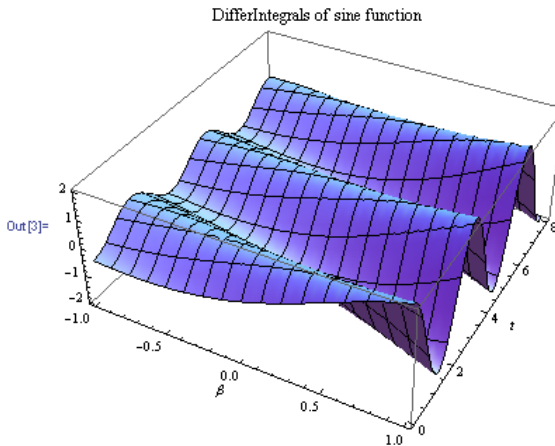


Рис.3.17. Производные дробного порядка синусоидальной функции.

Рассмотренные примеры можно было бы продолжать и далее, рассматривая другие функции. Однако, мы преследовали при рас-

смотрении приведенных примеров единственную цель – показать, что формулы целочисленного дифференцирования в большинстве своем допускают обобщение на нецелые порядки дифференцирования, а подстановка в формулы дробного дифференцирования вместо дробных порядков целых чисел приводит к известным формулам классического математического анализа.

### 3.2.4. Аппроксимации формул дифференцирования и интегрирования нецелых порядков

#### Формулы численного дифференцирования

Рассмотрим формулы численного дифференцирования некоторой функции  $f(t)$ , задав на интервале изменения аргумента  $t$  сетку с шагом  $h$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(t) - f(t-h)) / h, \\ \frac{d^2}{dt^2} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} (f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)) / h^2, \\ &\dots \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где  $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$  - биномиальные коэффициенты.

Заменяя в общей формуле порядок  $n$ -ой производной на  $\beta$  и факториальные функции на Гамма-функцию, получим определение дробной производной функции  $f(t)$  порядка  $\beta$ , известное под именем формулы Грюнвальда - Летникова [14]:

$$\begin{aligned} D_t^\beta f(t) &= \frac{d^\beta f(t)}{dt^\beta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\beta}{j} f(t-jh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta-j+1)} f(t-jh), \\ [x] & - \text{целая часть } x. \end{aligned} \tag{3.13}$$

### Формулы численного интегрирования с переменным верхним пределом

Функция  $f(t)$  может быть приближенно проинтегрирована с переменным верхним пределом известным методом прямоугольников, если разбить интервал интегрирования на  $N$  участков длиной  $h$ :

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \approx h(f(t) + f(t-h) + f(t-2h) + \dots + f(t-nh)), \quad (3.14)$$

$$h = t / N.$$

Аналогично для двойного интеграла формула численного интегрирования примет вид:

$$D_t^{-2} f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 \approx h^2 (f(t) + 2f(t-h) + 3f(t-2h) + \dots + (n+1)f(t-nh)), \quad (3.15)$$

$$h = t / N.$$

Для  $n$  - кратного интегрирования методом индукции можно получить:

$$D_t^{-n} f(t) = \int_0^t \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2} dt_{n-1} \approx$$

$$h^n \sum_{j=0}^{\left[ \frac{t}{h} \right]} (-1)^j \frac{(-n)!}{j!(-n-j)!} f(t-jh) = h^n \sum_{j=0}^{\left[ \frac{t}{h} \right]} \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!} f(t-jh),$$

$$[x] - \text{целая часть } x. \quad (3.16)$$

Результат интегрирования будет получен с большей точностью, если одновременно с уменьшением  $h$  выбрать достаточно большое значение  $N$ .

Анализ выражений (3.12 - 3.15) позволяет заключить, что формула (3.16) является обобщающей и дает выражения производной произвольного целого и нецелого порядков при положительном  $\beta$  и для интегралов произвольных порядков при отрицательном  $\beta$ .

### Примеры применения формул Грюнвальда –Летникова для дифференцирования и интегрирования с нецелыми порядками

**Пример 3.1.** Продифференцировать численно с порядком  $\beta=0.5$  функцию  $f(t) = t^2$ , заданную на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 1$ , используя сетку с шагом  $h=0.1$ .

Задание функции:



In[1]:=  $f[t_] := t^2;$

Определение производной дробного порядка по формуле Грюнвальда – Летникова:

In[2]:=  $f\beta[a_, m_, \beta_, t_] :=$

$$\frac{1}{\left(\frac{t-a}{m}\right)^\beta} * \sum_{j=0}^{m-1} \left( (-1)^j * \text{Binomial}[\beta, j] * f\left[t-j * \frac{t-a}{m}\right] \right);$$

Задание параметров формулы:

In[3]:=  $f\beta1 = f\beta[0, 100, 0.5, t];$

Построение массива значений производной порядка 0.5 на выбранной сетке:

In[4]:=  $F1 = \text{Table}[f\beta1, \{t, 0, 1, 0.01\}]$

Out[4]= {0., 0.00149887, 0.00423944, 0.00778835, 0.011991,  
0.0167579, 0.0220288, 0.0277595, 0.0339155,  
0.0404695, 0.0473984, 0.0546831, 0.0623068,  
0.0702553, 0.0785156, 0.0870765, 0.0959277, 0.10506,  
0.114465, 0.124135, 0.134063, 0.144242, 0.154667,  
0.165331, 0.17623, 0.187359, 0.198712, 0.210286,  
0.222076, 0.234078, 0.246289, 0.258706, 0.271324,  
0.284142, 0.297154, 0.31036, 0.323756, 0.337339,  
0.351107, 0.365057, 0.379187, 0.393495, 0.407979,  
0.422636, 0.437465, 0.452463, 0.467628, 0.482959,  
0.498455, 0.514112, 0.52993, 0.545908, 0.562042,  
0.578333, 0.594777, 0.611375, 0.628125, 0.645024,  
0.662073, 0.679269, 0.696612, 0.714099, 0.731731,  
0.749505, 0.767421, 0.785478, 0.803674, 0.822008,  
0.84048, 0.859088, 0.877831, 0.896709, 0.91572,  
0.934863, 0.954138, 0.973544, 0.99308, 1.01274,  
1.03254, 1.05246, 1.0725, 1.09268, 1.11297, 1.13339,  
1.15394, 1.17461, 1.1954, 1.21631, 1.23734, 1.25849,  
1.27976, 1.30115, 1.32265, 1.34428, 1.36602,  
1.38787, 1.40984, 1.43193, 1.45413, 1.47644, 1.49887}

Определение полупроизводной по формуле (3.2):

In[5]:=  $f\beta2 = \frac{\text{Gamma}[3] * t^{1.5}}{\text{Gamma}[2.5]};$

Построение таблицы значений полупроизводной в узловых точках сетки с шагом 0.01:

In[6]:=  $F2 = \text{Table}[f\beta2, \{t, 0, 1, 0.01\}]$

```

Out[6]= {0., 0.00150451, 0.00425538, 0.00781764, 0.012036,
  0.0168209, 0.0221116, 0.0278638, 0.0340431,
  0.0406217, 0.0475766, 0.0548887, 0.0625411,
  0.0705194, 0.0788108, 0.0874039, 0.0962884, 0.105455,
  0.114895, 0.124602, 0.134567, 0.144785, 0.155249,
  0.165953, 0.176893, 0.188063, 0.199459, 0.211076,
  0.222911, 0.234958, 0.247215, 0.259679, 0.272345,
  0.28521, 0.298272, 0.311527, 0.324973, 0.338607,
  0.352427, 0.36643, 0.380613, 0.394975, 0.409513,
  0.424225, 0.439109, 0.454164, 0.469386, 0.484775,
  0.500329, 0.516045, 0.531923, 0.54796, 0.564155,
  0.580507, 0.597014, 0.613674, 0.630487, 0.64745,
  0.664562, 0.681823, 0.699231, 0.716784, 0.734482,
  0.752323, 0.770307, 0.788431, 0.806696, 0.825099,
  0.84364, 0.862318, 0.881132, 0.90008, 0.919163,
  0.938379, 0.957726, 0.977205, 0.996814, 1.01655,
  1.03642, 1.05641, 1.07654, 1.09678, 1.11716,
  1.13766, 1.15828, 1.17902, 1.19989, 1.22088, 1.24199,
  1.26322, 1.28457, 1.30604, 1.32763, 1.34933, 1.37115,
  1.39309, 1.41514, 1.43731, 1.4596, 1.48199, 1.50451}

```

Совмещение массивов F1, F2 на одном графике с целью сравнения:

```

In[7]:= ListPlot[{F1, F2}, Filling -> Axis,
  PlotStyle -> {Red, Green}]

```

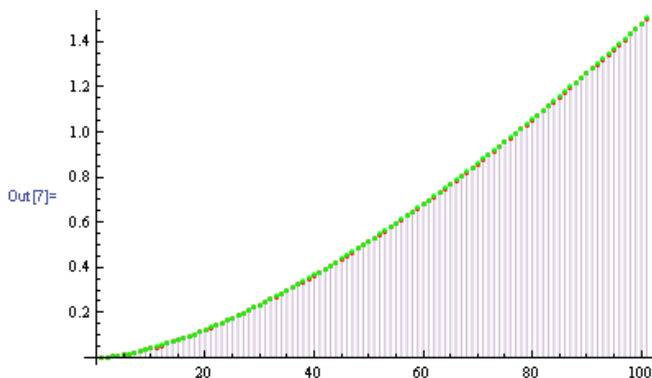


Рис.3.18. Полупроизводные функции  $t^2$

**Пример3.2.** Проинтегрировать численно функцию  $\sqrt{t}$  от 0 до  $t$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 1$  с порядком 1.5.

Для интегрирования используем те же формулы Грюнвальда-Летникова и (3.2), заменив только вид функции и установив порядок дробного дифференцирования  $\beta = -1.5$  (как уже упоминалось выше интегрирование в дробном математическом анализе интерпретируется как дифференцирование с отрицательным порядком).

Задание функции:

In[1]:= **f[t\_] :=  $\sqrt{t}$ ;**

Определение производной дробного порядка по формуле Грюнвальда – Летникова:

In[2]:= **f $\beta$ [a\_, m\_,  $\beta$ \_, t\_] :=**

$$\frac{1}{\left(\frac{t-a}{m}\right)^{\beta}} * \sum_{j=0}^{m-1} \left( (-1)^j * \text{Binomial}[\beta, j] * f\left[t-j * \frac{t-a}{m}\right] \right);$$

Задание параметров формулы:

In[3]:= **f $\beta$ 1 = f $\beta$ [0, 100, -1.5, t];**

Построение массива значений производной порядка 1.5 на выбранной сетке:

In[4]:= **F1 = Table[f $\beta$ 1, {t, 0, 1, 0.01}]**

Out[4]= {0., 0.0000449544, 0.000179818, 0.00040459,  
0.000719271, 0.00112386, 0.00161836, 0.00220277,  
0.00287708, 0.00364131, 0.00449544, 0.00543949,  
0.00647344, 0.0075973, 0.00881107, 0.0101147,  
0.0115083, 0.0129918, 0.0145652, 0.0162285,  
0.0179818, 0.0198249, 0.0217579, 0.0237809,  
0.0258937, 0.0280965, 0.0303892, 0.0327718,  
0.0352443, 0.0378067, 0.040459, 0.0432012,  
0.0460333, 0.0489554, 0.0519673, 0.0550692,  
0.0582609, 0.0615426, 0.0649142, 0.0683757,  
0.0719271, 0.0755684, 0.0792996, 0.0831207,  
0.0870318, 0.0910327, 0.0951236, 0.0993043,  
0.103575, 0.107936, 0.112386, 0.116926, 0.121557,  
0.126277, 0.131087, 0.135987, 0.140977, 0.146057,  
0.151227, 0.156486, 0.161836, 0.167275, 0.172805,

```
0.178424, 0.184133, 0.189932, 0.195821, 0.2018,
0.207869, 0.214028, 0.220277, 0.226615, 0.233044,
0.239562, 0.24617, 0.252869, 0.259657, 0.266535,
0.273503, 0.280561, 0.287708, 0.294946, 0.302274,
0.309691, 0.317198, 0.324796, 0.332483, 0.34026,
0.348127, 0.356084, 0.364131, 0.372268,
0.380494, 0.388811, 0.397217, 0.405714, 0.4143,
0.422976, 0.431742, 0.440598, 0.449544}
```

Определение интеграла порядка 1.5 по формуле (3.2):

$$\text{In}[5]:= \mathbf{f\beta 2} = \frac{\mathbf{\Gamma[1.5]} * \mathbf{t^2}}{\mathbf{\Gamma[3]}};$$

Построение таблицы значений полуинтеграла в узловых точках сетки с шагом 0.01:

```
In[6]:= F2 = Table[fβ2, {t, 0, 1, 0.01}]
```

```
Out[6]:= {0., 0.0000443113, 0.000177245, 0.000398802, 0.000708982,
0.00110778, 0.00159521, 0.00217126, 0.00283593, 0.00358922,
0.00443113, 0.00536167, 0.00638083, 0.00748862, 0.00868502,
0.00997005, 0.0113437, 0.012806, 0.0143569, 0.0159964,
0.0177245, 0.0195413, 0.0214467, 0.0234407, 0.0255233,
0.0276946, 0.0299545, 0.032303, 0.0347401, 0.0372658,
0.0398802, 0.0425832, 0.0453748, 0.0482551, 0.0512239,
0.0542814, 0.0574275, 0.0606622, 0.0639856, 0.0673976,
0.0708982, 0.0744874, 0.0781652, 0.0819317, 0.0857868,
0.0897305, 0.0937628, 0.0978838, 0.102093, 0.106392,
0.110778, 0.115254, 0.119818, 0.124471, 0.129212,
0.134042, 0.13896, 0.143968, 0.149063, 0.154248, 0.159521,
0.164883, 0.170333, 0.175872, 0.181499, 0.187215, 0.19302,
0.198914, 0.204896, 0.210966, 0.217126, 0.223373, 0.22971,
0.236135, 0.242649, 0.249251, 0.255942, 0.262722, 0.26959,
0.276547, 0.283593, 0.290727, 0.297949, 0.305261,
0.312661, 0.320149, 0.327727, 0.335393, 0.343147, 0.35099,
0.358922, 0.366942, 0.375051, 0.383249, 0.391535, 0.39991,
0.408373, 0.416925, 0.425566, 0.434296, 0.443113}
```

Совмещение массивов F1, F2 на одном графике с целью сравнения:

```
In[7]:= ListPlot[{F1, F2}, Filling -> Axis,
PlotStyle -> {Red, Green}]
```

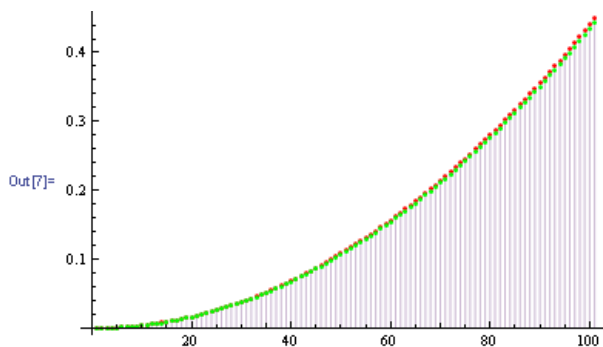


Рис.3.19. Интегралы порядка 1.5 функции  $\sqrt{t}$

Анализ рисунков 3.18 и 3.19 показывает совпадение графиков дробных производных и дробных интегралов, полученных по формулам Грюнвальда-Летникова и по аналитическим формулам дробного дифференцирования степенных функций (3.2).

Сравнение формул численного дифференцирования целых и дробных порядков показывает существенное различие между ними. Так, нахождение первой производной функции по методу конечных разностей требует использования только двух значений функции независимо от шага сетки  $h$ . Количество ординат в линейной комбинации, определяющей аппроксимацию производной  $n$ -го порядка по формулам метода конечных разностей (3.6) не превышает величины  $n + 1$ . Что касается формулы численного дифференцирования дробного порядка Грюнвальда-Летникова, то здесь наблюдается эффект «памяти» предыдущих значений функции: верхний предел суммы в формуле (3.7) зависит от шага сетки  $h$ , возрастая с уменьшением шага. Однако весовые коэффициенты, определяемые соот-

ветствующими биномиальными коэффициентами  $\binom{\beta}{j}$ , имеют

тенденцию к резкому затуханию с увеличением аргумента  $j$ , что позволяет отказаться от учета большого числа слагаемых в сумме (3.13). Этот эффект носит название «короткой памяти» дробных производных и может быть проиллюстрирован графиками рис. 3.20 и 3.21. Сформируем массив значений биномиальных коэффициентов для значений порядков дробного дифференцирования от 0.1 до 4.0 с шагом по порядку 0.1 и числа узлов сетки 40.

```
In[1]:= ListPlot[Table[(-1)^j * Binomial[β, j], {β, 0.1, 4, 0.1},
{ j, 0, 40}], PlotRange -> All]
```

```
In[2]:= ListPlot[Table[(-1)^j * Binomial[β, j], {β, 0.1, 4, 0.1},
  {j, 0, 40}]]
```

Анализ рис. 3.20 и 3.21 показывает, что для выбранного диапазона порядков дробного дифференцирования доля слагаемых с номерами  $j > 20$  не превышает 0.1%. Это позволяет без существенного ущерба для точности аппроксимации дробных производных ограничиться числом слагаемых в формуле (3.13). Необходимо также указать, что несмотря на идентичность формул дробного дифференцирования и дробного интегрирования, этот эффект не имеет места при  $\beta < 0$ .

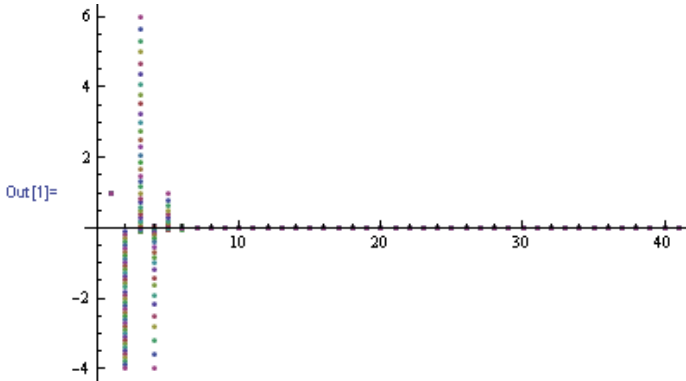


Рис. 3.20 Распределение массива биномиальных коэффициентов для порядков дифференцирования  $0 \leq \beta \leq 4$ , и индекса  $j: 0 \leq j \leq 40$ .

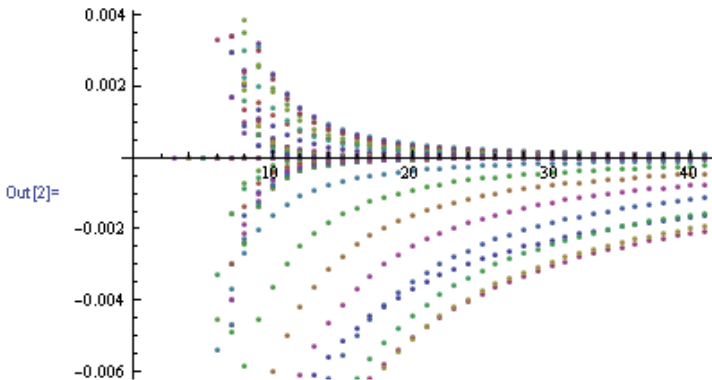


Рис. 3.21. Распределение массива биномиальных коэффициентов для порядков дифференцирования  $0 \leq \beta \leq 4$ , и индекса  $j: 5 \leq j \leq 40$ .

### 3.2.5. Интегральные представления дифферинтегралов нецелых порядков

Другим широко распространенным определением производных и интегралов нецелых порядков является определение Римана-Лиувилля [13,14,18], которое является обобщением на нецелые порядки интегральной формулы Коши, известной из классического математического анализа [1]:

$$\int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_n} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \quad (3.17)$$

Как уже можно было заметить, что с введением производных и интегралов нецелых порядков стирается резкая граница между производными и интегралами: интегралы можно трактовать как производные отрицательного порядка, а производные – как интегралы отрицательного порядка. В математическом анализе нецелых порядков появился новый термин: дифферинтеграл [13]. Обобщение интегральной формулы Коши на нецелые порядки интегро-дифференциальных операторов приводит к следующим определениям дифферинтегралов дробного (нецелого) порядков:

$$I_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau,$$

$$D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad (3.18)$$

где:  $\beta, a \in \mathbf{R}, n-1 < \beta < n$ .

$I_{a,t}^\beta$  -интегральный оператор порядка  $\beta$ ,

$D_{a,t}^\beta$  - дифференциальный оператор порядка  $\beta$ .

Выражения (3.12) и есть упомянутые выше определения Римана-Лиувилля интегралов и производных дробного порядка. Для того, чтобы избежать разночтений в определениях порядков дифференциальных и интегральных операторов нецелых порядков, в дальнейшем будет использован символ производной  $D$ , порядок которого  $\beta$  будет положительным для производной и отрицательным для интеграла соответствующего порядка.

Покажем на примерах применение определения Римана-Лиувилля дифферинтегралов нецелых порядков.

## Степенные функции

Определение степенной функции:

In[1]:=  $f[t_, k_] := t^k;$

Определение интеграла Римана-Лиувилля:

In[2]:=  $d\beta f[a_, n_, \beta_, k_, t_] := \frac{1}{\Gamma[n - \beta]} * D \left[ \int_a^t \frac{f[\tau, k]}{(\tau - t)^{\beta - n + 1}} d\tau, \{t, n\} \right];$

Нахождение производной порядка 1.5 от степенной функции

$t^3$ :

In[3]:=  $y1 = d\beta f[0, 3, 1.5, 3, t]$

Out[3]=  $4.51352 t^{3/2}$

Нахождение производной порядка 0.5 от степенной функции

$t^0$ :

In[4]:=  $y2 = d\beta f[0, 1, 0.5, 0, t]$

Out[4]=  $\frac{0.56419}{\sqrt{t}}$

Нахождение интеграла порядка 1.5 от степенной функции  $t^3$ :

In[5]:=  $y3 = Simplify[d\beta f[0, 0, -1.5, 3, t]]$

Out[5]=  $0. + 0.114629 t^{9/2}$

Использование возможностей символьных вычислений системы Mathematica позволяет в общем виде взять интеграл Римана-Лиувилля для степенной функции и увидеть ограничения на порядки степени, дифференциального оператора, значения нижнего предела и диапазон независимой переменной:

In[6]:=  $d\beta f[a_, n_, \beta_, k_, t]$

Out[6]=  $\frac{1}{\Gamma[n - \beta]} \text{If} \left[ t > 0 \ \&\& \ 0 < a < t \ \&\& \ \text{Re}[n] > \text{Re}[\beta], \right.$   
 $\partial_{(t,n)} \left( t^{k+n-\beta} \left( -\text{Beta} \left[ \frac{a}{t}, 1+k, n-\beta \right] + \frac{\Gamma[1+k] \Gamma[n-\beta]}{\Gamma[1+k+n-\beta]} \right) \right),$   
 $\partial_{(t,n)} \text{Integrate} \left[ (t-\tau)^{-1+n-\beta} t^k, \{\tau, a, t\}, \right.$   
 $\left. \text{Assumptions} \rightarrow (t \in \text{Reals} \ \&\& \ a \geq t) \ || \ a \leq 0 \ || \ t \leq 0 \ || \ \text{Re}[n-\beta] \leq 0 \right]$

## Экспоненциальные функции

Определение экспоненциальной функции:

In[1]:=  $f[t_, k_] := e^{k*t};$

Определение интеграла Римана-Лиувилля:

In[2]:=  $d\beta f[a_, n_, \beta_, k_, t_] := \frac{1}{\Gamma[n - \beta]} * D \left[ \int_a^t \frac{f[\tau, k]}{(\tau - t)^{\beta - n + 1}} d\tau, \{t, n\} \right];$



Нахождение производной порядка 1.5 от экспоненциальной функции  $e^{3t}$  с нижним пределом  $a = -\infty$ :

In[3]:= **y4 = Chop[dβf[-Infinity, 3, 1.5, 3, t]]**

Out[3]=  $5.19615 e^{3t}$

### Синусоидальные функции

Определение синусоидальной функции:

In[1]:= **f[t\_, k\_] := Sin[k \* t];**

Определение интеграла Римана-Лиувилля:

In[2]:= **dβf[a\_, n\_, β\_, k\_, t\_] :=  $\frac{1}{\Gamma[n - \beta]} * D\left[\int_a^t \frac{f[\tau, k]}{(t - \tau)^{\beta - n + 1}} d\tau, \{t, n\}\right];$**

Нахождение интеграла порядка 0.5 от функции  $\text{Sin}(3t)$ :

In[3]:= **y4 = Chop[dβf[0, 0, -0.5, 3, t]]**

Out[3]=  $0.56419 \text{ If}\left[t > 0, 4. t^{1.5} \text{HypergeometricPFQ}\left[\{1\}, \{1.75, 1.25\}, -\frac{9 t^2}{4}\right], \right.$

$\left. \text{Integrate}\left[\frac{\text{Sin}[3 \tau]}{(t - \tau)^{0.5}}, \{\tau, 0, t\}, \text{Assumptions} \rightarrow t \leq 0\right]\right]$

Визуальное отображение полуинтеграла синусоидальной функции:

In[4]:= **Plot[y4, {t, 0, 10.0}]**

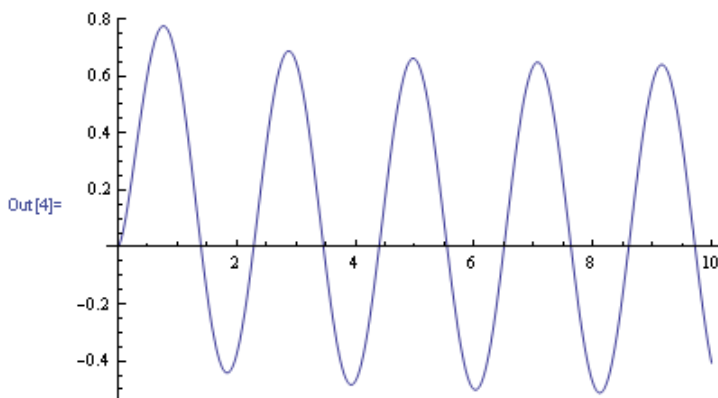


Рис.3.22. Полуинтеграл функции  $\text{Sin}(3t)$

Нахождение полуинтеграла от синусоидальной функции по формулам (1.5):

In[5]:= **y5 =  $3^{-0.5} * \text{Sin}\left[3 t - \frac{\pi}{4}\right];$**

Совмещение на одном графике полученных полуинтегралов:

```
In[6]:= Plot[{y4, y5}, {t, 0, 10.0}]
```

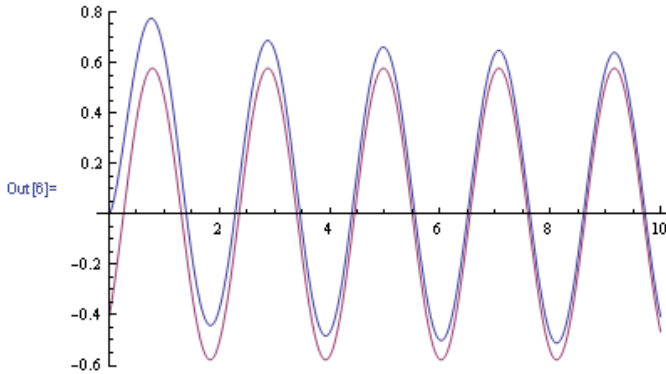


Рис.3.23. Совмещенные графики полуинтегралов синусоидальной функции, вычисленные без учета периодичности и с учетом периодического характера функции.

Расхождение графиков полуинтегралов, полученных по различным подходам, отражают эффект памяти операций дробного дифференцирования. При больших значениях аргумента, переходные составляющие затухают и кривые должны асимптотически приближаться друг к другу. Этот эффект можно наблюдать на параметрическом графике типа фазового портрета, где роль параметрического аргумента выполняет  $t$ :

```
In[9]:= ParametricPlot[{y4, y5}, {t, 0, 20}]
```

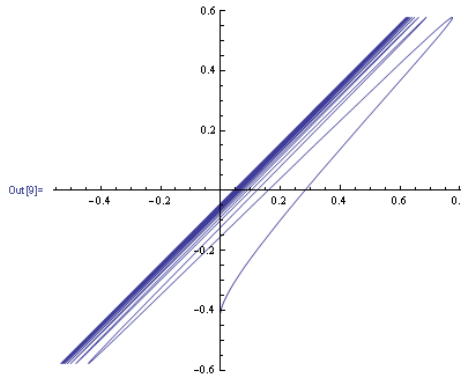


Рис.3.24а. Параметрический график  $y_4(y_5)$ ,  $0 \leq t < 20$

```
In[10]:= ParametricPlot[{y4, y5}, {t, 200, 204}, PlotRange -> All]
```

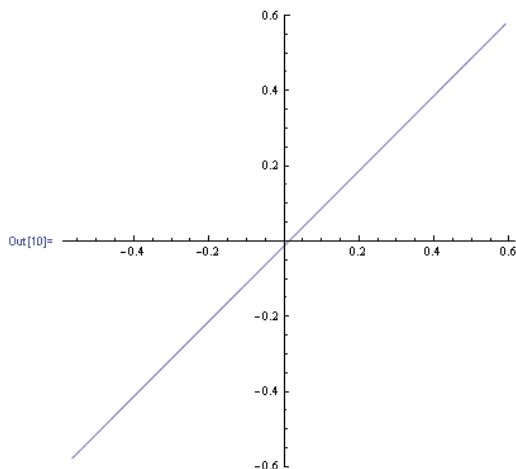


Рис.3.24б. Параметрический график  $y_4(y_5)$ ,  $200 \leq t < 204$

Анализ двух последних рисунков показывает, что графики полуинтегралов асимптотически сближаются при больших значениях аргумента  $t$ .

Рассмотренные определения производных и интегралов нецелых порядков не являются единственными. Известны также определения интегро-дифференциальных операторов по Вейлю, Капуто и др.[14]. Наибольший интерес для практических приложений представляет определение производных нецелого порядка по Капуто. Оно отличается от определения Римана-Лиувилля тем, что функция сначала подвергается дифференцированию с наименьшим целым порядком  $n$ , превышающим нецелый порядок  $\beta$ , а затем результат интегрируется с порядком  $n-\beta$ :

$${}_C D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\beta - n + 1}} d\tau, \quad (3.19)$$

где:  $\beta, a \in \mathbf{R}, n - 1 < \beta < n$ .

В интеграле Римана-Лиувилля сначала производится интегрирование, а затем дифференцирование (см. (3.18)). Преимуществом определения дробной производной по Капуто является более естественное для практических приложений решение проблемы начальных условий при решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков.

Необходимо отметить, что использовать сходство формул следует с большой осторожностью, поскольку свойства производных (как и интегралов) нецелого порядка существенно отличаются от их

целочисленных аналогов. Так, известно, что целочисленные производные констант тождественно равны нулю. Однако, в общем случае, производные дробных порядков по Риману-Лиувиллю от констант являются функциями соответствующих аргументов (например, времени).

Теперь мы продолжим рассмотрение свойств дифференциалов нецелого порядка в сопоставлении с их целочисленными аналогами.

### 3.2.6. Свойства дифференциалов нецелых порядков

#### А. Линейность

Интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков являются линейными операторами, так же как и их целочисленные аналоги. Для операций дифференцирования с целым порядком, как известно, справедлива формула:

$$\frac{d^m}{dt^m} \left( \sum_{k=1}^n b_k f_k(t) \right) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^m}{dt^m} (f_k(t)), \quad (3.20)$$

где  $m$  – целое. Для производных дробного порядка имеем аналогичное соотношение (3.21), отмечая, что  $\beta$  – дробное и  $D_{a,t}^\beta$  – символ дробной производной порядка  $\beta$ :

$$D_{a,t}^\beta \left( \sum_{k=1}^n b_k f_k(t) \right) = \sum_{k=1}^n b_k D_{a,t}^\beta (f_k(t)). \quad (3.21)$$

Линейность операций интегрирования выражена аналогичными соотношениями.

Так, для кратных интегралов целого порядка  $m$ :

$$\int_a^{t_m} \int_a^{t_m} \cdots \int_a^{t_2} \left( \sum_{k=1}^n b_k f_k(t_1) \right) dt_1 dt_2 \cdots dt_m = \sum_{k=1}^n b_k \int_a^{t_m} \int_a^{t_m} \cdots \int_a^{t_2} f_k(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_m. \quad (3.22)$$

Для интегралов дробного порядка фактически справедлива формула (3.21) с учетом того, что порядок дифференцирования взят отрицательным ( $\beta < 0$ ):

$$D_{a,t}^{-\beta} \left( \sum_{k=1}^n b_k f_k(t) \right) = \sum_{k=1}^n b_k D_{a,t}^{-\beta} (f_k(t)). \quad (3.23)$$

Формулы (3.20 – 3.23) объединяют два свойства линейности операторов дифференцирования и интегрирования: константа ( $b_k$ ) может быть вынесена за знак дифференцирования (интегрирования), и производная (интеграл) суммы функций равна сумме производных (интегралов) функций того же порядка.

### В. Правила дифференцирования (интегрирования) произведения двух функций

В классическом математическом анализе хорошо известно правило взятия первой производной от произведения двух функций:

$$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \frac{df(x)}{dx} \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}. \quad (3.24)$$

Обобщение этого правила на произвольные целые порядки дифференцирования также хорошо известно под названием правила Лейбница[13]:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{d^{n-i} f(x)}{dx^{n-i}} \cdot \frac{d^i \varphi(x)}{dx^i}. \quad (3.25)$$

При переходе к кратным интегралам соответствующее выражение для кратного интеграла произведения двух функций, полученное с помощью формулы интегрирования по частям, имеет вид[13]:

$$\frac{d^{-n}(f(x) \cdot \varphi(x))}{[d(x-a)]^{-n}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} \frac{d^{-n-i} f(x)}{[d(x-a)]^{-n-i}} \cdot \frac{d^i \varphi(x)}{[d(x-a)]^i}. \quad (3.26)$$

В формуле (3.26) интеграл кратности  $n$  обозначен как производная соответствующего отрицательного порядка, а интегрирование проводится в пределах от  $a$  до  $x$ .

Формулы (3.25) и (3.26) обобщаются на произвольные нецелые порядки интегрирования. Так как при  $i > n$   $\binom{n}{i} \equiv 0$ , верхний предел суммы в формуле (3.25) может быть заменен на  $\infty$ . Таким образом, диферинтеграл произвольного порядка  $\beta$  вычисляется по формуле:

$$\frac{d^\beta(f(x) \cdot \varphi(x))}{[d(x-a)]^\beta} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} \frac{d^{\beta-i} f(x)}{[d(x-a)]^{\beta-i}} \cdot \frac{d^i \varphi(x)}{[d(x-a)]^i} \quad (3.27)$$

### С. Правила композиции интегро-дифференциальных операций

Правила композиции интегро-дифференциальных операций предусматривают соотношения между  $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left( \frac{d^\beta f(x)}{dx^\beta} \right)$ ,

$\frac{d^\beta}{dx^\beta} \left( \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)$  и  $\frac{d^{\alpha+\beta} f(x)}{dx^{\alpha+\beta}}$  при различных сочетаниях порядков

операторов  $\alpha$  и  $\beta$  (целых и дробных, положительных и отрицательных). Подразумевается, что функции допускают дифференцирование и интегрирование соответствующих порядков. Кроме того, при дробных значениях порядка оператора необходимо учитывать еще и значения нижнего предела интегрирования (ранее обозначенного через  $a$ ).

Классический математический анализ целых порядков интегро-дифференциальных операторов дает следующие правила композиции операторов.

- Оба порядка целые и одного знака ( $\alpha = \pm m$ ,  $\beta = \pm n$ ,  $m > 0$ ,  $n > 0$ ):

$$\frac{d^{+m}}{dx^{+m}} \left( \frac{d^{+n} f(x)}{dx^{+n}} \right) = \frac{d^{+n}}{dx^{+n}} \left( \frac{d^{+m} f(x)}{dx^{+m}} \right) = \frac{d^{+m+n} f(x)}{dx^{+m+n}},$$

$$\frac{d^{-m}}{dx^{-m}} \left( \frac{d^{-n} f(x)}{dx^{-n}} \right) = \frac{d^{-n}}{dx^{-n}} \left( \frac{d^{-m} f(x)}{dx^{-m}} \right) = \frac{d^{-m-n} f(x)}{dx^{-m-n}}. \quad (3.28)$$

В выражениях (3.28) с целью упрощения записи опущен нижний предел интегрирования  $a$ , что существенно при отрицательных значениях порядков операторов.

- Сначала осуществляется интегрирование (порядок  $-n$ ), а затем дифференцирование (порядок  $+m$ ):

$$\frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{d^{-n} f(x)}{dx^{-n}} \right) = \frac{d^{m-n} f(x)}{dx^{m-n}}. \quad (3.29)$$

- Первым выполняется дифференцирование (порядок  $+n$ ), а затем интегрирование (порядок  $-m$ ):

$$\frac{d^{-m} f(x)}{[d(x-a)]^{-m}} \left( \frac{d^{+n} f(x)}{[d(x-a)]^{+n}} \right) = \frac{d^{n-m} f(x)}{[d(x-a)]^{n-m}} - \sum_{i=m-n}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i+n-m)}(a), \quad (3.30)$$

где  $f^{(i+n-m)}(a)$  - значение производной соответствующего порядка функции  $f$  на нижнем пределе  $a$  изменения аргумента  $x$ .

Таким образом, в последнем случае должны быть учтены начальные значения производных.

Перейдем теперь к правилам композиции интегро-дифференциальных операторов произвольных порядков. Здесь мы ограничимся случаями, когда эти операторы определены по Риману-Лиувиллю

виллю. Исследования и доказательства правил композиции интегро-дифференциальных операторов содержатся в опубликованных работах многих исследователей [13, 14, 18]. Мы приводим их без доказательств, в большинстве случаев, следуя работам А.В.Летникова [2 - 4].

Сначала предположим, что один из операторов является целым.

- а) Целочисленная производная порядка  $r$  от производной функции  $f(t)$  порядка  $\beta$ :

$$\frac{d^r}{dt^r} (D_{a,t}^\beta (f(t))) = D_{a,t}^{\beta+r} (f(t)) \quad (3.31)$$

- б) Производная порядка  $\beta$  от целочисленной производной функции  $f(t)$  порядка  $r$ :

$$D_{a,t}^\beta \left( \frac{d^r f(t)}{dt^r} \right) = \frac{d^r}{dt^r} (D_{a,t}^\beta (f(t))) - \sum_{i=0}^{i=r-1} \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{-\beta-r+i}}{\Gamma(-\beta-r+i+1)} \quad (3.32)$$

Анализ выражений (3.31) и (3.32) показывает, что в общем случае указанные два оператора не являются коммутативными и лишь при выполнении условий:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(a) &= 0, \\ i &= 0, 1, \dots, r-1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

эти операции эквивалентны:

$$D_{a,t}^\beta \left( \frac{d^r f(t)}{dt^r} \right) = \frac{d^r}{dt^r} (D_{a,t}^\beta (f(t))) = D_{a,t}^{\beta+r} (f(t)) \quad (3.34)$$

Рассмотрим теперь варианты правил композиции операторов, когда оба они являются нецелыми (в том числе комплексными).

- с) Порядок первого оператора ( $\beta$ ) удовлетворяет условию  $\operatorname{Re}(\beta) < 0$ , порядок второго оператора ( $\alpha$ ) не имеет ограничений:

$$D_{a,t}^\alpha (D_{a,t}^\beta f(t)) = D_{a,t}^{\alpha+\beta} (f(t)) \quad (3.35)$$

- д) Порядок первого оператора ( $\beta$ ) удовлетворяет условию  $0 \leq m-1 < \operatorname{Re}(\beta) < m$ . В этом случае результат применения второго оператора ( $\alpha$ ) будет конечным только при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(a) &= 0, \\ i &= 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (3.36)$$

е) Если порядки операторов удовлетворяют ограничениям:

$$\begin{aligned} 0 \leq m-1 < \operatorname{Re}(\beta) < m, \\ 0 \leq n-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < n, \end{aligned} \quad (3.37)$$

а значения функции и ее производных на левой границе интервала изменения аргумента ( $a$ ) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(a) = 0, \\ i = 0, 1, \dots, \max(m, n) - 1, \end{aligned} \quad (3.38)$$

то справедливы следующие правила композиции операторов:

$$D_{a,t}^{\alpha} (D_{a,t}^{\beta} (f(t))) = D_{a,t}^{\beta} (D_{a,t}^{\alpha} (f(t))) = D_{a,t}^{\alpha+\beta} (f(t)). \quad (3.39)$$

Правила композиции интегродифференциальных операторов играют важную роль при решении соответствующих дифференциальных уравнений и построении математических и компьютерных моделей динамических систем.



### Список литературы к Главе 3

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Наука. – 1977. – 832 с.
2. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. Сб. – 1868. – т. 3, вып.1. – С. 1–68.
3. Летников А.В. Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем // Матем. Сб. – 1868. – т. 3, вып.1. – С. 85–112.
4. Летников А.В. К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем (по поводу статьи Н.Я.Сонины) // Матем. Сб. – 1872. – т. 6, вып.4. – С. 413–445.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. – 1987 г. – 688 с.
6. On Fractional Calculus and Its Applications // Research Institute for Mathematical Sciences, Vol. 412. -- Kyoto University, Kyoto, Japan, January, 1981. – 80 p.
7. "Fractional Calculus & Applied Analysis" – An International Journal for Theory and Applications, ISSN 1311-0454.
8. Fractional Differentiation and its Applications (FDA04), July 19-20, 2004, Bordeaux, France.
9. "Fractional Signal Processing and Applications" //Special Issue of Signal Processing. – 2003. – Vol. 83, No 11. – p.p. 2285-2480.
10. Hilfer R. (Ed.) Applications of Fractional Calculus in Physics. – World Scientific, 2000. – 463 p.
11. Nishimoto Katsuyuki (Ed.) Fractional Calculus and Its Applications // Proc. of the International Conf. held at the Center of Nihon University, Tokyo, May 29 – June 1, 1989 // College of Engineering, Nihon University, Japan, 1990. – 284 p.
12. Nishimoto Katsuyuki Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus in the 21<sup>st</sup> Century), Vol. IV. – Desearthes Press Co., 1991. – 158 p.
13. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. – Academic Press, 1974. – 234 p.
14. Podlubny I. Fractional Differential Equations//Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198. – Academic Press, 1999. – 340 p.
15. Ross Bertram (Ed.) Fractional Calculus and Its Applications // Proc. of the International Conf. held at the University of New Haven, June 1974 // Lecture Notes in Mathematics, Vol. 457. – Springer-Verlag, 1975. – 381 p.
16. Ross Bertram .The development of Fractional Calculus 1695-1900 // Historia Mathematica, 4, 1977, P. 75--89.

17. West J. Bruce, Bologna Mauro, Grigolini Paolo Physics of Fractal Operators. – Springer – Verlag, 2003. – 354 p.
18. 2<sup>nd</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (IFAC FDA'06), July 19-21, 2006, Porto, Portugal.

## Глава 4. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ

### 4.1. О классификации уравнений и существующих методов их решения

Интегро-дифференциальными уравнениями нецелых порядков по аналогии с классическим анализом называются уравнения, связывающие между собой функции, их производные и интегралы различных порядков:

$$\begin{aligned} R(x(t), {}_0D_t^{\beta_i} x(t), f(t)) &= 0, \\ i &:= 1, \dots, m; \beta_i \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Линейные интегро-дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами имеют вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i(t) \cdot {}_0D_t^{\beta_i} x(t) &= f(t), \\ n \geq \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_m, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $n$  – ближайшее целое число, больше, чем  $\beta_1$ . Уравнения (4.1) и (4.2) при их решении должны быть дополнены соответствующими начальными или краевыми условиями. Кроме того, должен быть конкретизирован тип интегро-дифференциального оператора (Римана-Лиувилля, Капуто и т.п.).

Так же, как и в классическом математическом анализе, различают обыкновенные дифференциальные уравнения (системы уравнений), для которых искомые решения являются функциями одного аргумента (времени или других независимых переменных) и дифференциальные уравнения в частных производных, решения которых зависят от нескольких независимых переменных (времени, пространственных координат, или и того, и другого).

Классификация интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков (дробные дифференциальные уравнения) в силу их особенностей и относительной новизны разработки методов решений заметно отличается от классификации уравнений целых порядков. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробных порядков разделяют на линейные и нелинейные, с постоянными и переменными коэффициентами, однородные и неоднородные, а также в отличие от классического анализа на одночленные, двучленные и

многочленные [15], по числу производных и (или) интегралов различных нецелых порядков. Что касается дифференциальных уравнений в частных производных, то наличие интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков частично разрушает сложившуюся в классическом анализе классификацию уравнений. Известно [1, 3, 9], что установившаяся классификация дифференциальных уравнений в частных производных рассматривает уравнения первого, второго и высших порядков. Уравнения второго порядка подразделяются на эллиптические, параболические и гиперболические в зависимости от значений коэффициентов уравнений. В случае линейных уравнений эллиптического типа производные по времени отсутствуют, а порядок по пространственным переменным равен двум. Линейные уравнения параболического типа включают производные по времени первого порядка, а по пространственным переменным второго порядка. Линейные уравнения гиперболического типа содержат производные и по времени и по пространственным переменным второго порядка. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков, в зависимости от значений дробного порядка временной производной, относят к параболическим (диффузионным), если порядок дробной производной изменяется между нулем и единицей, или к гиперболическим (волновым), в случае изменения порядка производной между единицей и двойкой. Чаще такие уравнения называют диффузионно-волновыми [13].

Для решения интегро-дифференциальных уравнений дробных порядков, так же как и в классическом анализе, применяются следующие методы:

- Аналитические (в основном для ограниченного класса линейных уравнений),
- Численные методы, аналогичные методам конечных разностей и римановых сумм,
- Численные методы, основанные на представлении функций рядами или ортогональными полиномами,
- Операционные методы, основанные на интегральных преобразованиях, в частности, типа преобразований Лапласа, Фурье и т.п.

Аналитические методы применяют в том случае, если удастся найти соответствующую функцию Грина для рассматриваемого уравнения. Чаще всего, решения уравнений в этом случае включают в себя комбинацию функций Миттаг-Лефлера, являющихся обобщением экспоненциальной функции.

Численные методы базируются на определении дробных производных по формулам Грюнфвальда - Летникова [14], которые являются,

как упоминалось выше, обобщением формул конечных разностей и римановых сумм, либо на использовании представления решений бесконечными рядами.

Применение классического операционного исчисления Лапласа к дифференциальным уравнениям дробного порядка приводит к характеристическим уравнениям иррационального типа и возможно лишь для линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

В данной работе основное внимание будет уделено применению неклассических операционных исчислений на основе представления сигналов и решений обобщенными полиномами с различными системами базисных функций. С известными методами решения интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков можно познакомиться из работ [14-16].

Методы аппроксимации сигналов обобщенными полиномами, рассмотренные в главе 1, и неклассические операционные исчисления (S- преобразования), развитые на их основе, могут применяться и для приближенного решения уравнений нецелых порядков. Рассмотрение начнем с вывода операционного аналога операции дробного интегрирования.

## 4.2. Операционная матрица интегрирования дробного порядка

Для операции дробного интегрирования с порядком  $\beta$  по Риману-Лиувиллю:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (4.3)$$

операционный аналог в области изображений имеет вид:

$$\bar{Y} = \bar{P}_s^\beta \cdot \bar{X}, \quad (4.4)$$

где:  $\bar{P}_s^\beta$  - операционная матрица интегрирования, вывод которой можно выполнить следующим образом. В выражение (4.3) подинтегральная функция  $x(t)$  и результат интегрирования  $y(t)$  заменяются их аппроксимациями:

$$\bar{S}^*(t) \cdot \bar{Y} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\bar{S}^*(\tau) \cdot \bar{X}}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau. \quad (4.5)$$

Так как вектор  $\bar{\mathbf{X}}$  не зависит от переменной интегрирования, он может быть вынесен за символ интегрирования:

$$\bar{\mathbf{S}}^*(t) \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\bar{\mathbf{S}}^*(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \cdot \bar{\mathbf{X}} \quad (4.6)$$

В правой части (4.6) первым сомножителем матричного произведения является вектор-строка интегралов дробного порядка базисных функций, элементы которой являются функциями времени. Если их аппроксимировать полиномами в той же системе базисных функций и сгруппировать полученные полные вектора коэффициентов этих полиномов в матрицу, (4.6) примет следующий вид:

$$\bar{\mathbf{S}}^*(t) \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{S}}^*(t) \cdot \bar{\mathbf{P}}_s^\beta \cdot \bar{\mathbf{X}}. \quad (4.7)$$

Столбцы операционной матрицы интегрирования являются векторами коэффициентов аппроксимирующих полиномов для интегралов дробного порядка образующих функций. Ограничившись блочно-импульсной системой базисных функций и опуская промежуточные вычисления, связанные с дробным интегрированием базисных функций, приведем выражения для коэффициентов матрицы  $p_{ij}$  [6]:

$$p_{ij} = \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \left\{ \begin{array}{l} 0, i < j, \\ 1, i = j, \\ (i-j+1)^{\beta+1} - 2(i-j)^{\beta+1} + (i-j-1)^{\beta+1}, i > j \end{array} \right\}, \quad (4.8)$$

$i, j := 1, 2, \dots, m$ .

В выражении (4.8) обозначены:

$h$  – длительность импульса базисной функции (шаг по аргументу),

$i, j$  – индексы строки и столбца матрицы  $\bar{\mathbf{P}}_s^\beta$ ,

$m$  – количество функций в базисной системе (порядок полинома).

Матрицы, с элементами вида (4.8), являются матрицами специального вида, так как их элементы зависят от разности индексов строки и столбца. Такие матрицы называются теплицевыми. У теплицевых матриц элементы, расположенные на одной диагонали, одинаковы. Кроме того, в нашем случае они являются также нижними треугольными. Это позволяет ввести вместо индексов  $i, j$  их разность  $r=i-j$  и рассматривать (4.8) как вектор с  $m$  элементами вида:

$$p_r = \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta + 2)} \left\{ \begin{array}{l} 0, r < 0, \\ 1, r = 0, \\ (r + 1)^{\beta+1} - 2r^{\beta+1} + (r - 1)^{\beta+1}, r > 0 \end{array} \right\}, \quad (4.9)$$

$$|r| := 0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

Необходимо отметить, что формулами (4.8), (4.9) определяются также операционные матрицы интегрирования целых порядков. Для этого достаточно вместо дробных значений  $\beta$  подставить целочисленные порядки интегрирования.

Программа, генерирующая операционные матрицы интегрирования различных порядков, приведена ниже.

**Программа – генератор операционных матриц интегрирования**

```

• Задание параметров матриц:
ln[1]:= h = 0.1; m = 10;
• Определение блочно-импульсной функции:
ln[2]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h <= t < i * h, 1, 0];
• Формирование системы базисных функций:
ln[3]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];
• Определение элементов операционной матрицы:
ln[4]:= p[beta_, i_, j_, h_] :=
    h^beta / Gamma[beta + 2] *
    If[i < j, 0, If[i == j, 1, (i - j + 1)^(beta+1) - 2 (i - j)^(beta+1) + (i - j - 1)^(beta+1)]];
• Формирование операционной матрицы интегрирования:
ln[5]:= P[beta_] := Table[p[beta, i, j, h], {i, m}, {j, m}];

```

Изменяя значения параметров, можно сформировать с помощью этой программы операционные матрицы интегрирования целых и дробных порядков для различных порядков базисной системы и шага по аргументу  $h$ .

С целью иллюстрации в приложении 2.1 к данной главе приведены операционные матрицы интегрирования различных целых и дробных порядков.

### 4.3. Лине́йные интегральные уравнения нецелых и смешанных порядков

Если в интегродифференциальном уравнении все порядки производных искомой функции меньше нуля, мы имеем дело с интегральным уравнением. Такое уравнение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^n {}_0D_t^{-\beta_k} (a_k(t) \cdot y(t)) = f(t), \quad (4.10)$$

где:  $a_k(t)$  - переменные коэффициенты,

$f(t)$  - известная функция,

$\beta_k$  - порядки интегральных операторов (неотрицательны),

Переменные коэффициенты и правая часть уравнения являются функциями, допускающими дифференцирование и интегрирование соответствующих порядков.

В соответствии с правилами спектральной алгебры операционного исчисления уравнению (4.10) в операционной области соответствует следующее алгебраическое уравнение в матричной форме:

$$\sum_{k=1}^n P_s^{\beta_k} \cdot (\bar{A}_k \otimes \bar{Y}) = \bar{F}, \quad (4.11)$$

Решением этого уравнения является вектор  $\bar{Y}$ , а последующий переход в область оригиналов дает аппроксимацию решения интегрального уравнения:

$$y_a(t) = \bar{Y}^* \cdot \bar{S}(t) \quad (4.12)$$

**Пример 4.1.** Определить аппроксимацию сигнала, заданного интегральным уравнением:  ${}_0D_t^{-0.5} y(t) = f(t)$  для  $f(t) = 5t^2$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 2$ .

Операционный аналог этого уравнения будет иметь вид:

$$P_s^{0.5} \cdot \bar{Y} = \bar{F},$$

$$y_a(t) = \bar{Y}^* \cdot \bar{S}(t),$$

где:  $P_s^{0.5}$  - операционная матрица интегрирования порядка 0.5,

$\bar{F}$  - изображение сигнала  $f(t)$ ,

$\bar{S}(t)$  - система базисных функций.



### Программа

- Задание сигнала  $f(t)$ :  
`ln[1]:= f[t_] := 5 t2;`
- Задание параметров базисной системы функций:  
`ln[2]:= h = 0.05; m = 40;`
- Формирование базисной системы функций:  
`ln[3]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];`
- `ln[4]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];`
- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:  
`ln[5]:= p[β_, i_, j_, h_] :=`  

$$\frac{h^\beta}{\Gamma[\beta + 2]} * \text{If}[i < j, 0, \text{If}[i == j, 1, (i - j + 1)^{\beta+1} - 2 (i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}]];$$
- `ln[6]:= P[β_] := Table[p[β, i, j, h], {i, m}, {j, m}];`
- Вычисление операционной матрицы интегрирования порядка 0.5:  
`ln[7]:= P05 := P[0.5];`
- Определение изображения сигнала  $f(t)$ :  
`ln[8]:= F := Table[ $\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt$ , {i, m}];`
- Нахождение изображения решения в операционной области:  
`ln[9]:= Y := Inverse[P05].F;`
- Определение аппроксимации решения уравнения:  
`ln[10]:= ya = Y.S;`
- Формирование точного решения уравнения:  
`ln[11]:= Y =  $\frac{5 \Gamma[3]}{\Gamma[2.5]} * t^{1.5}$ ;`
- Визуализация точного решения и его аппроксимации:  
`ln[12]:= Plot[{Y, ya}, {t, 0, 2}]`

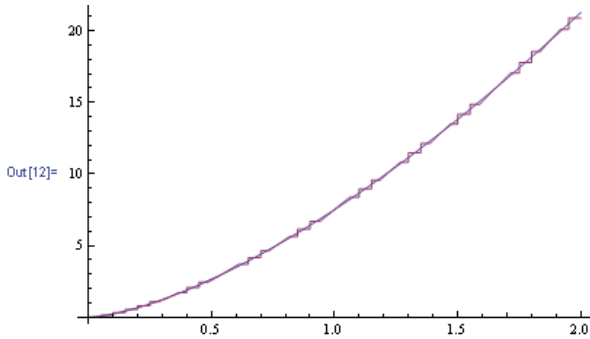


Рис.4.1. Аппроксимация решения, совмещенная с точным решением

**Пример 4.2.** Определить аппроксимацию сигнала, заданного интегральным уравнением:

$${}_0D_t^{-0.5}y(t) + 2{}_0D_t^{-0.75}y(t) + 2y(t) = f(t)$$

для  $f(t) = 5e^{-2t} \text{Sin}(\pi t)$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 2$ .

Операционный аналог этого уравнения будет иметь вид:

$$(\mathbf{P}_s^{0.5} + 2\mathbf{P}_s^{0.75} + 2\mathbf{E}) \cdot \vec{\mathbf{Y}} = \vec{\mathbf{F}},$$

$$y_a(t) = \vec{\mathbf{Y}}^* \cdot \vec{\mathbf{S}}(t)$$

где:  $\mathbf{P}_s^{0.5}$  - операционная матрица интегрирования порядка 0.5,

$\mathbf{P}_s^{0.75}$  - операционная матрица интегрирования порядка 0.75,

$\vec{\mathbf{F}}$  - изображение сигнала  $f(t)$ ,

$\vec{\mathbf{S}}(t)$  - система базисных функций.

### Программа

- Задание сигнала  $f(t)$ :

```
In[1]:= f[t_] := 5 Exp[-2 t] * Sin[π * t];
```

- Задание параметров базисной системы функций:

```
In[2]:= h = 0.01; m = 200;
```

- Задание единичной матрицы порядка  $m$ :

```
In[3]:= Em = IdentityMatrix[m];
```

- Формирование базисной системы функций:

```
In[4]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
```

```
In[5]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];
```

- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:

```
In[6]:= p[β_, i_, j_, h_] :=
      h^β
      ----- *
      Gamma[β + 2]
      If[i < j, 0,
        If[i == j, 1, (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)]];

```

```
In[7]:= P[β_] := Table[p[β, i, j, h], {i, m}, {j, m}];

```

- Вычисление операционных матриц интегрирования порядков 0.5 и 0.75:

```
In[8]:= P05 = P[0.5]; P075 = P[0.75];

```

- Определение изображения сигнала  $f(t)$ :

```
In[9]:= F := Table[1/h * Integrate[f[t] dt, {t, (i-1)*h, i*h}], {i, m}];

```

- Нахождение изображения решения в операционной области:

```
In[10]:= Y = Inverse[P05 + P075 + Em].F;

```

- Определение аппроксимации решения уравнения:

```
In[11]:= ya = Y.S;

```

- Визуализация аппроксимации решения:

```
In[12]:= Plot[ya, {t, 0, 2}]

```

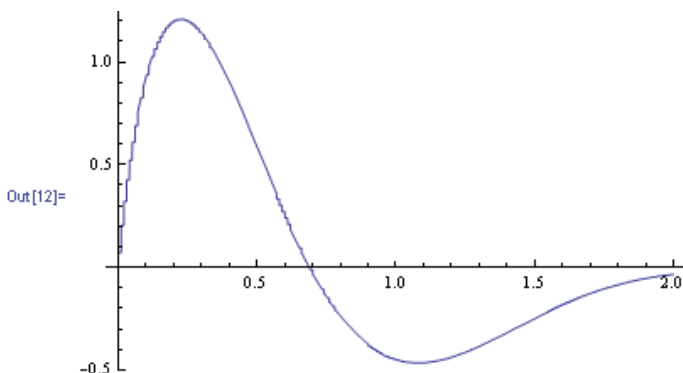


Рис.4.2а. Аппроксимация решения уравнения

- Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:

```
In[13]:= ListPlot[Y]

```

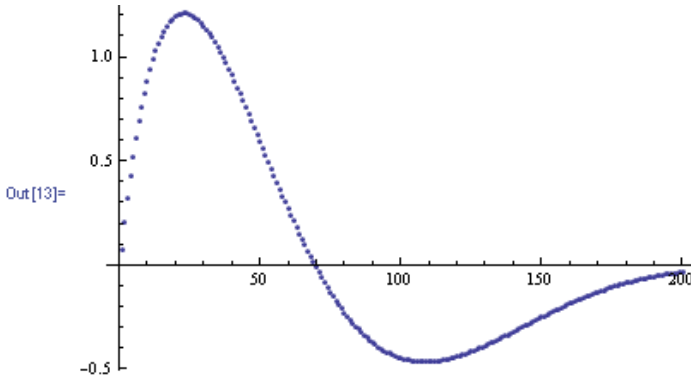


Рис.4.2b. Аппроксимирующий спектр решения

**Пример 4.3.** Определить аппроксимацию решения интегрального уравнения:

$$\int_0^t y(\tau) d\tau + {}_0D_t^{-0.5} y(t) + 2y(t) = f(t)$$

для  $f(t) = e^{-t^2} \sin(\pi t)$  на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 2$ .

Операционный аналог этого уравнения будет иметь вид:

$$(\mathbf{P}_s^1 + \mathbf{P}_s^{0.5} + 2\mathbf{E}) \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{F}},$$

$$y_a(t) = \bar{\mathbf{Y}}^* \cdot \bar{\mathbf{S}}(t)$$

где:  $\mathbf{P}_s^{0.5}$  - операционная матрица интегрирования порядка 0.5,

$\bar{\mathbf{F}}$  - изображение сигнала  $f(t)$ ,

$\bar{\mathbf{S}}(t)$  - система базисных функций.

### Программа

- Задание сигнала  $f(t)$ :

```
In[1]:= f[t_] := Exp[-t^2];
```

- Задание параметров базисной системы функций:

```
In[2]:= h = 0.04; m = 50;
```

- Задание единичной матрицы порядка  $m$ :

```
In[3]:= Em = IdentityMatrix[m];
```

- Формирование базисной системы функций:

In[4]:=  $v[t_, i_, h_] := \text{If}[(i - 1) * h \leq t < i * h, 1, 0];$

In[5]:=  $S = \text{Table}[v[t, i, h], \{i, m\}];$

- Определение операционной матрицы интегрирования дробного и целого порядков:

In[6]:=  $p[\beta_, i_, j_, h_] :=$

$$\frac{h^\beta}{\text{Gamma}[\beta + 2]} * \text{If}[i < j, 0, \text{If}[i == j, 1, (i - j + 1)^{\beta+1} - 2(i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}]]];$$

In[7]:=  $P[\beta_] := \text{Table}[p[\beta, i, j, h], \{i, m\}, \{j, m\}];$

- Вычисление операционных матриц интегрирования порядков 0.5 и 1.0:

In[8]:=  $P05 = P[0.5]; P1 = P[1];$

- Определение изображения сигнала  $f(t)$ :

In[9]:=  $F := \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt, \{i, m\}\right];$

- Нахождение изображения решения в операционной области:

In[10]:=  $Y = \text{Inverse}[P05 + P1 + Em].F;$

- Определение аппроксимации решения уравнения:

In[11]:=  $ya = Y.S;$

- Визуализация аппроксимации решения:

In[12]:=  $\text{Plot}[ya, \{t, 0, 2\}]$

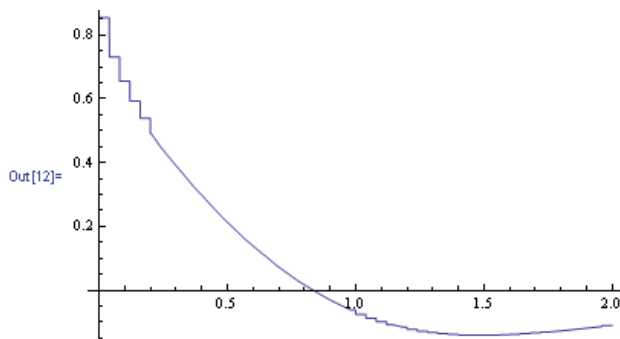


Рис.4.3а.Аппроксимация решения уравнения

- Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:

```
In[13]:= ListPlot[Y]
```

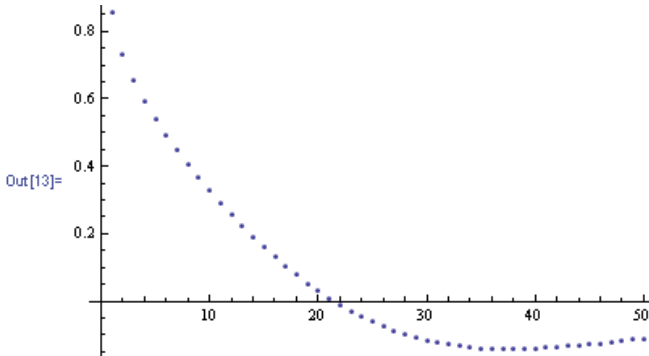


Рис.4.3б.Аппроксимирующий спектр решения

#### 4.4. Линейные интегро-дифференциальные уравнения нецелых и смешанных порядков

Линейные интегро-дифференциальные уравнения, включающие в себя дифференциальные операторы нецелого порядка с постоянными и переменными коэффициентами вида (4.2), являются весьма распространенным видом уравнений и часто встречаются в математическом анализе и множестве приложений в естественных и технических науках. Применение для их решения операционных методов связано с рядом преобразований уравнений, преследующих цель избежать использования дифференциальных операторов, весьма чувствительных к погрешностям исходных данных, округлений в численных операциях и т.п. При таких преобразованиях необходимо использовать правила композиции интегро-дифференциальных операторов, рассмотренные выше в Главе 3. Важную роль в использовании таких правил играют начальные значения функций и их производных различных порядков.

Рассмотрим иллюстративные примеры решения различных интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков.

##### 4.4.1. Одночленные линейные дифференциальные уравнения нецелого порядка с постоянными коэффициентами

**Пример 4.4.** Решить дифференциальное уравнение  ${}_0D_t^\beta y(t) = f(t) = a \cdot t^\alpha$  для случая  $\beta=0.5$ ,  $\alpha = \frac{5}{2}$ ,  $a = 5$ , начальном

значении функции  $y(0) = y_0 = -3$ , на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 2$ .

Перед применением операционного метода необходимо преобразовать уравнение, проинтегрировав обе его части с порядком  $\beta$ :  ${}_0 D_t^{-\beta} ({}_0 D_t^\beta y(t)) = a \cdot {}_0 D_t^{-\beta} (t^\alpha)$ . Интеграл порядка  $\beta$  от производной того же порядка будет равен разности функции  $y(t)$  и ее начального значения  $y_0$ . Это позволяет записать:  $y(t) = y_0 + a \cdot {}_0 D_t^{-\beta} (t^\alpha)$ . Перейдем в область изображений:

$$\bar{Y} = y_0 \cdot \bar{1} + a \cdot \mathbf{P}_s^\beta \cdot \bar{F},$$

$$y_a(t) = \bar{Y}^* \cdot \bar{S}(t).$$

### Программа

- Задание числовых значений параметров:  
`ln[1]:= a := 5; y0 := -3; alpha := 2.5;`
- Задание сигнала  $f(t)$ :  
`ln[2]:= f[t_] := a * t^alpha;`
- Задание параметров базисной системы функций:  
`ln[3]:= h = 0.01; m = 200;`
- Формирование базисной системы функций:  
`ln[4]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h <= t < i * h, 1, 0];`
- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:  
`ln[5]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];`
- Вычисление операционной матрицы интегрирования порядка 0.5:  
`ln[8]:= P05 := P[0.5];`
- Определение изображения сигнала  $f(t)$ :  
`ln[9]:= F := Table[1/h * Integrate[f[t] dt, {t, (i-1)*h, i*h}], {i, m}];`

- Задание спектра константы «1»:

```
In[10]:= One := Table[1, {i, m}];
```

- Нахождение изображения решения в операционной области:

```
In[11]:= Y := y0 + One + P05.F;
```

- Определение аппроксимации решения уравнения:

```
In[12]:= ya = Y.S;
```

- Визуализация аппроксимации решения:

```
Plot[ya, {t, 0, 2}, PlotPoints -> 200, PlotRange -> All]
```

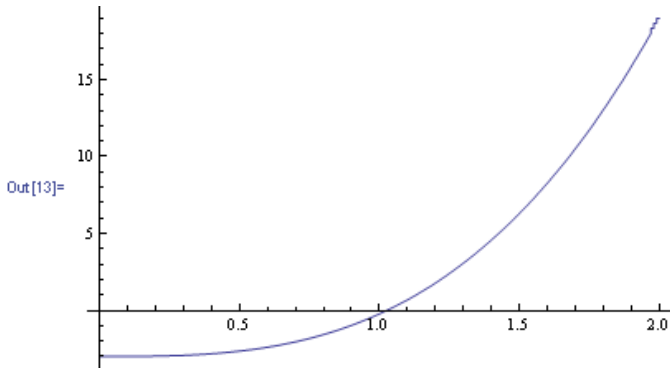


Рис.4.4а.Аппроксимация решения уравнения

- Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:

```
In[14]:= ListPlot[Y]
```

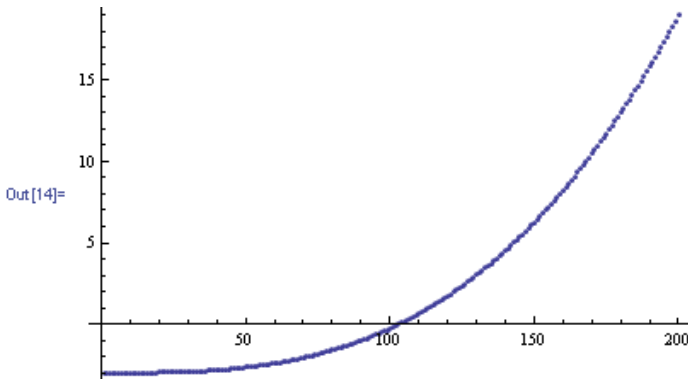


Рис.4.4б.Аппроксимирующий спектр решения



#### 4.4.2. Двучленные линейные дифференциальные уравнения нецелого порядка с постоянными коэффициентами

Примером такого уравнения является уравнение «релаксационно-осцилляции» [15]:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^\beta y(t) + ay(t) &= f(t), \\ y^{(k)}(0) &= 0, (k = 0, 1, \dots, n-1, \\ n-1 < \beta &\leq n. \end{aligned}$$

Такое название это уравнение получило, по-видимому, потому, что при  $\beta = 2$  его решением является незатухающее синусоидальное колебание, а при  $\beta = 1$  - апериодический процесс экспоненциального типа.

**Пример 4.5.** Решить дифференциальное уравнение  ${}_0 D_t^\beta y(t) + ay(t) = f(t)$  для случаев  $\beta=1.0, 1.5, 1.7, 2.0$ ,  $a = 2$ , нулевых начальных условиях для функции и первой производной ( $y(0) = y_0 = 0, y'(0) = y'_0 = 0$ ), и  $f(t) = H(t)$  - функция Хэвисайда или функция единичного скачка, на интервале изменения аргумента  $0 \leq t < 10$ .

Перед применением операционного метода необходимо преобразовать уравнение, проинтегрировав обе его части с порядком  $\beta$ :  ${}_0 D_t^{-\beta} ({}_0 D_t^\beta y(t) + ay(t)) = a \cdot {}_0 D_t^{-\beta} (H(t))$ . Интеграл порядка  $\beta$  от производной того же порядка будет равен функции  $y(t)$ . Это позволяет записать:  $y(t) + a {}_0 D_t^{-\beta} y(t) = {}_0 D_t^{-\beta} (H(t))$ . Перейдем в область изображений:

$$\begin{aligned} \bar{Y} + a \cdot \mathbf{P}_s^\beta \cdot \bar{Y} &= \mathbf{P}_s^\beta \cdot \bar{H}, \\ y_a(t) &= \bar{Y}^* \cdot \bar{S}(t). \end{aligned}$$

#### Программа

- Задание числовых значений параметров:  
`In[1]:= a := 2;`
- Задание сигнала  $f(t)$ :  
`In[2]:= f[t_] := UnitStep[t];`
- Задание параметров базисной системы функций:  
`In[3]:= h = 0.1; m = 100;`
- Формирование базисной системы функций:

In[4]:=  $v[t_, i_, h_] := \text{If}[(i - 1) * h \leq t < i * h, 1, 0];$

In[5]:=  $S = \text{Table}[v[t, i, h], \{i, m\}];$

- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:

In[6]:=  $P[\beta_, i_, j_, h_] :=$

$$\frac{h^\beta}{\text{Gamma}[\beta + 2]} * \text{If}[i < j, 0, \text{If}[i == j, 1, (i - j + 1)^{\beta+1} - 2(i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}]]];$$

In[7]:=  $P[\beta_] := \text{Table}[p[\beta, i, j, h], \{i, m\}, \{j, m\}];$

- Вычисление операционных матриц интегрирования порядков: 1.0; 1.5; 1.7; 2.0:

In[8]:=  $P1 := P[1.0]; P15 := P[1.5]; P17 := P[1.7]; P2 := P[2.0];$

- Определение изображения сигнала  $f(t)$ :

In[9]:=  $F := \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt, \{i, m\}\right];$

- Задание единичной матрицы порядка  $m$ :

In[10]:=  $Em := \text{IdentityMatrix}[m];$

- Нахождение изображений решений в операционной области, соответствующих различным порядкам производной:

In[11]:=  $Y1 := \text{Inverse}[Em + a * P1].P1.F;$

In[12]:=  $Y2 := \text{Inverse}[Em + a * P15].P15.F;$

In[13]:=  $Y3 := \text{Inverse}[Em + a * P17].P17.F;$

In[14]:=  $Y4 := \text{Inverse}[Em + a * P2].P2.F;$

- Определение аппроксимаций решений уравнения:

In[15]:=  $ya1 = Y1.S;$

In[16]:=  $ya2 = Y2.S;$

In[17]:=  $ya3 = Y3.S;$

In[18]:=  $ya4 = Y4.S;$

- Визуализация аппроксимаций решений:

In[19]:=  $\text{Plot}[\{ya1, ya2, ya3, ya4\}, \{t, 0, 10\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 200, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$

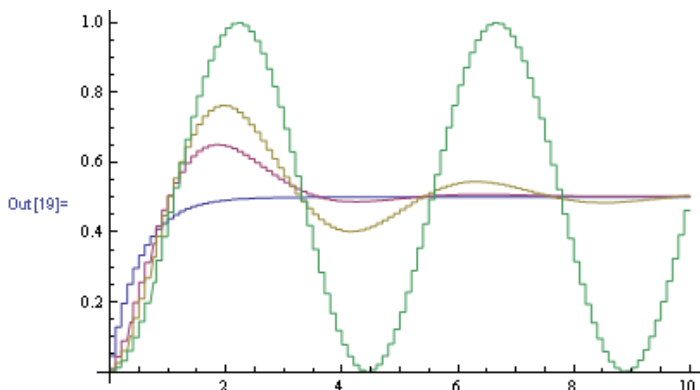


Рис.4.5а. Аппроксимации семейства решений уравнений с различными порядками дробных производных

- *Визуализация векторов коэффициентов аппроксимирующих полиномов:*

In[20]:= **p1 = ListPlot[Y1];**

In[21]:= **p2 = ListPlot[Y2];**

In[22]:= **p3 = ListPlot[Y3];**

In[23]:= **p4 = ListPlot[Y4];**

In[24]:= **Show[{p1, p2, p3, p4}, PlotRange -> All]**

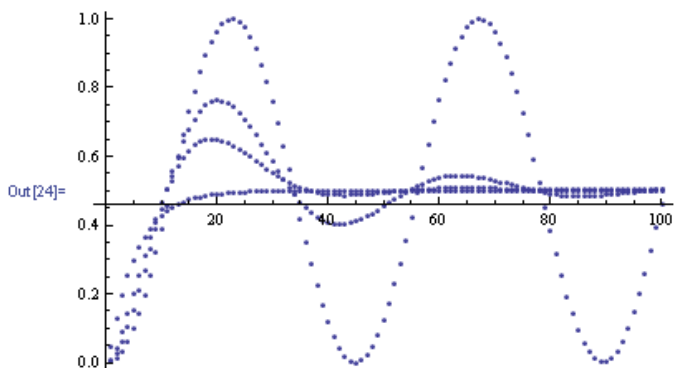


Рис.4.5b. Вектора коэффициентов аппроксимирующих полиномов

#### 4.4.3. Линейные дифференциальные уравнения смешанного порядка с производными по Капуто

Характерным примером таких уравнений является уравнение Баглея-Торвика[15], к которому сводятся задачи о движении пластины в ньютоновской вязкой жидкости:

$$a \cdot y''(t) + b \cdot D_*^{3/2} y(t) + c \cdot y(t) = f(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_0'.$$

Производная порядка  $3/2$  в этом уравнении  $D_*^{3/2} y(t)$  определяется по Капуто. Используя определение дробной производной по Капуто, можно записать:

$$a \cdot y''(t) + b \cdot {}_0 D_t^{-1/2} y''(t) + c \cdot y(t) = f(t),$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_0'.$$

Интегрируя обе части уравнения дважды и используя правила композиции дифференциальных операторов с учетом начальных условий получим следующее интегральное уравнение:

$$a \cdot y(t) + b \cdot {}_0 D_t^{-1/2} y(t) + c \cdot \int_0^t \int_0^{t_2} y(t_1) dt_1 dt_2 = a \cdot y_0 + b \cdot {}_0 D_t^{-1/2} y_0 + \\ + \int_0^t \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 + a \cdot y_0' \cdot \int_0^t dt_1 + b \cdot y_0' \cdot {}_0 D_t^{-3/2} \cdot 1$$

Переходя в область изображений, получим:

$$(a \cdot \mathbf{E} + b \cdot \mathbf{P}_s^{1/2} + c \cdot \mathbf{P}_s^2) \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}_s^2 \cdot \bar{\mathbf{F}} + (a \cdot y_0 \cdot \mathbf{E} + b \cdot y_0 \cdot \mathbf{P}_s^{1/2} + \\ + a \cdot y_0' \cdot \mathbf{P}_s^1 + b \cdot y_0' \cdot \mathbf{P}_s^{3/2}) \cdot \bar{\mathbf{1}}.$$

**Пример 4.6.** Найти аппроксимацию решения уравнения Багдея – Торвика в диапазоне изменения аргумента  $0 \leq t < 30$  при следующих значениях параметров и условий:

$$f(t) = 0; y_0 = 1; y_0' = 0; a = b = c = 1; h = 0.1; m = 300;$$

### Программа

- Задание сигнала  $f(t)$ :

```
ln[1]:= f[t_] := 0;
```

- Задание числовых значений параметров уравнения начальных условий:

```
ln[2]:= y0 := 1; y10 := 0;
```

```
ln[3]:= a = 1; b = 1; c = 1;
```

- Задание параметров базисной системы функций:

```
ln[4]:= h = 0.1; m = 300;
```

- Задание единичной матрицы порядка  $m$ :

```
ln[5]:= Em = IdentityMatrix[m];
```

- Формирование базисной системы функций:

In[6]:=  $v[t_, i_, h_] := \text{If}[(i - 1) * h \leq t < i * h, 1, 0];$

In[7]:=  $S = \text{Table}[v[t, i, h], \{i, m\}];$

- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:

In[8]:=  $p[\beta_, i_, j_, h_] :=$

$$\frac{h^\beta}{\text{Gamma}[\beta + 2]} * \text{If}[i < j, 0, \text{If}[i == j, 1, (i - j + 1)^{\beta+1} - 2 (i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}]]];$$

In[9]:=  $P[\beta_] := \text{Table}[p[\beta, i, j, h], \{i, m\}, \{j, m\}];$

- Вычисление операционных матриц интегрирования порядков: 0.5; 1.0; 1.5; 2.0:

In[10]:=  $P05 := P[0.5]; P2 := P[2.0]; P1 := P[1.0];$

$P15 := P[1.5];$

- Определение изображения сигнала  $f(t)$ :

In[11]:=  $F := \text{Table}\left[\frac{1}{h} * \int_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt, \{i, m\}\right];$

In[12]:=  $\text{One} := \text{Table}[1, \{i, m\}];$

- Задание изображения константы «1»:

In[15]:=  $\text{One} := \text{Table}[1, \{i, m\}];$

- Нахождение изображений решений в операционной области:

In[13]:=  $Y := \text{Inverse}[a * \text{Em} + b * P05 + c * P2].$

$$(P2.F + y0 * \text{One} + (y0 * P05 + y10 * P1 + y10 * P15) . \text{One});$$

- Определение аппроксимации решения уравнения:

In[14]:=  $ya = Y.S;$

- Визуализация аппроксимации решения:

In[15]:=  $\text{Plot}[ya, \{t, 0, 30\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{PlotPoints} \rightarrow 200]$

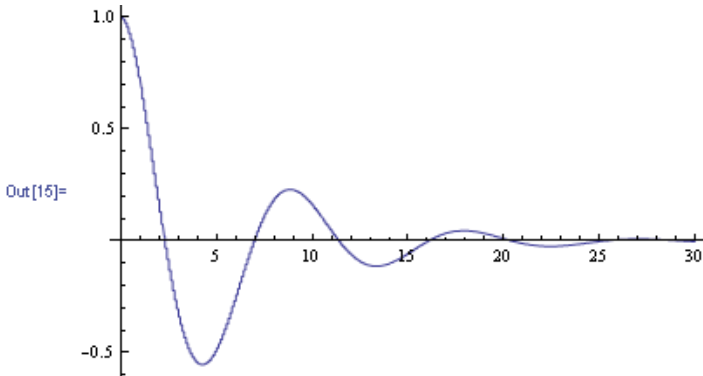


Рис.4.6а. Аппроксимация решения уравнения Баглея – Торвика

- *Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:*

```
In[16]:= ListPlot[Y, PlotRange -> All]
```

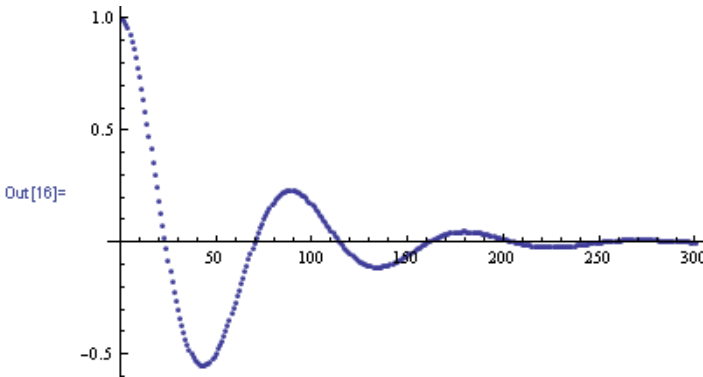


Рис.4.6б. Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома

**Пример 4.7.** Найти аппроксимацию решения уравнения Баглея – Торвика в диапазоне изменения аргумента  $0 \leq t < 30$  при следующих значениях параметров и нулевых начальных условиях:  
 $y_0 = y_0' = 0; a = 1; b = c = 0.5; h = 0.1; m = 300;$

$$f(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

#### Программа

- *Задание сигнала  $f(t)$ :*

```
In[1]:= f[t_] := 8 If[0 <= t <= 1, 1, 0];
```

- Задание числовых значений параметров уравнения и начальных условий:

```
In[2]:= y0 := 0; y10 := 0;
```

```
In[3]:= a = 1; b = 0.5; c = 0.5;
```

- Задание параметров базисной системы функций:

```
In[4]:= h = 0.1; m = 300;
```

- Задание единичной матрицы порядка m:

```
In[5]:= Em = IdentityMatrix[m];
```

- Формирование базисной системы функций:

```
In[6]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
```

```
In[7]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];
```

- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:

```
In[8]:= p[β_, i_, j_, h_] :=
    h^β
    Gamma[β + 2] *
    If[i < j, 0,
    If[i == j, 1, (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)]];

```

```
In[9]:= P[β_] := Table[p[β, i, j, h], {i, m}, {j, m}];
```

- Вычисление операционных матриц интегрирования порядков: 0.5; 1.0; 1.5; 2.0:

```
In[10]:= P05 := P[0.5]; P2 := P[2.0]; P1 := P[1.0]; P15 := P[1.5];
```

- Определение изображения сигнала f(t):

```
In[11]:= F := Table[1/h * ∫[(i-1)*h, i*h] f[t] dt, {i, m}];
```

- Задание изображения константы «1»:

```
In[12]:= One := Table[1, {i, m}];
```

- Нахождение изображения решения в операционной области:

```
In[13]:= Y := Inverse[a * Em + b * P05 + c * P2].
    (P2.F + y0 * One + (y0 * P05 + y10 * P1 + y10 * P15).One);
```

- Определение аппроксимации решения уравнения:

```
In[14]:= ya = Y.S;
```

- Визуализация аппроксимации решения:

```
In[15]:= Plot[ya, {t, 0, 30}, PlotRange → All, PlotPoints → 200]
```

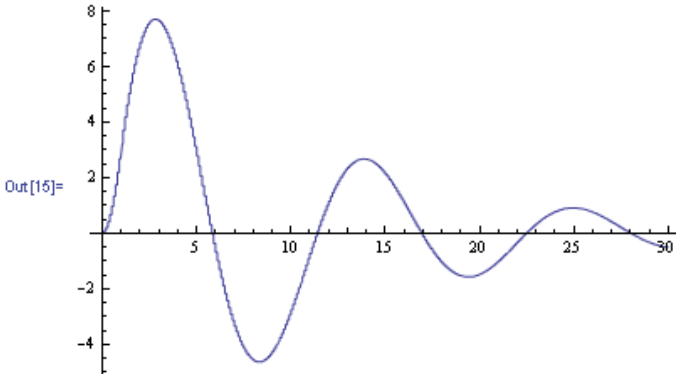


Рис.4.7а. Аппроксимация решения неоднородного уравнения Баглея – Торвика

- *Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:*

`In[16]:= ListPlot[Y, PlotRange → All]`

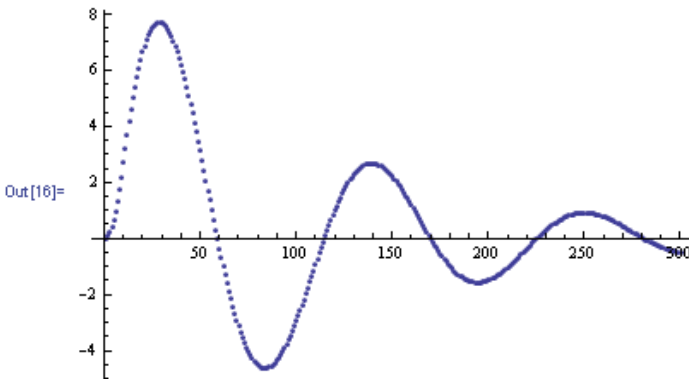


Рис.4.7b. Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома

#### 4.4.4 Дифференциальные уравнения смешанного порядка с переменными коэффициентами и производными по Капуто

Наличие переменных коэффициентов в интегро-дифференциальных уравнениях нецелых порядков приводит при использовании операционных методов к необходимости применять правила нахождения изображений сигналов, являющихся произведением сигналов и их производных. Рассмотрим пример такого уравнения, связанного с изучением процесса растворения газа в жидкости. Пример и числовые данные заимствованы из работы [15]. Пример интересен тем, что известно аналитическое решение этого уравнения.



**Пример 4.8.** Уравнение имеет вид:

$$F(t)y'(t) + G(t) {}_0D_t^{1/2}y(t) + y(t) = -1,$$

$$F(t) = f(t) / f'(t),$$

$$G(t) = \lambda / f'(t),$$

$$f(t) = 1 - \sqrt{t},$$

$$\lambda = 2 / \sqrt{\pi},$$

$$y(0) = 0,$$

$$0 < t < 1$$

Необходимо найти аппроксимацию решения. Аналитическое решение этого уравнения известно и равно:  $y(t) = \sqrt{t}$ .

Перед переходом в операционную область выполним ряд преобразований. Введем новую функцию  $u(t) = y'(t)$  и выполним подстановки в выражения переменных коэффициентов:

$$F(t) = 2(-\sqrt{t} + t);$$

$$G(t) = -\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}};$$

Уравнение примет вид:

$$2(-\sqrt{t} + t)u(t) - \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} {}_0D_t^{-1/2}u(t) + \int_0^t u(\tau) d\tau = -1,$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

В последнем выражении появился интеграл порядка  $1/2$  от новой переменной  $u(t)$  с учетом выражения для дробной производной порядка  $1/2$  по Капуто. Теперь перейдем в пространство изображений.

$$\mathbf{M}_F \cdot \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{M}_G \cdot \mathbf{P}_s^{1/2} \cdot \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{P}_s^1 \cdot \bar{\mathbf{U}} = -\bar{\mathbf{1}},$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = y(0) \cdot \bar{\mathbf{1}} + \mathbf{P}_s^1 \cdot \bar{\mathbf{U}},$$

$$y_a(t) = \bar{\mathbf{Y}}^* \cdot \bar{\mathbf{S}}(t).$$

#### Программа

- Задание начального условия:

`ln[1]:= y0 := 0;`

- Задание переменных коэффициентов:

```
In[2]:= f[t_] := 2 * (-sqrt[t] + t);
```

```
In[3]:= g[t_] := - (4 * sqrt[t]) / sqrt[pi];
```

- Задание параметров базисной системы функций:

```
In[4]:= h = 0.01; m = 100;
```

- Формирование базисной системы функций:

```
In[5]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h <= t < i * h, 1, 0];
```

```
In[6]:= S = Table[v[t, i, h], {i, m}];
```

- Определение операционной матрицы интегрирования дробных порядков:

```
In[7]:= p[beta_, i_, j_, h_] :=
  h^beta / Gamma[beta + 2] *
  If[i < j, 0,
  If[i == j, 1, (i - j + 1)^(beta + 1) - 2 (i - j)^(beta + 1) + (i - j - 1)^(beta + 1)]];

```

```
In[8]:= P[beta_] := Table[p[beta, i, j, h], {i, m}, {j, m}];
```

- Вычисление операционных матриц интегрирования порядков: 0.5; 1.0:

```
In[9]:= P05 := P[0.5]; P1 := P[1.0];
```

- Задание изображения константы «1»:

```
In[10]:= One := Table[1, {i, m}];
```

- Нахождение изображения переменных коэффициентов в операционной области:

```
In[11]:= F := Table[1/h * Integrate[f[t] dt, {i, m}];
```

```
In[12]:= G := Table[1/h * Integrate[g[t] dt, {i, m}];
```

- Определение единичной матрицы порядка m:

```
In[13]:= Em := IdentityMatrix[m];
```

- Определение диагональных матриц, изображений переменных коэффициентов  $M_F$  и  $M_G$  в операционной области:

```
In[14]:= D1 := DiagonalMatrix[F];
```

In[15]:= **D2 := DiagonalMatrix[G];**

- *Определение аппроксимации решения уравнения:*

In[16]:= **U := -Inverse[D1 + D2.P05 + P1].One;**

In[17]:= **Y := y0 \* One + P1.U;**

In[18]:= **ya = Y.S;**

- *Визуализация аппроксимации решения:*

In[19]:= **Plot[ya, {t, 0, 1}, PlotRange -> All, PlotPoints -> 200]**

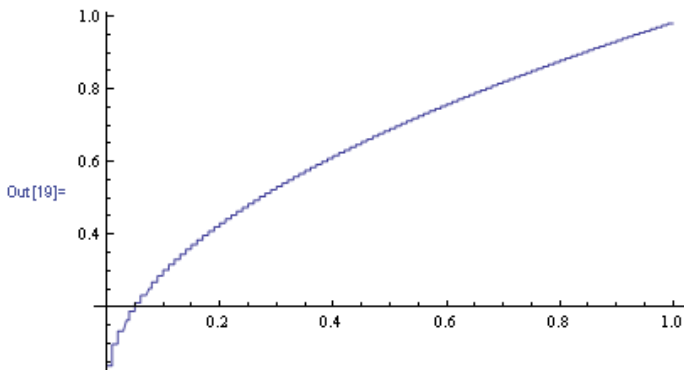


Рис.4.8а. Аппроксимация решения уравнения с переменными коэффициентами

- *Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома:*

In[20]:= **ListPlot[Y, PlotRange -> All]**

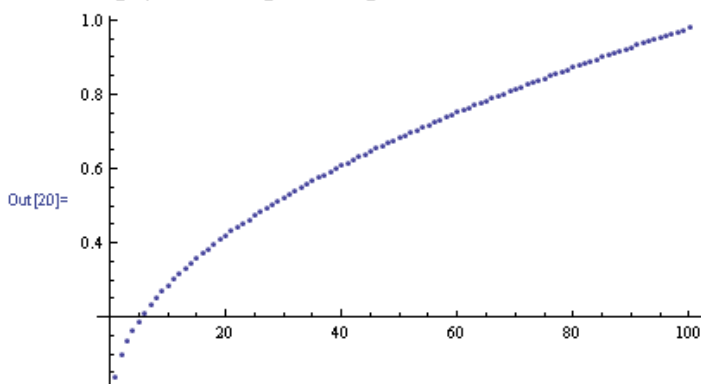


Рис.4.8б. Визуализация вектора коэффициентов аппроксимирующего полинома – решения уравнения с переменными коэффициентами

- *Визуализация функции ошибки аппроксимации:*

In[21]:= **Plot[ya - Sqrt[t], {t, 0, 1}, PlotPoints -> 200, PlotRange -> All]**

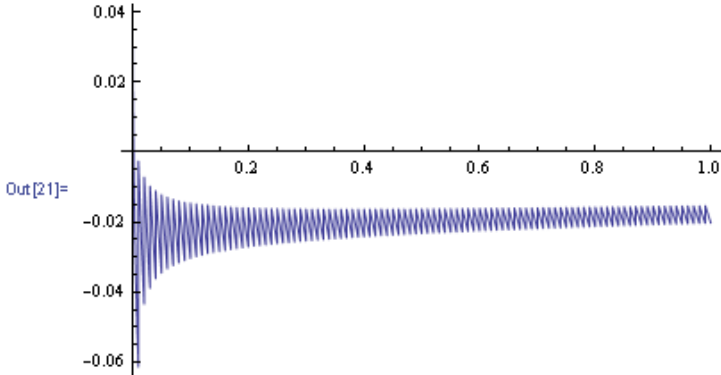


Рис. 4.8с. Функция ошибки аппроксимации решения уравнения

#### 4.5. Аппроксимационно-операционные модели двумерных динамических систем

Широкий класс задач математической физики описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, которые

для случая двух аргументов имеют вид]: 
$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = a \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta}.$$

Подобные уравнения должны, естественно, дополняться соответствующими начальными и краевыми условиями. Решением этих уравнений являются функции двух аргументов (в нашем случае это время  $t$  и пространственная координата  $x$ ). В указанный вид уравнений входят широко известные уравнение диффузии ( $\alpha = 1, \beta = 2$ ) и волновое уравнение ( $\alpha = 2, \beta = 2$ ). При нецелых порядках дифференциальных операторов мы имеем дело с дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка, которые носят также название диффузионно-волновых, и описывают процессы во фрактальных средах[13]. В Главе 1 были рассмотрены вопросы аппроксимации двумерных сигналов двумерными версиями смещенных полиномов Лежандра нулевого и пераого порядков. В этом разделе рассмотрим вопросы аппроксимации двумерных сигналов обобщенными полиномами с двумерными блочно-импульсными базисными функциями, последующей обработки сигналов (в частности, частного интегрирования нецелых порядков) и построения на этой основе операционных моделей динамических систем целого и дробного порядков. Иллюстративные примеры выполнялись в программной среде системы Mathematica [8, 17].

### 4.5.1. Аппроксимация двумерных сигналов

Пусть задан сигнал  $f(x, t)$  в декартовой системе координат  $xOt$  в диапазоне изменения аргументов  $0 \leq x \leq A, 0 \leq t \leq T$ . Необходимо представить сигнал полиномом вида:

$$f_a(x, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_{ij} \cdot s_i(x) \cdot s_j(t), \quad (4.13)$$

где:  $s_i(x), s_j(t)$  - базисные функции аргументов  $x$  и  $t$  соответственно. Коэффициенты аппроксимирующего полинома  $F_{ij}$  выбираются из условия наилучшего приближения полинома  $f_a(x, t)$  к сигналу  $f(x, t)$ . В соответствии с методом наименьших квадратов условием наилучшего приближения будет минимум интеграла квадрата функции ошибки на области аппроксимации сигнала:

$$\mu(F_{ij}) = \int_0^A \int_0^T (f(x, t) - f_a(x, t))^2 dt dx \Rightarrow \min. \quad (4.14)$$

Приравнявая нулю частные производные  $\frac{\partial \mu}{\partial F_{ij}}$ , можно полу-

чить систему уравнений, решение которой определит коэффициенты полинома наилучшего приближения сигнала.

Если в качестве базисных функций использовать блочно-импульсные функции соответствующих аргументов, которые образуют ортогональные системы функций [6,10], коэффициенты полинома найдутся из выражения:

$$F_{ij} = \frac{m \cdot n}{A \cdot T} \int_{(j-1) \frac{T}{n}}^{jT} \int_{(i-1) \frac{A}{m}}^{iA} f(x, t) dx dt. \quad (4.15)$$

При таком подходе область аппроксимации сигнала покрывается сеткой с шагом  $h_x = \frac{A}{m}$  по аргументу  $x$  и шагом  $h_t = \frac{T}{n}$  по аргументу  $t$ , аппроксимация является кусочно-постоянной функцией аргументов  $x$  и  $t$ , а система коэффициентов  $F_{ij}$  представляет собой прямоугольную матрицу размером  $n \times m$ .

Формуле (3) может быть сопоставлена следующая геометрическая интерпретация.

Элемент матрицы  $F_{ij}$  представляет собой высоту параллелепипеда с основанием  $h_x \times h_t$ , равновеликого по объему с призмой с тем же основанием, верхняя грань которой является фрагментом поверхности  $f(x, t)$  при изменения аргументов в пределах элемента сетки  $ij$ . При достаточно малых размерах элементов сетки фрагмент поверхности, определяемый функцией  $f(x, t)$ , будет незначительно отличаться от плоскости, и  $F_{ij}$  может рассматриваться как аппроксимация значения функции в центре элемента сетки с координатами  $x_i = (i - 0.5)h_x, t_j = (j - 0.5)h_t$ .

Проиллюстрируем на примере описанный порядок аппроксимации двумерных сигналов.

**Пример 4.9.** Аппроксимировать сигнал  $f(x, t) = e^{-x} \sin(\pi t)$  в диапазонах изменения аргументов  $0 \leq x \leq A = 2$ , и  $0 \leq t \leq T = 1$ , используя двумерные версии блочно-импульсных базисных функций. Фрагменты программы с комментариями приведены ниже.

- Задание двумерной сетки на области изменения аргументов и определение блочно-импульсных систем базисных функций:

```
In[1]:= hx = 0.25; ht = 0.1; m = 8; n = 10;
```

```
In[2]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h ≤ t < i * h, 1, 0];
```

```
In[3]:= Sx = Table[v[t, i, hx], {i, m}];
```

```
In[4]:= St = Table[v[t, j, ht], {j, n}];
```

- Задание исходной формы определения сигнала:

```
In[5]:= f[x_, t_] := Exp[-x] * Sin[π * t];
```

- Нахождение матрицы двумерного блочно-импульсного спектра сигнала:

```
In[6]:= F := Table[ $\frac{1}{hx * ht} * \int_{(i-1)*hx}^{i*hx} \int_{(j-1)*ht}^{j*ht} f[x, t] dt dx, \{j, n\}, \{i, m\}$ ];
```

```
F := Table[ $\frac{1}{hx * ht} * \int_{(i-1)*hx}^{i*hx} \int_{(j-1)*ht}^{j*ht} f[x, t] dt dx, \{j, n\}, \{i, m\}$ ];
```

Отображение матрицы полученного блочно-импульсного спектра сигнала не приводится в связи с ее громоздкостью.

- Нахождение таблицы дискретизированных значений сигнала в центрах элементов сетки:

In[11]:= `Ed := Table[f[(i - 0.5) * hx, (j - 0.5) * ht], {j, n}, {i, m}];`

- Нахождение матрицы отклонений аппроксимирующего спектра от дискретизированных значений сигнала с обнулением значений меньше 0.0015:

In[12]:= `Chop[Ed - E, 0.0015] // MatrixForm`

Out[12]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Визуализация аппроксимации сигнала на основе полученного спектра:

In[13]:= `ListPlot3D[E]`

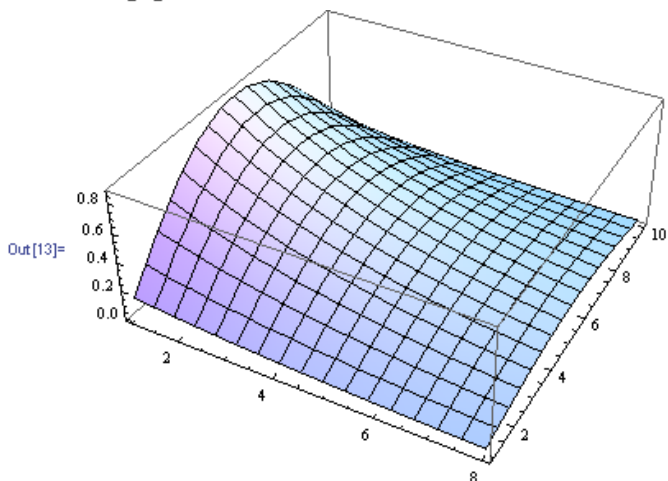


Рис.4.9а. Аппроксимация сигнала на основе полученного спектра

#### 4.5.2. Частное интегрирование двумерных сигналов

Известно, что частное интегрирование двумерного сигнала по одной из переменных с переменным верхним пределом осуществ-

ляется так же, как и интегрирование одномерного сигнала. При этом второй аргумент рассматривается как постоянная величина (параметр) [1,4,6]:

$$\begin{aligned} {}_0 J_x(f(x,t)) &= \int_0^x f(x_1,t) dx_1, \\ {}_0 J_t(f(x,t)) &= \int_0^t f(x,t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Используя операционный подход, на основе матрицы двумерного спектра подинтегральной функции можно получить соответствующую матрицу двумерного спектра частного интеграла по одной из переменных путем умножения операционной матрицы интегрирования одной переменной [5] и матрицы двумерного спектра сигнала. Обозначая матрицу двумерного блочно-импульсного спектра сигнала как  $\vec{\mathbf{F}}$ , а матрицы двумерных спектров частных интегралов сигнала по  $x$  и  $t$  соответственно как  $\vec{\mathbf{F}}_x$  и  $\vec{\mathbf{F}}_t$ , получаем следующие выражения для интегрирования сигнала в операционной области:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_x &= (\mathbf{P}_x \cdot \vec{\mathbf{F}}^*)^*, \\ \vec{\mathbf{F}}_t &= \mathbf{P}_t \cdot \vec{\mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где:  $\mathbf{P}_x$  и  $\mathbf{P}_t$  - операционные матрицы интегрирования по  $x$  и  $t$ ,

\*- символ транспонирования матрицы.

Рассмотрим пример частного интегрирования сигнала в операционной области.

**Пример 4.10.** Определить матрицы спектров частных интегралов по  $x$  и  $t$  сигнала, рассмотренного в примере 1, в предположении, что базисные системы и матрица спектра сигнала определены ранее в примере 4.9.

- Определение операционных матриц интегрирования по  $x$  и  $t$ :

```
In[11]:= H[β_, h_, m_] :=
```

```
Table[Which[i < j, 0, i == j, 1, i > j,
```

```
(i - j + 1)β+1 - 2 (i - j)β+1 + (i - j - 1)β+1], {i, m}, {j, m}];
```

```
In[12]:= βx = 1.0; βt = 1.0;
```

```
In[13]:= Px := H[βx, hx, m]; Pt := H[βt, ht, n];
```

Здесь выбраны порядки интегральных операторов, равные 1. Однако, обобщение на дробные порядки является тривиальным и



состоит лишь в задании дробных значений параметров, определяющих элементы операционной матрицы интегрирования.

- Определение матрицы спектра интеграла сигнала по  $x$ :

In[14]:= **I $\tilde{\mathbf{x}}1$  = Transpose[Px. Transpose[ $\tilde{\mathbf{F}}$ ]];**

- Определение матрицы спектра интеграла сигнала по  $t$ :

In[16]:= **I $\tilde{\mathbf{t}}1$  = Pt.  $\tilde{\mathbf{F}}$ ;**

Отображения полученных двумерных спектров интегралов сигнала по  $x$  и по  $t$  не приводятся в связи с их громоздкостью.

- Визуализация аппроксимаций интегралов:

In[18]:= **ListPlot3D[I $\tilde{\mathbf{x}}1$ ]**

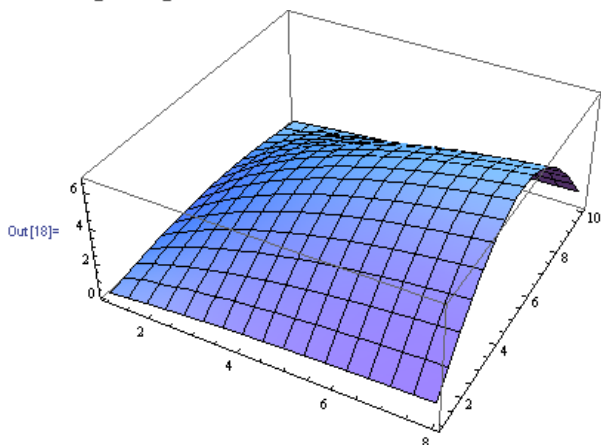


Рис.4.10а. Аппроксимация интеграла сигнала по  $x$

In[19]:= **ListPlot3D[I $\tilde{\mathbf{t}}1$ ]**

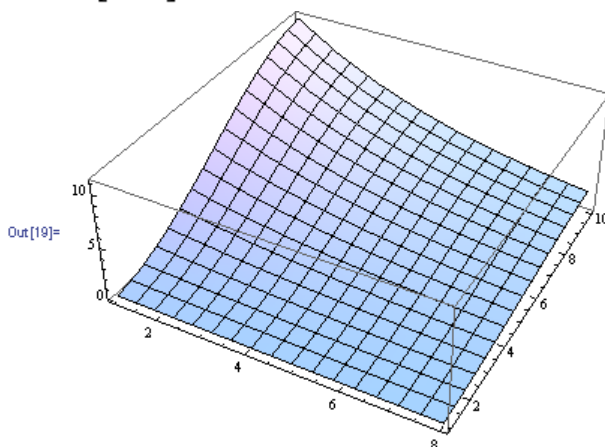


Рис.4.10б. Аппроксимация интеграла сигнала по  $t$ .

### 4.5.3. Математическая модель динамической системы нецелого порядка в операционном пространстве

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных вида:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = a \frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial x^\beta}. \quad (4.18)$$

При произвольных значениях порядков дифференциальных операторов и коэффициента  $a$  алгебраизация уравнения может приводить к системе алгебраических уравнений с плохообусловленной матрицей. Подобные проблемы рассматривались в работах Бабенко Ю.И. [2], которым был предложен метод расщепления интегро-дифференциальных операторов, позволяющий получить устойчивые в вычислительном отношении математические модели. Воспользуемся этим методом. Рассматривая уравнение (4.18) с позиции разности квадратов дифференциальных операторов, получим:

$$\left( \frac{\partial^{\alpha/2} u(x,t)}{\partial t^{\alpha/2}} + \sqrt{a} \frac{\partial^{\beta/2} u(x,t)}{\partial x^{\beta/2}} \right) \left( \frac{\partial^{\alpha/2} u(x,t)}{\partial t^{\alpha/2}} - \sqrt{a} \frac{\partial^{\beta/2} u(x,t)}{\partial x^{\beta/2}} \right) = 0 \quad (4.19)$$

Первый из сомножителей выражения (4.19) дает устойчивое в вычислительном отношении решение, удовлетворяющее уравнению (4.18). Для приведения к интегральной форме проинтегрируем первый сомножитель по  $t$  и  $x$  с дробными порядками  $\alpha/2$  и  $\beta/2$  соответственно:

$${}_0 J_t^{\alpha/2} {}_0 J_x^{\beta/2} \left( \frac{\partial^{\alpha/2} u(x,t)}{\partial t^{\alpha/2}} + \sqrt{a} \frac{\partial^{\beta/2} u(x,t)}{\partial x^{\beta/2}} \right) = 0. \quad (4.20)$$

Производя интегрирование с учетом начальных и краевых условий на функцию  $u(x,t)$ , получим:

$${}_0 J_x^{\beta/2} (u(x,t)) + \sqrt{a} {}_0 J_t^{\alpha/2} (u(x,t)) = {}_0 J_x^{\beta/2} (u(x,0)) + \sqrt{a} {}_0 J_t^{\alpha/2} (u(0,t)). \quad (4.21)$$

Переходя в операционное пространство получим следующую математическую модель динамической системы:

$$(\mathbf{P}_x^{\beta/2} + \sqrt{a} \mathbf{P}_t^{\alpha/2}) \cdot \bar{\mathbf{U}} = (\mathbf{P}_x^{\beta/2} \cdot \bar{\mathbf{U}}_{x0} + \sqrt{a} \mathbf{P}_t^{\alpha/2} \cdot \bar{\mathbf{U}}_{0t}). \quad (4.22)$$

Необходимо отметить, что операционные матрицы интегрирования для уравнений с частными производными формируются на основе кронекеровских произведений операционных матриц интегрирования одной независимой переменной и единичных матриц соответствующего размера [10,12].

Решение уравнения (4.22) позволяет определить аппроксимацию решения уравнений (4.18) при самых различных порядках дифференциальных операторов, изменяющихся в диапазоне от 0 до 2.

Проиллюстрируем приведенный порядок получения аппроксимации решения на следующем числовом примере.

**Пример 4.11.** Найти аппроксимацию решения уравнения (4.18) в области изменения аргументов  $0 \leq x \leq A = 1; 0 \leq t \leq T = 1$  при значениях порядков дифференциальных операторов  $\alpha=1, \beta=3/2$  и начальных и краевых условиях вида:  $u(x,0) = 1, u(0,t) = e^{-20t}$ .

Программа решения, результаты ее реализации с комментариями приведены ниже.

- Задание параметров и системы образующих функций:

```
In[1]:= hx = 0.2; ht = 0.1; m = 5; n = 10;
```

```
In[2]:= v[t_, i_, h_] := If[(i - 1) * h <= t < i * h, 1, 0];
```

```
In[3]:= Sx = Table[v[t, i, hx], {i, m}];
```

```
In[4]:= St = Table[v[t, j, ht], {j, n}];
```

- Определение операционных матриц интегрирования:

```
H[beta_, h_, m_] :=
```

$$\frac{h^\beta}{\Gamma[\beta + 2]} *$$

```
Table[Which[i < j, 0, i == j, 1, i > j,
```

$$(i - j + 1)^{\beta+1} - 2(i - j)^{\beta+1} + (i - j - 1)^{\beta+1}], \{i, m\}, \{j, m\}];$$

```
In[6]:= Em := IdentityMatrix[m]; En := IdentityMatrix[n];
```

```
In[7]:= beta = 0.75; ft = 0.5;
```

```
In[8]:= Px := H[beta, hx, m]; Pt := H[beta, ht, n];
```

```
In[9]:= Ppx := KroneckerProduct[En, Px];
```

```
In[10]:= Ppt := KroneckerProduct[Pt, Em];
```

- Задание начальных и краевых условий:

```
In[11]:= uxo := 1; uot := e^{-20 t};
```

- Нахождение матриц спектров начальных и краевых условий:

```
In[12]:= Ex := Table[ $\frac{1}{hx * ht} * \int_{(i-1)*hx}^{i*hx} \int_{(j-1)*ht}^{j*ht} uxo dt dx, \{j, n\}, \{i, m\}];$ 
```

```
In[13]:= Et := Table[ $\frac{1}{hx * ht} * \int_{(i-1)*hx}^{i*hx} \int_{(j-1)*ht}^{j*ht} uot dt dx, \{j, n\}, \{i, m\}];$ 
```

- Переформатирование полученных спектров:

```
In[14]:= F2 := Flatten[Ex]; F3 := Flatten[Et];
```

- Задание коэффициента уравнения:

```
In[15]:= a = 0.5;
```

- Получение решения, его переформатирование в матричную форму и отображение в матричном виде:

```
In[16]:= U := Inverse [ Ppx +  $\sqrt{a}$  * Ppt ]. ( Ppx.F2 + Ppt.F3 );
```

```
In[17]:= Uxt := Partition[U, m];
```

```
In[18]:= Uxt // MatrixForm
```

```
Out[18]/MatrixForm=
```

0.839041	0.96761	0.969699	0.978642	0.982457
0.54195	0.863709	0.904177	0.927701	0.94216
0.382002	0.73651	0.841311	0.878846	0.903639
0.315474	0.645503	0.782142	0.839482	0.871686
0.276853	0.583866	0.731477	0.803712	0.844024
0.250432	0.537964	0.689562	0.77119	0.818709
0.230642	0.501881	0.654163	0.741967	0.795229
0.21502	0.472434	0.623774	0.715632	0.773435
0.202251	0.447757	0.597311	0.691803	0.753172
0.191547	0.42666	0.573989	0.670138	0.7343

Визуализация полученного решения:

```
In[20]:= ListPlot3D[Uxt]
```

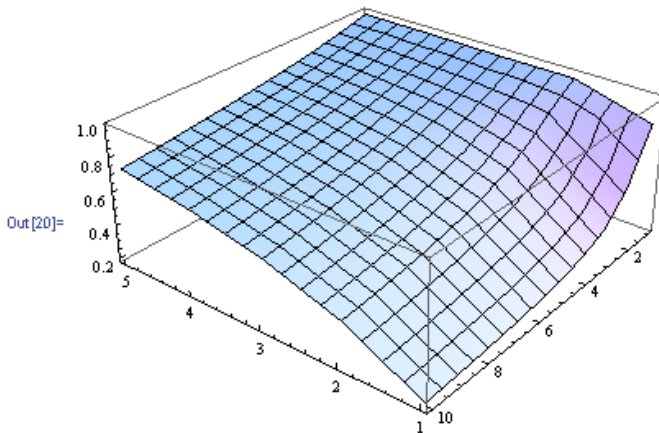


Рис.4.11. Аппроксимация решения дифференциального уравнения

Описанная методика и приведенные программы позволяют осуществлять аппроксимацию двумерных сигналов, на основе которой возможен операционный подход к моделированию динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных как целого, так и дробного порядков.

Преимуществом данного подхода является гибкость перехода от одного типа уравнения к другому, изменения параметров сетки, физических параметров задачи, типа начальных и краевых условий.

На основе полученных результатов могут быть построены модели широкого класса задач математической физики.

Известным ограничением является сложность реализации моделей на случай более двух независимых переменных.

**Приложение 4.1. Операционные матрицы интегрирования для блочно-импульсных систем базисных функций (система смещенных полиномов Лежандра нулевого порядка)**

**Операционная матрица интегрирования первого порядка ( $h=0.1, m=10$ )**

0.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.05	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.1	0.05	0	0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0	0	0	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0	0	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05	0
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.05

**Определяющие вектора для операционных матриц интегрирования дробных порядков ( $h=0.1, m=10, \beta=0.1, 0.2, \dots, 0.9$ )**

$\beta$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$P_{11}$	0.759043	0.572659	0.429572	0.320493	0.237883
	0.108958	0.170307	0.198587	0.2048	0.197069
	0.0465109	0.0815463	0.105928	0.120988	0.12829
	0.0315772	0.057863	0.0785345	0.0936953	0.103746
	0.0241963	0.0456855	0.0638851	0.0785201	0.0895612
	0.0197284	0.0381102	0.0545211	0.0685536	0.0799903
	0.0167131	0.0328887	0.0479293	0.0613888	0.0729641
	0.0145326	0.0290469	0.0429948	0.0559321	0.0675201
	0.012878	0.0260888	0.0391394	0.0516058	0.0631402
	0.0115773	0.0237334	0.03603	0.048072	0.0595169

$\beta$	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$P_{11}$	0.175703	0.129169	0.0945363	0.0688933	0.05
	0.181225	0.161334	0.140122	0.119332	0.1
	0.129437	0.125939	0.119141	0.110185	0.1
	0.109274	0.110964	0.109529	0.105661	0.1
	0.0971655	0.101621	0.1033	0.102617	0.1
	0.0887728	0.0949699	0.0987456	0.100331	0.1
	0.0824813	0.0898786	0.0951862	0.0985075	0.1
	0.0775221	0.085796	0.0922826	0.096994	0.1
	0.0734736	0.082414	0.089842	0.0957032	0.1
	0.0700815	0.0795443	0.0877446	0.0945798	0.1

$\beta$	1.5	2.0	3.0	$\sqrt{\pi}$	$1/\sqrt{2}$
$P_{i1}$	0.00951533	0.00166667	0.0000416667	0.00371762	0.126354
	0.0347962	0.01	0.000583333	0.0179661	0.159845
	0.050191	0.02	0.00208333	0.0310888	0.12555
	0.0616588	0.03	0.00458333	0.0426132	0.110957
	0.0712713	0.04	0.00808333	0.053256	0.101827
	0.0797216	0.05	0.0125833	0.0632953	0.0953157
	0.0873531	0.06	0.0180833	0.0728808	0.0903239
	0.0943667	0.07	0.0245833	0.0821058	0.0863162
	0.100892	0.08	0.0320833	0.0910333	0.0829928
	0.10702	0.09	0.0405833	0.099709	0.0801702

**Приложение 4.2. Формулы для формирования операционных матриц интегрирования дробного порядка для локальных базисных систем на основе смещенных полиномов Лежандра**

Операционная матрица интегрирования строится для определения интеграла нецелого порядка в виде интеграла Римана-Лиувилля:

$$y(t) = [D^{-\beta} x(t)]_0^t = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau.$$

Поскольку сигнал, подлежащий дробному интегрированию, аппроксимируется полиномом (1.20):

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^m (X_{0i} v_i(t) + X_{1i} w_i(t) + X_{2i} u_i(t)) = \bar{\mathbf{X}}_0^T \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) + \bar{\mathbf{X}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{W}}(t) + \bar{\mathbf{X}}_2^T \cdot \bar{\mathbf{U}}(t)$$

то операция дробного интегрирования сводится к интегрированию базисных функций  $v_i(t), w_i(t), u_i(t)$ . После очевидных преобразований операционная матрица интегрирования будет иметь клеточный вид, клетки которой являются нижними треугольными теплицевыми матрицами:

$$\mathbf{P}^{(\beta)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix}.$$

Обозначая номер диагоналей клеток матриц через  $r = i - j$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ , получим следующие формулы для векторов, определяющих диагонали теплицевых матриц  $\mathbf{H}_{kl}$ ,  $k, l \subset 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{11}(\beta, r) &= \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ 1, & r = 0, \\ \left[ (r+1)^{\beta+1} - 2r^{\beta+1} + (r-1)^{\beta+1} \right], & r = 1, \dots, m-1, \end{cases} \\
\mathbf{H}_{12}(\beta, r) &= \frac{3h^\beta}{\Gamma(\beta+3)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \beta, & r = 0, \\ \left[ (r+1)^{\beta+1}(\beta-2r) + 4r^{\beta+2} + (r-1)^{\beta+1}(-2r-\beta) \right], & r = 1, \dots, m-1, \end{cases} \\
\mathbf{H}_{13}(\beta, r) &= \frac{5h^\beta}{\Gamma(\beta+4)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \beta(\beta-1), & r = 0, \\ (r+1)^{\beta+1} \left[ (\beta-1)(\beta-6r) + 12r^2 \right] - \\ - 2r^{\beta+1} \left[ (\beta+2)(\beta+3) + 12r^2 \right] + (r-1)^{\beta+1} \left[ (\beta-1)(\beta+6r) + 12r^2 \right], & r = 1, \dots, m-1 \end{cases} \\
\mathbf{H}_{21}(\beta, r) &= \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+3)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ -\beta, & r = 0, \\ \left[ (r+1)^{\beta+1}(2r-\beta) - 4r^{\beta+2} + (r-1)^{\beta+1}(2r+\beta) \right], & r = 1, \dots, m-1 \end{cases} \\
\mathbf{H}_{22}(\beta, r) &= \frac{3h^\beta}{\Gamma(\beta+4)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ (1-\beta)(\beta+2), & r = 0, \\ (r+1)^{\beta+1} \left[ 2 - 4r^2 + (\beta+1)(4r-\beta) \right] + \\ + 2r^{\beta+1} \left[ 4r^2 - (\beta+2)(\beta+3) \right] + \\ + (r-1)^{\beta+1} \left[ 2 - 4r^2 - (\beta+1)(4r+\beta) \right], & r = 1, \dots, m-1 \end{cases} \\
\mathbf{H}_{23}(\beta, r) &= \frac{5h^\beta}{\Gamma(\beta+5)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ -\beta(\beta-2)(\beta+3), & r = 0, \\ (r+1)^{\beta+1} \left[ -\beta(\beta-2)(\beta+3) + 8r(\beta^2 + \beta - 3) - 24r^2(\beta+1-r) \right] - \\ - 8r^{\beta+2} \left[ 6r^2 - (\beta+3)(\beta+4) \right] + \\ + (r-1)^{\beta+1} \left[ \beta(\beta-2)(\beta+3) + 8r(\beta^2 + \beta - 3) + 24r^2(\beta+1+r) \right], & r = 1, \dots, m-1 \end{cases} \\
\mathbf{H}_{31}(\beta, r) &= \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+4)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \beta(\beta-1), & r = 0, \\ (r+1)^{\beta+1} \left[ (\beta-1)(\beta-6r) + 12r^2 \right] - 2r^{\beta+1} \left[ (\beta+2)(\beta+3) + 12r^2 \right] + \\ + (r-1)^{\beta+1} \left[ (\beta-1)(\beta+6r) + 12r^2 \right], & r = 1, \dots, m-1, \end{cases}
\end{aligned}$$



$$\mathbf{H}_{32}(\beta, r) = \frac{3h^\beta}{\Gamma(\beta+5)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \beta(\beta-2)(\beta+3), & r = 0, \\ (r+1)^{\beta+1} [\beta(\beta-2)(\beta+3) - 8r(\beta^2 + \beta - 3) + 24r^2(\beta+1-r)] + \\ + 8r^{\beta+2} [6r^2 - (\beta+3)(\beta+4)] + \\ + (r-1)^{\beta+1} [-\beta(\beta-2)(\beta+3) - 8r(\beta^2 + \beta - 3) - 24r^2(\beta+1+r)] \\ & r = 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_{33}(\beta, r) = \frac{5h^\beta}{\Gamma(\beta+4)} \begin{cases} 0, & r < 0, \\ \frac{(\beta-1)(\beta+2)(\beta-3)}{(\beta+5)}, & r = 0, \\ p_+(\beta, r) + p_0(\beta, r) + p_-(\beta, r), & r = 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

где

$$p_+(\beta, r) = (r+1)^{\beta+1} [(\beta-1)(\beta-6r) + 12r^2] - \frac{6(r+1)^{\beta+2}}{\beta+4} [\beta^2 + \beta - 6r\beta + 12r^2] + \\ + \frac{12(r+1)^{\beta+3}}{(\beta+4)(\beta+5)} [(\beta+1)(\beta+2-6r) + 12r^2],$$

$$p_0(\beta, r) = 2r^{\beta+1} [12r^2 - (\beta+2)(\beta+3)] + \frac{12r^{\beta+5}}{(\beta+4)(\beta+5)},$$

$$p_-(\beta, r) = (r-1)^{\beta+1} [(\beta-1)(\beta+6r) + 12r^2] + \frac{6(r-1)^{\beta+2}}{\beta+4} [\beta^2 + \beta + 6r\beta + 12r^2] + \\ + \frac{12(r-1)^{\beta+3}}{(\beta+4)(\beta+5)} [(\beta+1)(\beta+2+6r) + 12r^2].$$

Аппроксимация интеграла дробного порядка выражается формулой:

$$y_a(t) = \bar{\mathbf{X}}^* \mathbf{P}^{(\beta)} \bar{\mathbf{S}}(t) = \left( \mathbf{P}^{(\beta)*} \bar{\mathbf{X}} \right)^* \bar{\mathbf{S}}(t) = \bar{\mathbf{Y}}^* \bar{\mathbf{S}}(t)$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Y}}_0 \\ \bar{\mathbf{Y}}_1 \\ \bar{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_0 \\ \bar{\mathbf{X}}_1 \\ \bar{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{(\beta)} \square \bar{\mathbf{X}},$$

Эти формулы могут использоваться и при интегрировании с целым порядком. Для этого достаточно задать соответствующее целое значение  $\beta$ . Свойства используемой системы базисных функций на основе смещенных полиномов Лежандра в силу ее ортогональности таковы, что операционные матрицы интегрирования для базисных систем на основе полиномов Лежандра нулевого и первого порядка являются подматрицами матрицы  $\mathbf{P}^{(\beta)}$ :

$$\mathbf{P}_0^{(\beta)} = \mathbf{H}_{11}, \quad \mathbf{P}_1^{(\beta)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}.$$

## Список литературы к Главе 4

1. *Андре Анго* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: «Наука», 1965. – 780 с.
2. *Бабенко Ю.И.* Тепломассообмен: Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. – Л.: Химия, 1986. – 144 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – Лейпциг: «Тойбнер», М.: «Наука», 1981. – 720 с.
4. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Математическое и компьютерное моделирование процессов и систем: Аппроксимация сигналов с применением системы Mathematica®, ISBN 978-966-02-4385-9.- К.: НАН України, 2007. -- 127 с.
5. *Васильев В.В., Симак Л.А.* Полиномиальные методы аппроксимации как операционные исчисления и их реализация в программной среде системы “Mathematica®” // Электронное моделирование. – 1996, т. 18, № 4. – С. 34-42.
6. *Васильев В.В., Сімак Л.О., Зеленков О.А. та ін.* Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі неklasичних операційних числень ISBN 978-966-02-0964-9.- К.: НАН України, 2006. -- 184 с.
7. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 328 с.
8. *Дьяконов В.П.* Mathematica 4.1/ 4.2/ 5.0 в математических и научно-технических расчетах. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2004. – 696 с.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: «Наука», 1984. – 832 с.
10. *Симак Л.А.* Аппроксимирующие импульсные спектры нескольких переменных и их применение к моделированию дифференциальных уравнений в частных производных, включающих дифференциальные операторы нецелых порядков. – К.: НАН Украины, 1989. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 89-18).
11. *Jiang L.H., Schaufelberger W.* Block Pulse Functions and Their Applications in Control Systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences, 179. – Springer-Verlag, 1992. – 237 p.
12. *Kailath T.* Linear Systems. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice – Hall, Inc., 1980.- 682 p.
13. *Momani S.* General Solutions for the Space – and Time – fractional Diffusion-wave Equations // Journal of Physical Sciences, Vol.10, 2006. – P. 30 – 43.

14. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – Academic Press, 1974. – 234 p.
15. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations //Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198. – Academic Press, 1999. – 340 p.
16. *West J. Bruce, Bologna Mauro, Grigolini Paolo* Physics of Fractal Operators. – Springer – Verlag, 2003. – 354 p.
17. *Wolfram S.* The Mathematica book. – Champaign, Il.: Wolfram Media & Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.

## Глава 5. РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ

Построение электронных моделей интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков сводится к проблеме синтеза электронных цепей (двухполюсников), связь между током и напряжением которых определяется производной или интегралом нецелого порядка (здесь используется традиционная для классического математического анализа запись производной):

$$i_N(t) = G \frac{d^\beta u_N(t)}{dt^\beta}, \quad (5.1)$$

где:  $\beta$  – порядок производной ( $\beta > 0$ ) или интеграла ( $\beta < 0$ ).

С этой целью могут быть использованы электронные цепи с сосредоточенными или распределенными параметрами.

### 5.1. Свойства гипотетического реактивного элемента дробного порядка

Эквивалентная схема реактивного элемента изображена на рис.5.1.

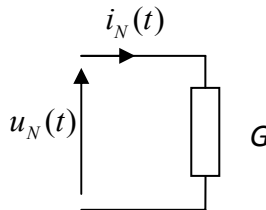


Рис. 5.1. Гипотетический реактивный элемент

В операторной и символической формах (5.1) примет вид:

$$\begin{aligned} I(p) &= p^\beta G U(p), \\ \dot{I} &= (j\omega)^\beta G \dot{U}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где:  $I(p)$ ,  $\dot{I}$  - изображение по Лапласу и комплексное изображение тока двухполюсника  $i_N(t)$  соответственно,

$U(p)$ ,  $\dot{U}$  - то же для напряжения двухполюсника  $u_N(t)$ ,

$p$  – оператор Лапласа,  $j$  – мнимая единица,  $\omega$  - круговая частота.

Не представляется возможным построить электронную цепь из конечного числа пассивных элементов, которая бы точно реализовала выражения (5.1) и (5.2) на бесконечно больших диапазонах изменения времени и частоты. Поэтому задача моделирования интегро-дифференциальных операторов нецелого порядка может ставиться как аппроксимационная в ограниченном диапазоне частот или на конечном интервале времени. Если ввести в рассмотрение гипотетический элемент электронной цепи, реализующий интегро-дифференциальный оператор нецелого порядка (его можно также назвать конденсатором или индуктивностью нецелого (дробного) порядка), то его свойства могут быть определены следующим образом. Определим переходную проводимость гипотетического реактивного двухполюсника  $g(t)$  как ток, протекающий через двухполюсник в переходном режиме при воздействии на него единичного скачка напряжения:

$$i(t) = g(t) \cdot 1_u(t), \quad (5.3)$$

где:  $1_u(t)$  - единичный скачок напряжения ( $1_u(t) = 1$ , если  $t \geq 0$ ,  $1_u(t) = 0$ , если  $t < 0$ ).

Ограничившись значениями порядка дифференциального оператора  $|\beta| < 1$ , выведем выражение для переходной проводимости. Используя определение дробного интеграла порядка  $\beta$  в форме Римана - Лиувилля для функции единичного скачка [8], получим:

$$g(t) = G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad (5.4)$$

где:  $\Gamma(\circ)$  – Гамма – функция.

Рассматривая порядок интегрального оператора как параметр, получим семейство зависимости переходных проводимостей от времени  $g(t, \beta)$ , показанное на рис. 5.2 и 5.3.

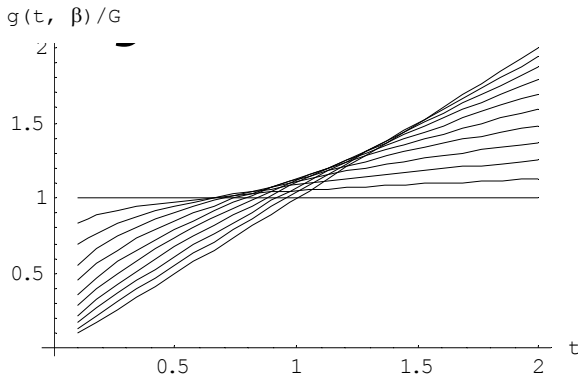


Рис. 5.2. Семейство переходных проводимостей для дробной индуктивности  
( $-1 \leq \beta \leq 0$ ).

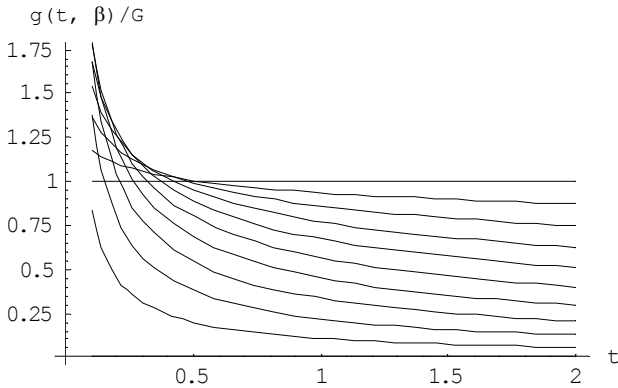


Рис. 5.3. Семейство переходных проводимостей для дробного конденсатора  
( $0 \leq \beta \leq 1$ ).

Таким образом, множество гипотетических индуктивностей порождается при непрерывном изменении порядка интегро-дифференциального оператора в пределах  $-1 \leq \beta < 0$ , тогда как изменение  $\beta$  в пределах  $0 < \beta \leq 1$  порождает гипотетические конденсаторы нецелых порядков. Случай  $\beta=0$  соответствует омическому сопротивлению (резистору). Рассмотрим теперь свойства дробного конденсатора в частотной области. Предполагая, что конденсатор находится в установившемся режиме под воздействием источника напряжения синусоидальной формы с нулевой начальной фазой и единичной амплитудой, запишем выражение для комплексной проводимости такого конденсатора:

$$\dot{Y} = G(j\omega)^\beta = G\omega^\beta e^{j\pi\beta/2}. \quad (5.5)$$

Амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики комплексной проводимости дробного конденсатора в соответствии с (5.5) имеют вид:

$$\begin{aligned} |Y|(\omega) &= G\omega^\beta, \\ \varphi(\omega) &= \pi\beta/2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

В логарифмическом масштабе они имеют вид прямых:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{|Y|(\omega)}{G}\right) &= \beta \cdot \ln(\omega), \\ \varphi(\omega) &= \pi\beta/2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Семейство частотных характеристик, соответствующих различным значениям  $\beta$ , ограничивается прямыми:

$$\begin{aligned} \ln|Y| &= \ln(G), \text{ для } \beta = 0 \\ \ln|Y| &= \ln(G) + \ln(\omega), \text{ для } \beta = 1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Семейство фазовых характеристик составляют прямые, параллельные оси частот в полосе от 0 до  $\pi/2$ . Переходные и частотные характеристики для комплексной проводимости индуктивностей нецелых порядков могут быть получены аналогично. Их внешний вид совпадает с рассмотренными характеристиками дробных конденсаторов при замене проводимостей на сопротивления, токов на напряжения и наоборот. Амплитудно - частотные характеристики комплексной проводимости индуктивностей нецелых порядков в логарифмическом масштабе имеют отрицательный угловой коэффициент, а фазовые характеристики параллельны оси частот и расположены в области отрицательных углов ( $-\pi/2 < \varphi < 0$ ).

Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики гипотетических реактивных элементов нецелых порядков (5.7) для порядков  $\beta$ , изменяющихся в диапазоне  $-1 \leq \beta \leq 1$  можно визуализировать следующим образом:

```
f[ $\omega$ _,  $\beta$ _] := -20  $\beta$  Log[10,  $\omega$ ];
 $\phi$ [ $\omega$ _,  $\beta$ _] := - $\beta$   $\frac{\pi}{2}$ ;
LogLinearPlot[Table[f[ $\omega$ ,  $\beta$ ], { $\beta$ , -1, 1, 0.2}],
  { $\omega$ , 10, 109}]
```

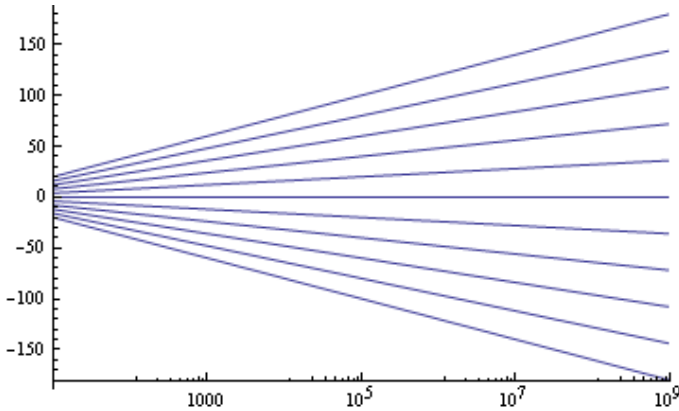


Рис. 5.4. Семейство амплитудно-частотных характеристик реактивных элементов дробного порядка в диапазоне  $-1 \leq \beta \leq 1$  (шаг по порядку 0.2)

```
LogLinearPlot[Table[ϕ[ω, β], {β, -1, 1, 0.2}],
{ω, 10, 109}]
```

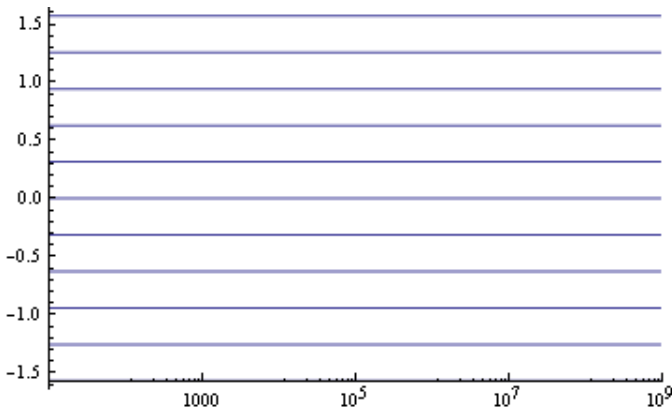


Рис. 5.5. Семейство фазо-частотных характеристик реактивных элементов дробного порядка в диапазоне  $-1 \leq \beta \leq 1$  (шаг по порядку 0.2)

## 5.2. Возможные подходы к реализации интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков

Для построения электронных двухполюсников, реализующих приближенно интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков, существует несколько подходов. Первый связан с использованием в качестве таких двухполюсников электрических проводящих



сред [27]. В запаянной ампуле, заполненной ферроцианидом калия, осуществляется окислительно-восстановительная реакция под воздействием напряжения, приложенного к платиновым электродам. При выполнении ряда конструктивных ограничений на размеры и форму электродов и концентрацию растворенных веществ связь между комплексами тока и напряжения такого двухполюсника определяется комплексным импедансом вида:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{A\omega^{1/2}} e^{-j\pi/4}, \quad (5.9)$$

где  $A$  – константа. В соответствии с (5.9) двухполюсник обладает свойствами интегратора половинного порядка ( $\beta=1/2$ ).

Существенными недостатками таких двухполюсников являются малый амплитудный диапазон вольт-амперных характеристик, определяемый потенциалом разложения растворителя (около 1 вольта), температурная нестабильность характеристик, низкая технологичность и прочность, в связи с использованием электролита в качестве рабочего тела, а также невозможность реализации пространственно неоднородных жидких сред для получения дробных порядков интегрирования, не равных  $1/2$ . Частотные характеристики электролитических полу-интеграторов (интеграторов порядка  $1/2$ ) отличаются от идеальных на 20-30% в диапазоне частот от 0 до 2 кГц.

При втором подходе в качестве двухполюсников используют отрезки коаксиальных кабелей, длинных линий или других цепей с распределенными параметрами. Известно [19], что точность воспроизведения интегро-дифференциального оператора половинного порядка входным импедансом коаксиального кабеля или однородной длинной линии будет тем выше, чем больше отношение длины отрезка к длине волны колебания. Теоретически лишь бесконечно длинный кабель (линия) реализует своим импедансом интегро-дифференциальный оператор дробного порядка в неограниченном диапазоне частот ( $0 \leq \omega \leq \infty$ ). Использование в качестве дробных конденсаторов коаксиальных кабелей или однородных длинных линий ограничено значением порядка дифференциального оператора  $|\beta| = \frac{1}{2}$  и конструктивной невозможностью достижения удовлетворительной точности в низкочастотном диапазоне. Первое ограничение можно снять, перейдя от однородных длинных линий и коаксиальных кабелей с постоянными параметрами к соответствующим цепям с распределенными параметрами, изменяющимся по пространственной координате по заданному закону, определяемому значением нецелого порядка  $\beta$ . Синтез таких цепей представляет собой сложную задачу многопараметрической оптимизации [6, 25].

Третий подход основан на построении квазианалоговых электронных цепей, аппроксимирующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков. Частным случаем этого подхода является синтез таких цепей для синусоидальных периодических режимов. Используя определение интегро-дифференциального оператора нецелого порядка, можно ввести в рассмотрение гипотетический реактивный элемент электронных цепей дробного порядка  $\beta$ , который в зависимости от численного значения порядка будет иметь свойства обычных элементов электрических цепей: индуктивности ( $\beta = -1$ ), емкости ( $\beta = 1$ ), омического сопротивления ( $\beta = 0$ ), а для промежуточных (нецелых) значений между  $\pm 1$  интерполировать свойства классических элементов электрических цепей.

Связь между током и напряжением такого элемента в соответствии с принятой условностью должна описываться выражением (5.1), где порядок интегро-дифференциального оператора изменяется в пределах:  $-1 \leq \beta \leq +1$ . Поскольку мы предполагаем, что элемент цепи работает на переменном токе (находится под воздействием синусоидального напряжения  $u(t) = U_m \sin \omega t$ ), выражение (5.1) запишем в следующем виде:

$$i_N(t) = \omega^\beta G U_{mN} \sin(\omega t + \beta\pi / 2). \quad (5.10)$$

В комплексной форме (3.10) будет иметь вид:

$$\dot{I}_N = (j\omega)^\beta G \dot{U}_N. \quad (5.11).$$

Предполагая, что начальная фаза приложенного напряжения равна нулю, векторная диаграмма тока и напряжения рассматриваемого реактивного элемента порядка  $\beta$  будет иметь вид, показанный на рис.5.6.

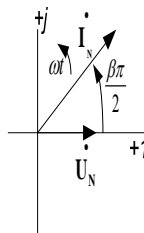


Рис. 5.6. Векторная диаграмма реактивного элемента дробного порядка.

Синтезировать такие элементы можно на основе методов моделирования, в частности методов квазианалогового моделирования [4].

Рассмотрим возможные варианты таких моделей реактивных элементов нецелого порядка. На рис.5.7 изображено последовательное соединение омического сопротивления  $R$  и обычной емкости  $C$ .

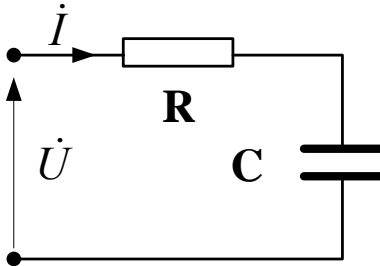


Рис.5.7.  $RC$  – цепь – квазианалог реактивного элемента дробного порядка

Выражение, связывающее комплексы тока и напряжения в этой схеме, имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{1}{(R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2)^{1/2}} \dot{U} e^{j \cdot \arctg \frac{1}{\omega CR}}. \quad (5.12)$$

Это выражение, естественно, не соответствует уравнению реактивного элемента нецелого порядка (5.11). Выведем условие эквивалентности цепи рис.5.5, рассматривая ее как квазианалог реактивного элемента нецелого порядка. Для этого достаточно потребовать равенства соответствующих комплексных проводимостей и получить зависимости от частоты омического сопротивления и емкости  $RC$ -цепи рис.5.7. Выполнив необходимые преобразования, получим:

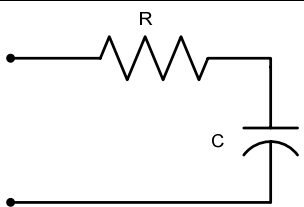
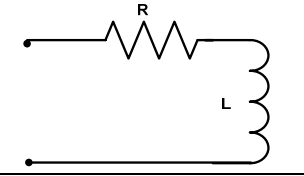
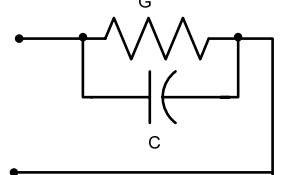
$$\begin{aligned} R(\omega, \beta) &= \frac{\cos(\beta\pi / 2)}{G\omega^\beta}, \\ C(\omega, \beta) &= \frac{G\omega^{\beta-1}}{\sin(\beta\pi / 2)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

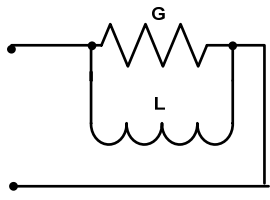
Анализируя (5.13), отметим, что при изменении  $\beta$  в диапазоне  $0 \leq \beta \leq 1$  цепь рис.5.7 может рассматриваться как квазианалоговая модель конденсатора порядка  $\beta$ . Отметим также, что при  $\beta=0$  получаем:  $C=\infty$  и  $R=1/G=const$ , что соответствует случаю обычного омического сопротивления, величина которого, как известно, не зависит от частоты. При  $\beta=1$  получаем  $R=0$ , и цепь превращается в обычную емкость.

Реализация реактивных элементов нецелого порядка со значениями  $\beta < 0$  с помощью квазианалоговой модели в виде  $RC$  – цепи при положительных  $R$  и  $C$  невозможна. Для этой цепи следует использовать последовательное соединение омического сопротивления и индуктивности. Вывод выражений для частотной зависимости параметров  $R$  и  $L$  может быть выполнен аналогично рассмотренному случаю  $RC$ -цепи.

Описанными двумя эквивалентными схемами не исчерпывается возможный перечень квазианалоговых моделей реактивных элементов нецелого (дробного) порядка. В качестве таких моделей могут быть использованы, например, двухполюсники, содержащие параллельное соединение конденсатора или индуктивности с омическим сопротивлением (проводимостью). Сводка формул-условий эквивалентности приведена в Табл. 5.1. Если порядок реактивного элемента задан, реализация указанных моделей сводится к использованию частотно-зависимых резисторов, емкостей и индуктивностей, входящих в соответствующие схемы моделей.

Таблица 5.1

Схема квазианалога	$R(G)$	$C(L)$
	$\frac{\cos(\beta\pi / 2)}{\omega^\beta G}$	$\frac{\omega^{\beta-1} G}{\sin(\beta\pi / 2)}$
	$\frac{\cos(\beta\pi / 2)}{\omega^\beta G}$	$-\frac{\sin(\beta\pi / 2)}{\omega^{\beta+1} G}$
	$\omega^\beta G \cos(\beta\pi / 2)$	$\omega^{\beta-1} G \sin(\beta\pi / 2)$

	$\omega^\beta G \cos(\beta\pi / 2)$	$-\frac{1}{\omega^{\beta+1} G \sin(\beta\pi / 2)}$
---	-------------------------------------	--

Известно несколько типовых структур цепей, применяемых для аппроксимационного синтеза двухполюсников, моделирующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков [12, 25]. Наибольшее распространение получили RC-цепи с сосредоточенными элементами. Среди них следует упомянуть два типа структур, получивших названия первой и второй RC-цепи Фостера [14], две модификации лестничных схем с сопротивлениями (емкостями) в продольных ветвях и емкостями (сопротивлениями) в поперечных ветвях, описанных в [25]. Рассмотрим более подробно задачу аппроксимации дифференциальных операторов нецелого порядка при использовании структуры второй RC-цепи Фостера (Рис.5.8).

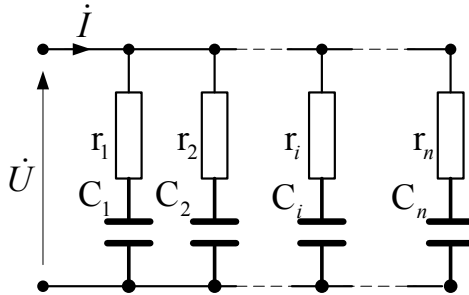


Рис. 5.8. RC – цепь Фостера

Задача аппроксимационного синтеза может быть сформулирована следующим образом: определить величины сопротивлений и емкостей второй цепи Фостера из условия, что амплитудно-частотная характеристика цепи в средне-квадратичном смысле наименее отклонялась бы от соответствующих характеристик реактивного элемента нецелого порядка  $\beta$  в заданном диапазоне частот  $[\underline{\omega}, \overline{\omega}]$ .

Запишем выражение для комплексной проводимости  $i$ -той ветви цепи (рис.5. 8):

$$\dot{Y}_i = \frac{1}{r_i} \cdot \frac{j\omega / \omega_i}{1 + j\omega / \omega_i} = g_i \cdot \frac{j\Omega_i}{1 + j\Omega_i} \tag{5.14}$$

Так как RC-ветви цепи соединены параллельно, полная комплексная проводимость цепи определится по формуле:

$$\dot{Y} = \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{j\Omega_i}{1 + j\Omega_i}, \quad (5.15)$$

где:  $\omega_i = \frac{1}{r_i C_i},$

$\Omega_i = \frac{\omega}{\omega_i}$  - нормализованная круговая частота.

Полная комплексная проводимость конденсатора нецелого порядка  $\beta$  определяется выражением:

$$\dot{Y}_\beta = Y_0 \cdot (j\omega / \omega_0)^\beta. \quad (5.16)$$

Запишем ошибку аппроксимации как функцию частоты  $\omega$ :

$$\varepsilon(\omega) = Y_0 \cdot (j\omega / \omega_0)^\beta - \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{j\omega / \omega_i}{1 + j\omega / \omega_i}. \quad (5.17)$$

Алгоритм решения аппроксимационной задачи, связанный с минимизацией нормы функции ошибки, зависит от формы представления функции комплексного аргумента, какой является выражение (5.16). Проанализируем аппроксимационное выражение (5.14). Используем алгебраическую форму представления функций комплексного переменного:

$$\dot{Y} = Y_R + jY_C = \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{(\omega / \omega_i)^2}{1 + (\omega / \omega_i)^2} + j \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{\omega / \omega_i}{1 + (\omega / \omega_i)^2}. \quad (5.18)$$

Активная и реактивная составляющие полной комплексной проводимости в выражении (5.18) могут рассматриваться, как обобщенные полиномы вида:

$$Y_R = \sum_{i=1}^n g_i \cdot v_i(\omega), \quad (5.19)$$

$$Y_C = \sum_{i=1}^n g_i \cdot w_i(\omega),$$

где:  $v_i(\omega)$  и  $w_i(\omega)$  - образующие (базисные) функции, зависимость которых от нормализованной частоты показана на рис. 5.9. Выбором опорных частот  $\omega_i$  графики базисных функций могут быть сжаты или растянуты, однако, качественный их характер сохранится.

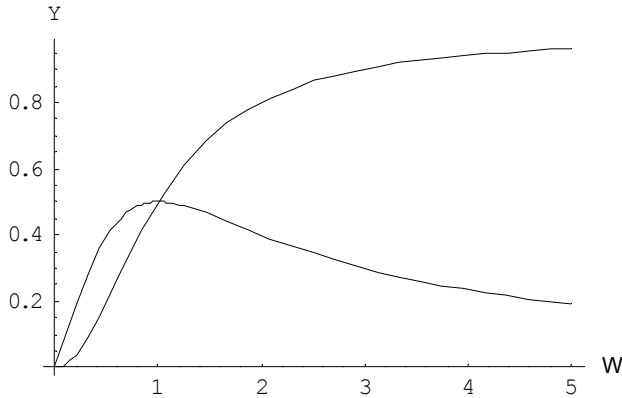


Рис. 5.9. Качественный характер базисных функций  $v_i(\omega)$  и  $w_i(\omega)$ .

Аппроксимационная задача нахождения параметров  $r_i$  и  $C_i$ , при которых минимизируется норма функции ошибки в комплексной области для случая квадратичной нормы, может быть заменена задачей аппроксимации в действительной области следующим образом. Запишем выражение для среднеквадратичной нормы функции ошибки:

$$J = \int_{\underline{\omega}}^{\bar{\omega}} \left\{ [Y_0(\omega/\omega_0)^\beta \cos \frac{\pi\beta}{2} - \sum_{i=1}^m g_i \frac{(\omega/\omega_i)^2}{1+(\omega/\omega_i)^2}]^2 + [Y_0(\omega/\omega_0)^\beta \sin \frac{\pi\beta}{2} - \sum_{i=1}^m g_i \frac{(\omega/\omega_i)}{1+(\omega/\omega_i)^2}]^2 \right\} d\omega \Rightarrow \min. \quad (5.20)$$

Минимизация (5.20) осуществляется выбором  $\omega_i$  и  $g_i$ . Величины емкостей конденсаторов  $C_i$  определяются по формулам:

$$C_i = \frac{g_i}{\omega_i}.$$

Система уравнений для нахождения  $\omega_i$  и  $g_i$  формируется

приравниванием к нулю частных производных  $\frac{\partial J}{\partial \omega_i}, \frac{\partial J}{\partial g_i}$ .

Определение параметров цепи Фостера может быть выполнено другим способом – путем решения задачи аппроксимации во временной области, приближением переходной проводимости цепи к переходной проводимости идеального дробного реактивного элемента (например, дробного конденсатора). Переходная проводи-

мость  $i$ -той ветви цепи в предположении подключения ее к источнику напряжения  $1_u(t)$  (единичный скачок напряжения) имеет вид:  $y_i(t) = g_i(1 - \exp(-\omega_i t))$ . Полная переходная проводимость цепи

определяется выражением:  $y(t) = \sum_{i=1}^n g_i(1 - \exp(-\omega_i t))$ .

Ее можно рассматриваться как обобщенный полином:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n g_i \cdot s(t), \quad (5.21)$$

где  $s_i(t) = (1 - \exp(-\omega_i t))$  - базисные (образующие) функции.

Как и ранее, запишем функционал среднеквадратической ошибки аппроксимации переходной проводимости дробного конденсатора (5.4) переходной проводимостью цепи Фостера (5.20) на интервале времени

$$[t_a, t_b]: J = \int_{t_a}^{t_b} \left[ G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} - \sum_{i=1}^n g_i(1 - \exp(-\omega_i t)) \right]^2 dt \Rightarrow \min. \quad (5.22)$$

Систему уравнений для нахождения параметров  $\omega_i$  и  $g_i$  получим, приравнявая к нулю частные производные (5.22) по искомым параметрам:

$$\frac{\partial J}{\partial g_p} = \int_{t_a}^{t_b} \left[ G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} - \sum_{i=1}^n g_i(1 - \exp(-\omega_i t)) \right] \cdot (1 - \exp(-\omega_p t)) dt = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \omega_p} = \int_{t_a}^{t_b} \left[ G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} - \sum_{i=1}^n g_i(1 - \exp(-\omega_i t)) \right] \cdot g_p \cdot t \cdot \exp(-\omega_p t) dt = 0, \quad (5.24)$$

$i, p: = 1, \dots, m$ .

Раскрывая скобки и меняя местами операции суммирования и интегрирования, получим:

$$\int_{t_a}^{t_b} G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \cdot (1 - \exp(-\omega_p t)) dt = \sum_{i=1}^n g_i \int_{t_a}^{t_b} (1 - \exp(-\omega_i t)) \cdot (1 - \exp(-\omega_p t)) dt \quad (5.25)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \cdot g_p \cdot t \cdot \exp(-\omega_p t) dt = \sum_{i=1}^n g_i \int_{t_a}^{t_b} (1 - \exp(-\omega_i t)) \cdot t \cdot \exp(-\omega_p t) dt. \quad (5.26)$$



Выполнив интегрирование в выражениях (5.25) и (5.26), можно получить систему уравнений, определяющую параметры схемы Фостера, аппроксимирующей дифференциальный оператор нецелого порядка.

### 5.3. Аппроксимационный синтез на основе теории фрактальных структур

Задача синтеза может быть существенно упрощена, если использовать теорию фрактальных структур. Как известно [16], входной импеданс электролитического двухполюсника с электродами пористой структуры определяется выражением:

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{aR + \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{a^2 R + \dots}}}}. \quad (5.27)$$

Таким импедансом обладает RC-цепь, изображенная на рис.5.10.

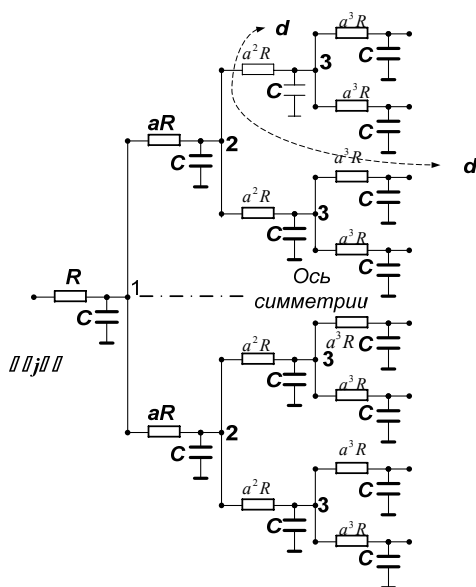


Рис.5.10. RC-цепь фрактальной структуры

Частотная зависимость входного импеданса такой цепи при бесконечно большом числе каскадов пропорциональна  $(j\omega)^{-\beta}$ , где:

$\beta = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$ . Эта цепь имеет древовидную структуру с емкостями

и резисторами, величины которых изменяются от каскада к каскаду по закону геометрической прогрессии. Характерной особенностью такой структуры является ее фрактальность, которая проявляется в том, что любая отрезанная ветвь подобна всему дереву (на рис.5.8 выделен такой фрагмент, образующийся при разрезе по линии  $dd$ ). Эта схема может быть упрощена, если использовать ее зеркальную симметрию относительно горизонтальной линии, проходящей через корневую ветвь. Симметрия позволяет утверждать, что узлы, расположенные симметрично по отношению один к другому, эквипотенциальны и могут быть объединены. В результате такого эквивалентного преобразования сопротивления и емкости, расположенные в пределах одного каскада, объединяются параллельно, и мы приходим к эквивалентной цепи, приведенной на рис. 5.11. Величина параметра  $a$ , соответствующая требуемому дробному порядку дифференцирования (интегрирования)  $\beta$ , определяется по формуле:

$$a = e^{\ln(2)/(1-\beta)}.$$

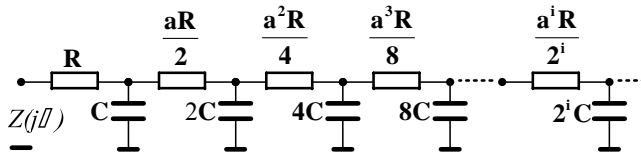


Рис.5.11. Эквивалентная схема цепи рис. 5.10.

Значения параметров резистивных и емкостных элементов для эквивалентных схем типа рис. 5.11 находятся по формулам:

$$r_i = \left(\frac{a}{2}\right)^i R; C_i = 2^i C, \quad (5.28)$$

где  $r_i, C_i$ - соответственно величины сопротивлений и емкости элементов  $i$  – того каскада цепи. Рассмотрим иллюстративные примеры синтеза цепей интеграторов порядков 0.3, 0.5, 0.7 для случая 15 - каскадной схемы рис. 5.11. Параметры элементов схемы при  $R=1$  ом и  $C=.001$  мкф приведены в Табл. 5.2.

Моделирование удобно проводить в программной среде Electronics Workbench(Multisim)[1]. Ниже приведена схема подключения виртуального измерителя частотных характеристик 15-каскадной цепи Фостера для аппроксимации интегральных операторов неце-

лых порядков (Рис. 5.12). Для иллюстрации выбраны аппроксимации интегральных операторов порядков  $\beta := 0.3, 0.5, 0.7$ . Входным сигналом является ток, измеряемый в виде падения напряжения на измерительном резисторе R16. Выходной сигнал является напряжение на входе двухполюсника. Таким образом, частотные характеристики соответствуют входному импедансу цепи. Величины сопротивлений резисторов и емкостей конденсаторов для первого каскада выбраны равными соответственно 1Ω и 1nF. Значения сопротивлений и емкостей для остальных каскадов выбираются в соответствии со значениями из табл. 5.2. Частотные характеристики входных импедансов цепей рис. 5.11 для выбранных порядков интегральных операторов приведены на рис. 5.13-5.15. Анализ характеристик показывает, что интегральные операторы дробных порядков аппроксимируются с удовлетворительной точностью в диапазоне 3-7 десятичных порядков изменения частоты.

Таблица 5.2.

$i$	$R_{i,ом}$ $\beta = 0.3$	$R_{i,ом}$ $\beta = 0.5$	$R_{i,ом}$ $\beta = 0.7$	$C_{i,нф}$
1	1	1	1	1
2	1.3459	2	5.03968	2
3	1.81145	4	25.3984	4
4	2.43803	8	128	8
5	3.28134	16	645.08	16
6	4.41636	32	3251	32
7	5.94398	64	16384	64
8	8	128	82570.2	128
9	10.7672	256	416128	256
10	14.4916	512	2097150	512
11	19.5042	1024	10569000	1024
12	26.2507	2048	53264300	2048
13	35.3309	4096	>250 MΩ	4096
14	47.5518	8192	>1350 MΩ	8192
15	64	16384	∞	16384

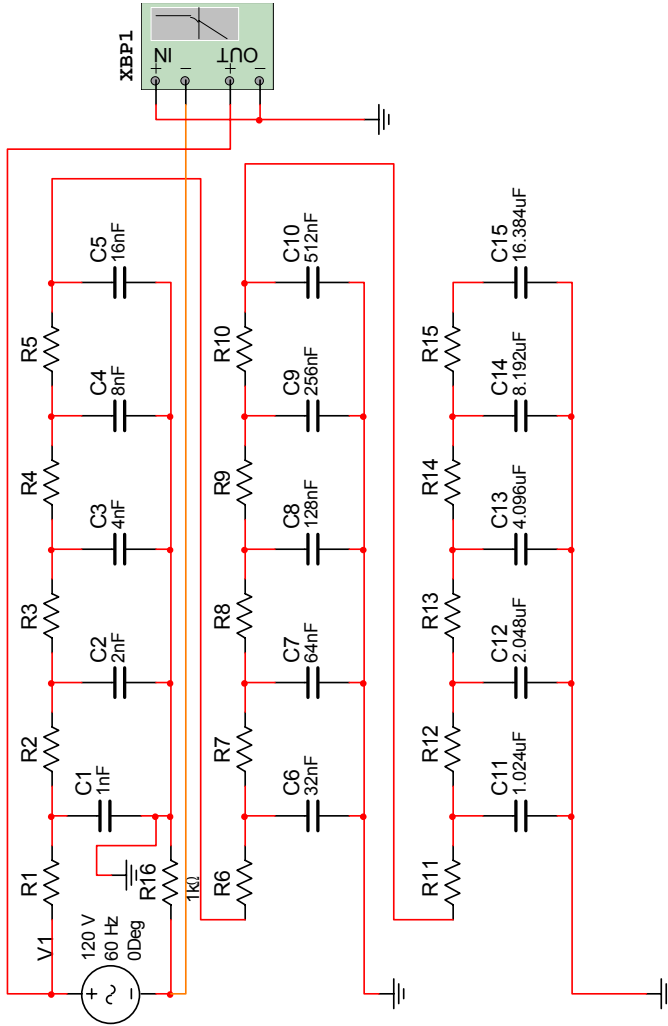


Рис. 5.12. Схема подключения виртуального измерителя частотных характеристик 15-каскадной цепи Фостера

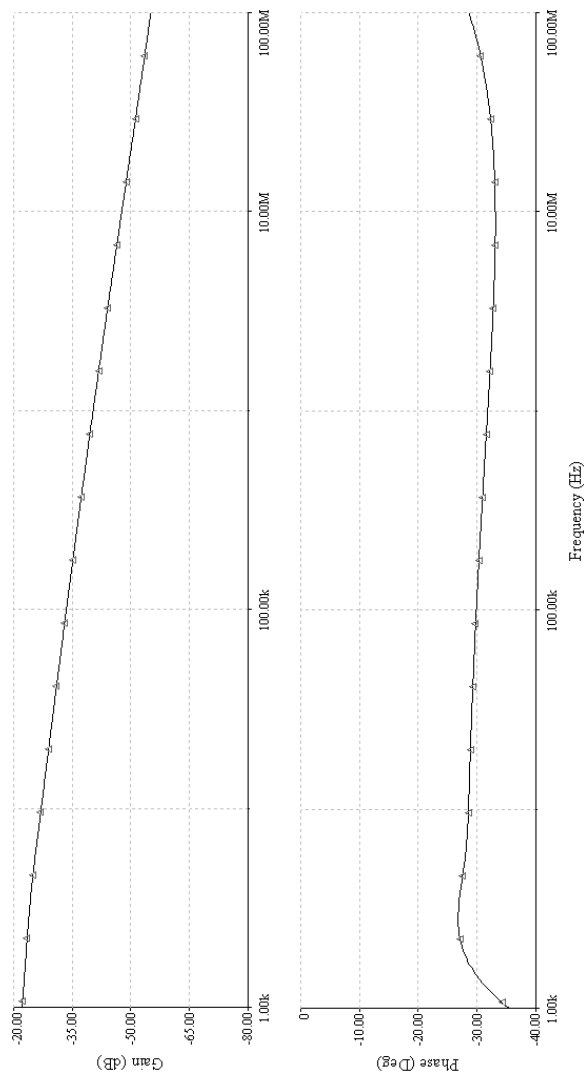
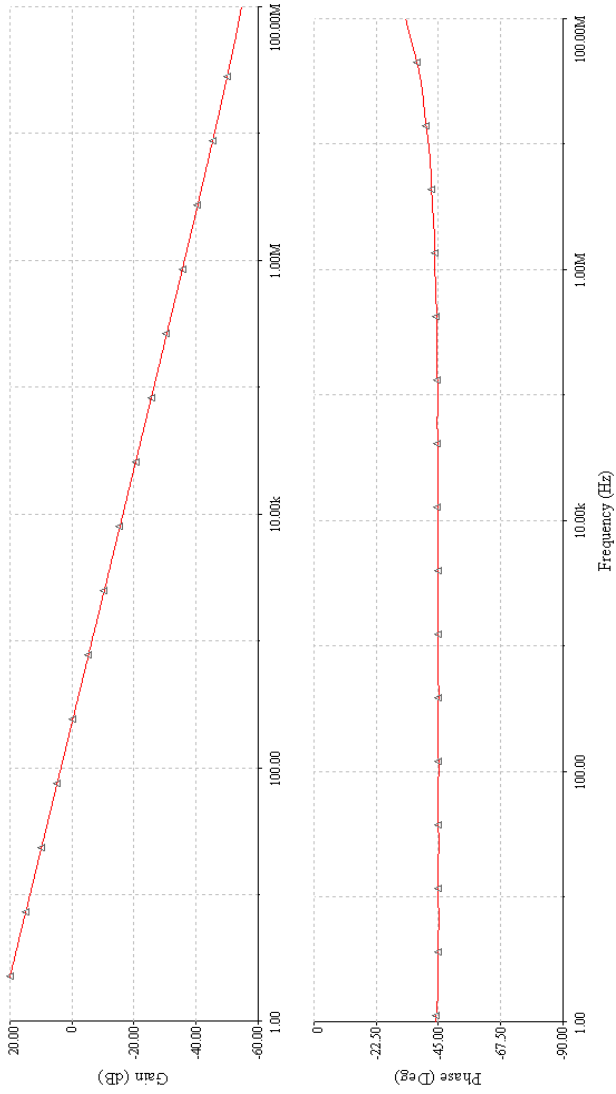


Рис.5.13. Частотные характеристики для  $\beta = 0.3$

Рис.5.14. Частотные характеристики для  $\beta = 0.5$

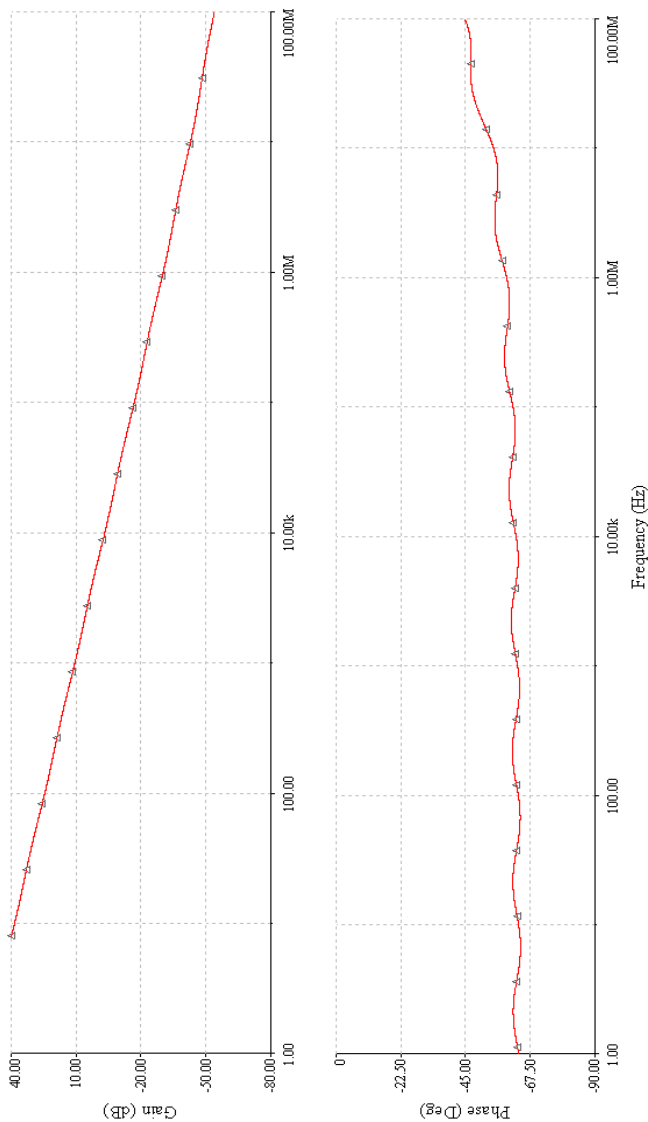


Рис.5.15. Частотные характеристики для  $\beta = 0.7$

#### 5.4. Исследование частотно-пространственных характеристик импедансов длинных линий на основе решений уравнения Риккати

Отрезок длинной линии и его эквивалентная схема изображены на рис. 5.16.

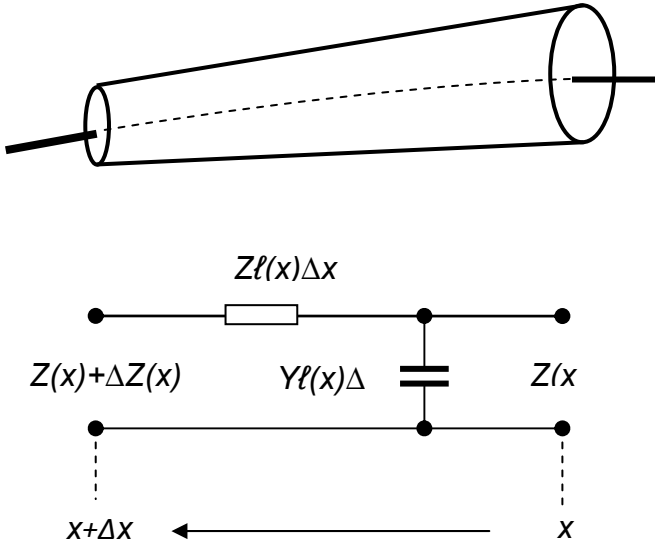


Рис. 5.16. Отрезок длинной линии и его эквивалентная схема

Входной импеданс линии в сечении  $x + \Delta x$  определится из выражения:

$$Z(x) + \Delta Z(x) = Z\ell(x)\Delta x + \left( \frac{1}{Z(x)} + Y\ell(x)\Delta x \right)^{-1}, \quad (5.29)$$

где,  $Z(x)$  - входной импеданс линии в сечении с координатой  $x$ ,  
 $Z(x) + \Delta Z(x)$  - входной импеданс линии в сечении с координатой  $x + \Delta x$ ,

$Z\ell(x)$  - продольный импеданс линии на единицу длины линии,

$Y\ell(x)$  - поперечный адмиттанс линии на единицу длины линии.

Формула (5.29) получена путем применения известного правила параллельного и последовательного соединения элементов эквивалентной схемы замещения участка длинной линии.



Преобразуя (5.29) путем перехода к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$  и пренебрегая степенями  $\Delta x$  выше первой, получим следующее дифференциальное уравнение относительно входного импеданса длинной линии:

$$\frac{dZ(x)}{dx} + Yl(x)Z(x)^2 - Zl(x) = 0. \quad (5.30)$$

Как следует из (5.30) – это обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка типа Рикатти [23]. При решении оно должно быть дополнено начальным условием, определяемым импедансом сопротивления нагрузки, включаемой в начале линии при  $x=0$ :  $Z(0) = Z_0$ .

Аналогичным путем может быть получено дифференциальное уравнение для адмиттанса длинной линии:

$$\frac{dY(x)}{dx} + Zl(x)Y(x)^2 - Yl(x) = 0. \quad (5.31)$$

Начальным условием для уравнения (5.31) будет выражение для адмиттанса сопротивления нагрузки, включаемой в начале линии. Тип уравнения (5.31) по сравнению с (5.30) не изменился – это по-прежнему уравнение Рикатти, оно может быть получено также из выражения (5.30) путем замены импедансов на адмиттансы и наоборот. Уравнение (5.30) следует использовать во всех режимах кроме режима холостого хода, тогда как уравнение (5.31) во всех режимах за исключением режима короткого замыкания на входе длинной линии.

#### 5.4.1. Однородная длинная линия RC-типа

Для исследования частотных характеристик входных импедансов и адмиттансов длинной линии ограничимся сначала случаем однородной длинной линии типа RC, используя известные выражения для комплексных сопротивлений и проводимостей элементов эквивалентной схемы фрагмента длинной линии:  $Zl(x) = r$ ,  $Yl(x) = j2\pi fCa$ .

Получим решение уравнения (5.30) в среде системы Mathematica для случая включения в начале линии нагрузки с импедансом  $w$  ( $z(0)=w$ ):

```
In[1]:= DSolve[{z'[x] - r + i * 2 * pi * f * Ca * z[x]^2 == 0,
z[0] == w}, z[x], x]
```

$$\text{Out[1]} = \left\{ \left\{ z[x] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \sqrt{x} \operatorname{Tanh} \left[ (1 + i) \left( \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} \sqrt{x} + \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \operatorname{ArcTanh} \left[ \frac{(1 + i) \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} w}{\sqrt{x}} \right] \right) \right] \right\} \right\}$$

Определим это решение как функцию, определяемую пользователем, для того, чтобы иметь возможность проанализировать и отобразить визуально решение при изменении входящих в него параметров:

In[2]:= `zo[x_, Ca_, f_, x_, w_] :=`

$$\frac{1}{\sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \sqrt{x} \operatorname{Tanh} \left[ (1 + i) \left( \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} \sqrt{x} + \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \operatorname{ArcTanh} \left[ \frac{(1 + i) \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} w}{\sqrt{x}} \right] \right) \right]$$

Анализ этого выражения можно осуществлять, задавая различные сочетания параметров и оставляя в качестве независимых аргументов два из 5 параметров, определяющих пользовательскую функцию In[2]. Зададим следующие значения параметров, оставляя в качестве аргументов частоту  $f$  и длину исследуемого отрезка линии  $x$ :  $r=1000$  ом/м,  $Ca=0.01$  мкф/м,  $w=0$  (режим короткого замыкания):

In[3]:= `z0 = zo[10 000, 10-5, f, x, 0];`

In[4]:= `z1 = FullSimplify[z0]`

$$\text{Out[4]} = \frac{(50\,000 - 50\,000 i) \operatorname{Tanh} \left[ \left( \frac{1}{10} + \frac{i}{10} \right) \sqrt{f} \sqrt{\pi} x \right]}{\sqrt{f} \sqrt{\pi}}$$

Исследование частотных характеристик сводится к анализу зависимости от частоты модуля и фазового угла в нашем случае импеданса  $z1$ :

In[5]:= `zm = Abs[z1];`

In[6]:= `az = Arg[z1];`

Визуализируем амплитудно- и фазо- частотные характеристики средствами трехмерной графики, задав диапазон изменения частоты от 100 гц до 100 кгц и диапазон длин линии от 1 до 15 м:

In[6]:= `p1 = Plot3D[zm, {f, 102, 105}, {x, 1, 15}]`

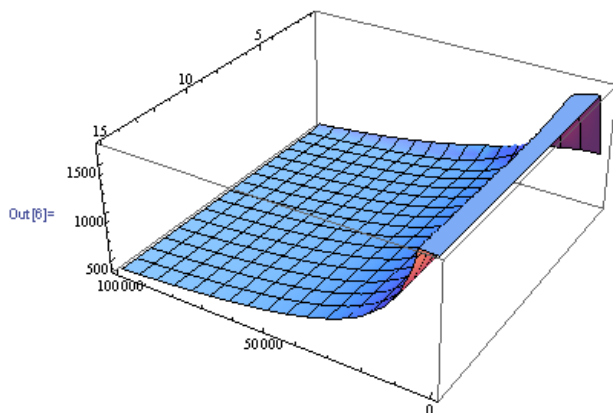


Рис.5.17. Амплитудная характеристика импеданса RC-линии

`In[7]:= p2 = Plot3D[az, {f, 102, 105}, {x, 1, 15}]`

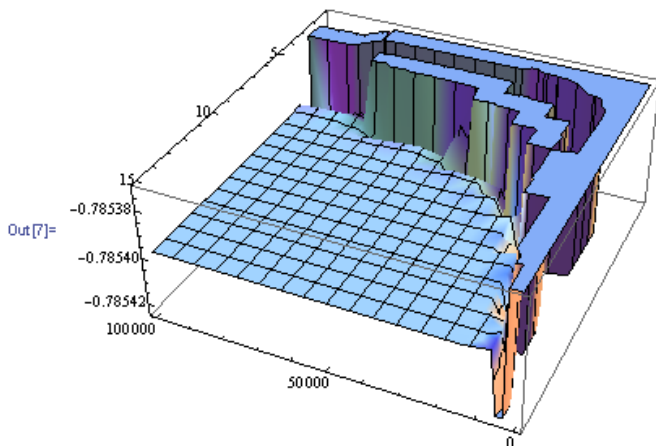


Рис.5.18 Фазовая характеристика импеданса RC-линии

Анализ фазо-частотной характеристики линии рис. 5.18 показывает, что линия при заданных параметрах обнаруживает свойства интегратора половинного порядка в части координатной плоскости  $x-f$  ( $az=-\pi/4=-0.7854$ ) с небольшими отклонениями, незначительность которых можно оценить, указав в опциях графики полный диапазон изменения функции:

`In[8]:= p3 = Plot3D[az, {f, 102, 105}, {x, 1, 15}, PlotRange -> All]`

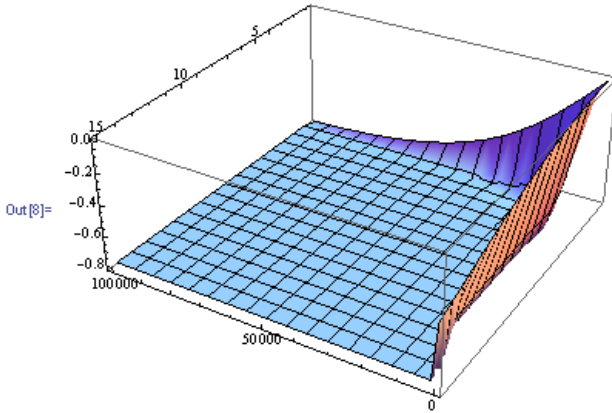


Рис.5.19. Фазовая характеристика импеданса RC-линии при полномасштабной аппликате

Частотные характеристики рис. 5.17-5.19 можно представить также, как семейства кривых, зависящих от длины линии, при параметрическом задании частоты, либо как семейства кривых, зависящих от частоты, при параметрическом задании длины линии (рис. 5.20-5.22):

```
In[9]:= p4 = Plot[Table[az, {f, 102, 105, 104}], {x, 1, 15}]
```

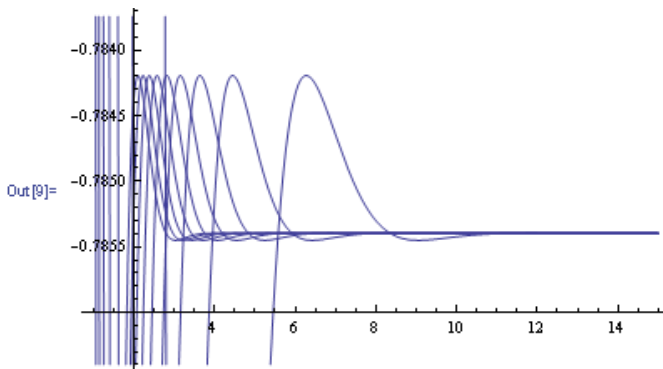


Рис.5.20. Фазовая характеристика импеданса RC-линии при параметрическом задании частоты

```
In[10]:= p5 = Plot[Table[zm, {f, 102, 105, 104}], {x, 1, 15}]
```

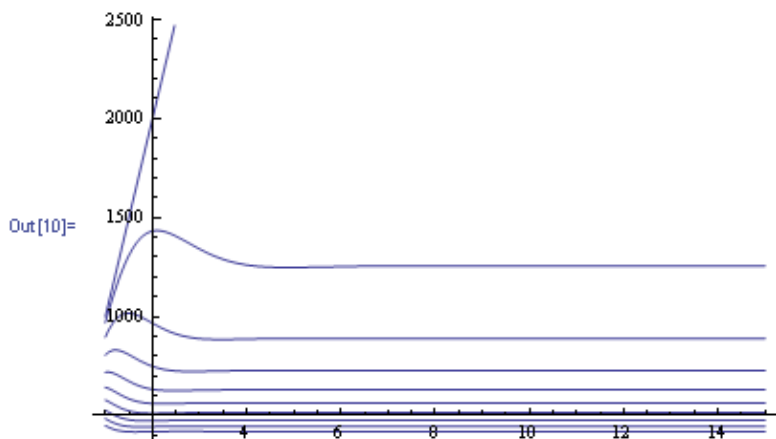


Рис.5.21. Амплитудная характеристика импеданса RC-линии при параметрическом задании частоты

`In[11]:= p6 = Plot[Table[az, {x, 1, 15, 2}], {f, 102, 105}]`

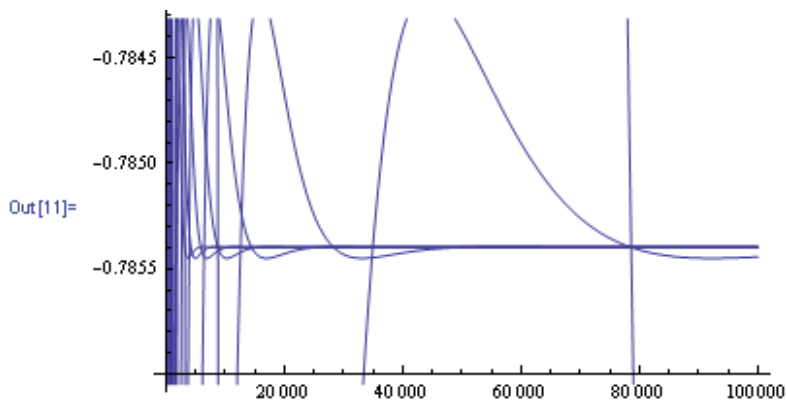


Рис.5.22. Фазо-частотная характеристика импеданса RC-линии при параметрическом задании длины линии

`In[12]:= p7 = Plot[Table[zm, {x, 0, 1.5, 0.2}], {f, 102, 106}]`

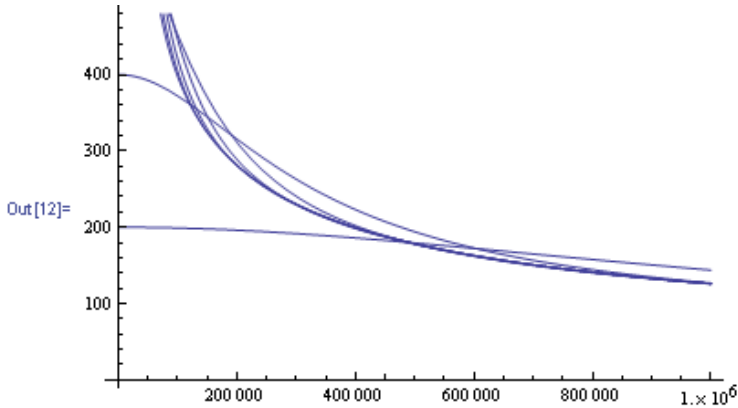


Рис.5.23. Амплитудно-частотная характеристика импеданса RC-линии при параметрическом задании длины линии

Для представления характеристик в более широком диапазоне частот можно воспользоваться логарифмическим масштабом (рис.5.24):

```
In[13]:= p8 = LogLogPlot[Table[zm, {x, 0, 1.5, 0.2}], {f, 102, 1010}]
```

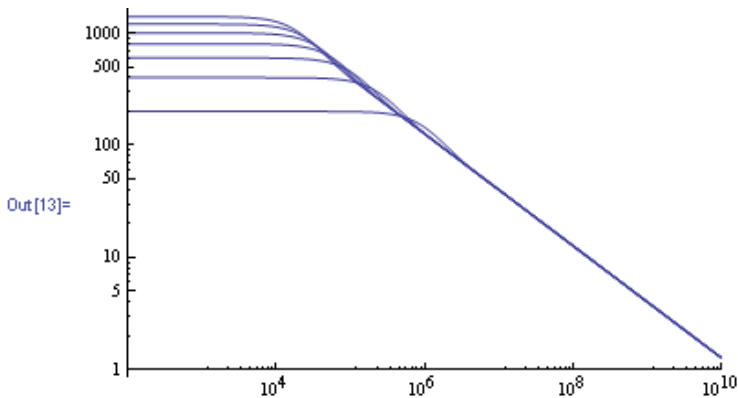


Рис.5.24. Амплитудно-частотная характеристика импеданса RC-линии при параметрическом задании длины (в логарифмическом масштабе).

Анализ частотных характеристик, приведенных выше, показывает, что в области высоких частот длинная линия RC-типа ведет себя как интегратор порядка  $\frac{1}{2}$  (наклон амплитудно-частотной характеристики равен 10 дцб/декаду, фазовый сдвиг равен  $-\pi/4$ ).

Решение уравнения (5.31) проведем аналогичным образом. Программа решения и отображение результатов ее работы приведены ниже без комментариев.

In[1]:= DSolve[{{Y'[x] + r \* Y[x]^2 - i \* 2 \* pi \* f \* Ca == 0, Y[0] == w}, Y[x], x]

Out[1]=  $\left\{ \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + i) \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} \operatorname{Tanh} \left[ (1 + i) \left( \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} \sqrt{x} - \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \sqrt{x} w}{\sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi}} \right] \right) \right] \right\} \right\}$

In[2]:= ya[x\_, Ca\_, f\_, x\_, w\_] :=  $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$(1 + i) \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi}$

$\operatorname{Tanh} \left[ (1 + i) \left( \sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi} \sqrt{x} - \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \operatorname{ArcTan} \left[ \frac{\left( \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) \sqrt{x} w}{\sqrt{Ca} \sqrt{f} \sqrt{\pi}} \right] \right) \right];$

In[3]:= y1 = ya[1000, 10<sup>-8</sup>, f, x, 0];

In[4]:= ym = Abs[y1];

In[5]:= ay = Arg[y1];

In[6]:= p1 = Plot3D[ym, {f, 10<sup>4</sup>, 10<sup>7</sup>}, {x, 1, 15}]

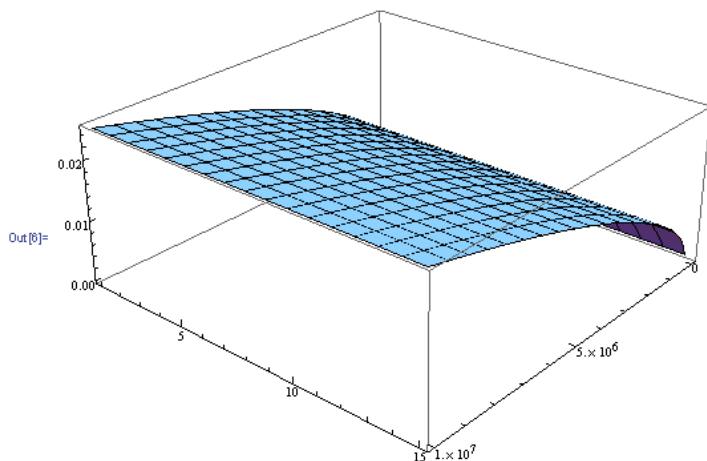


Рис. 5.23. Амплитудная характеристика адмиттанса RC-линии

```
In[7]:= p2 = Plot3D[ay, {f, 102, 105}, {x, 1, 15}]
```

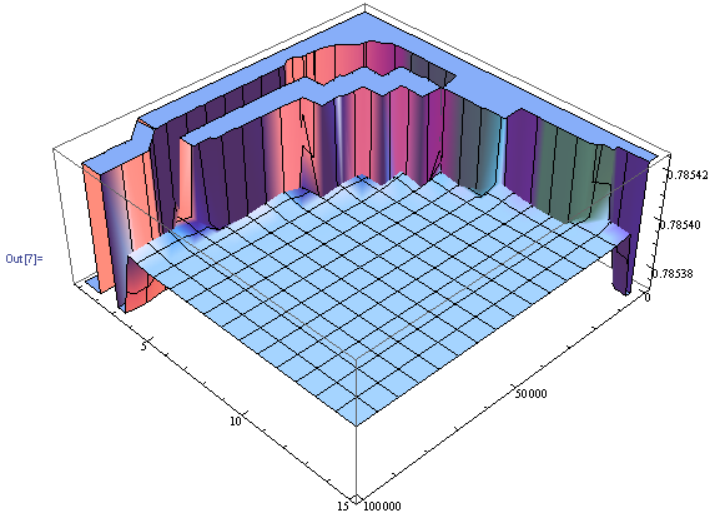


Рис.5.26. Фазовая характеристика адмиттанса RC-линии

```
In[8]:= p3 = Plot3D[ay, {f, 102, 105}, {x, 1, 15}, PlotRange -> All]
```

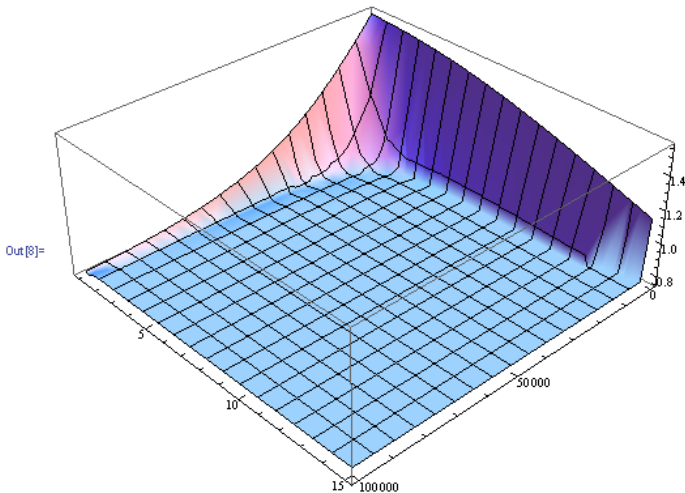


Рис.5.27. Фазовая характеристика адмиттанса RC-линии при полномасштабной аппликате



```
In[10]:= p5 = Plot[Table[ym, {f, 102, 105, 104}], {x, 1, 15}]
```

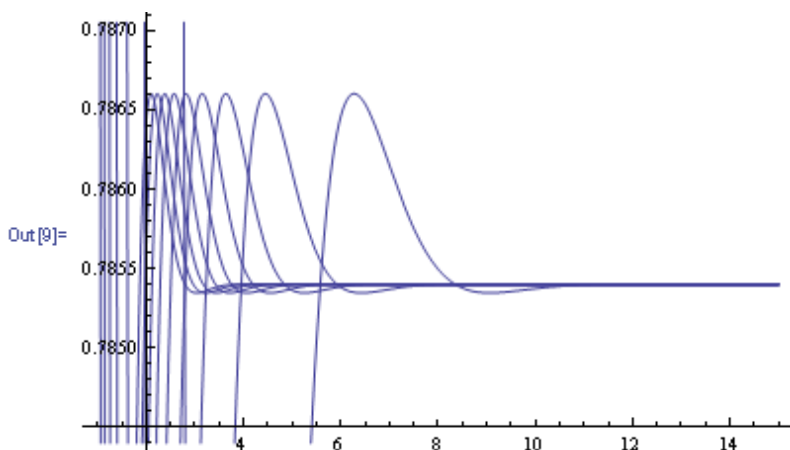


Рис.5.28. Фазо-частотная характеристика адмиттанса RC-линии при параметрическом задании длины линии

```
In[10]:= p5 = Plot[Table[ym, {f, 102, 105, 104}], {x, 1, 15}]
```

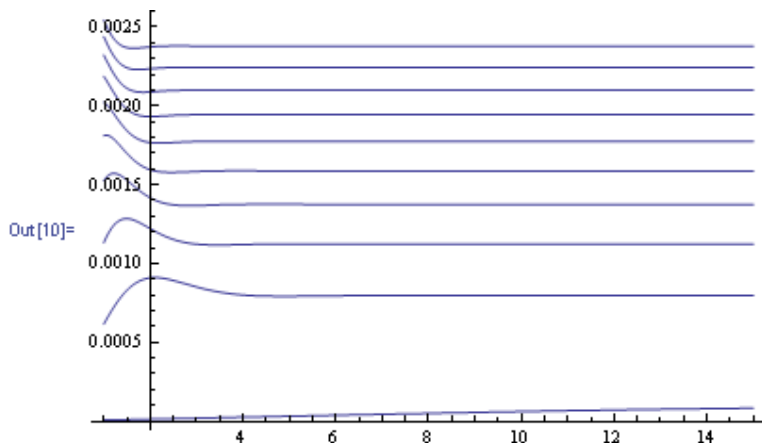


Рис.5.29. Амплитудная характеристика адмиттанса RC-линии при параметрическом задании частоты

```
In[11]:= p6 = Plot[Table[ay, {x, 1, 15, 2}], {f, 102, 105}]
```

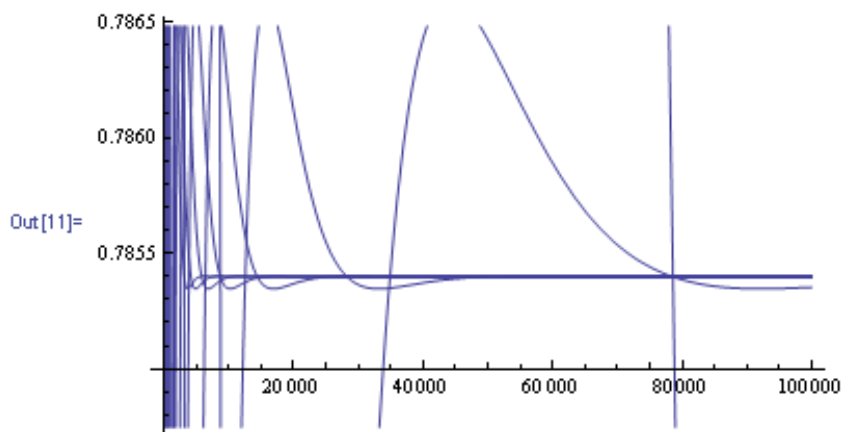


Рис.5.30. Фазо-частотная характеристика адмиттанса RC-линии при параметрическом задании длины линии

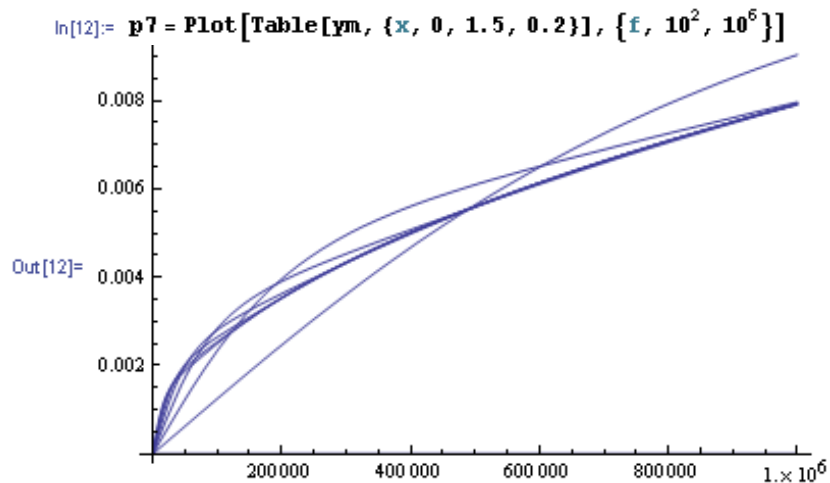


Рис.5.31. Амплитудно-частотная характеристика адмиттанса RC-линии при параметрическом задании длины линии

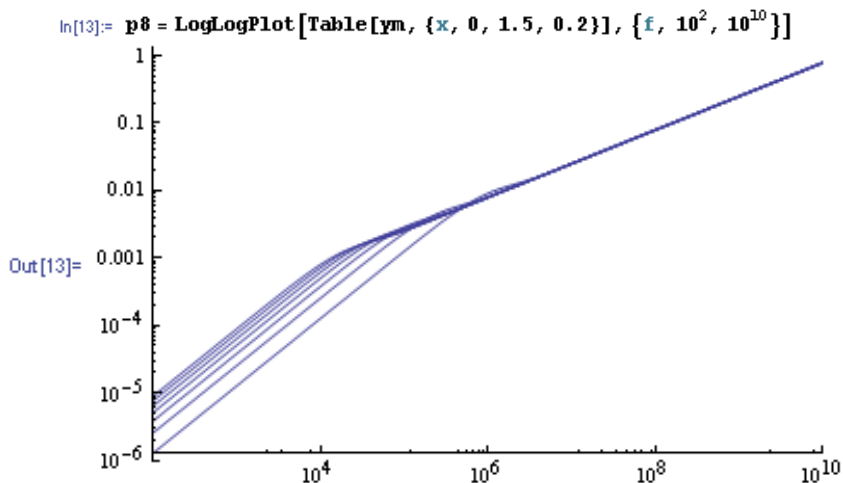


Рис.5.32. Амплитудно-частотная характеристика адмиттанса RC-линии при параметрическом задании длины (в логарифмическом масштабе).

Анализ частотных характеристик, приведенных выше, показывает, что в области высоких частот адмиттанс длинной линии RC-типа ведет себя как дифференциатор порядка  $\frac{1}{2}$  (подъем амплитудно-частотной характеристики равен 10 дцб/декаду, фазовый сдвиг равен  $+\pi/4$ ).

#### 5.4.2. Неоднородные длинные линии RC-типа

Реализация интегральных операторов дробных порядков, отличных от  $\frac{1}{2}$ , возможна на основе неоднородных длинных линий RC-типа. Ниже мы рассмотрим несколько примеров реализации интегральных операторов порядков  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$ . Прежде всего, необходимо отметить, что неоднородные длинные линии с одинаковыми законами изменения распределенных по длине линии параметров ( $r(x) = r_0 f(x)$ ;  $c(x) = c_0 f(x)$ ) проявляют свойства интегрального оператора порядка  $\frac{1}{2}$  независимо от вида функциональной зависимости  $f(x)$ . Для нашего рассмотрения мы используем случай неоднородной длинной линии с экспоненциальными зависимостями от пространственной координаты распределенных сопротивления и емкости вида:

$$\begin{aligned} r(x) &= r_0 \cdot e^{-\alpha x}, \\ c(x) &= c_0 \cdot e^{-\gamma x}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

где  $\alpha \neq \gamma$ . Позднее можно убедиться, что порядок интегрального оператора определяется следующей простой формулой, зависящей от показателей экспонент:

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}. \quad (5.33)$$

Выбор именно экспоненциальных длинных линий объясняется возможностью получения в системе Mathematica аналитического решения уравнения Риккати. Поиск других типов неоднородных длинных линий, реализующих интегральные операторы нецелых порядков, является одним из возможных направлений дальнейших исследований.

**Пример 5.1.** Линия с параметрами:

$$r(x) = r \cdot e^{-x}; c(x) = Ca \cdot e^{-2x}.$$

Фрагменты программы с комментариями приведены ниже.

Нахождение аналитического решения уравнения Риккати:

```
In[1]:= DSolve[{z'[x] - r * e^-x + i1 * 2 * pi * f * Ca * e^-2x * z[x]^2 == 0,
  z[0] == w}, z[x], x]
```

Аналитическое решение уравнения, полученное системой Mathematica, здесь не приводится в связи с его громоздкостью. Далее как и в случае однородных длинных линий решение этого уравнения определяется как функция, определяемая пользователем (user defined function): **zo[r\_, Ca\_, f\_, x\_, w\_]**.

Задание числовых параметров и упрощение выражения:

```
In[3]:= z0 = zo[1000, 10^-8, f, x, 0];
```

```
In[4]:= z1 = FullSimplify[z0]
```

```
Out[4]= (2000 ((1 + i1) Sqrt[f])^(2/3) Hypergeometric0F1[2/3, i1 e^-3 * f * pi / 450000] -
  Hypergeometric0F1[4/3, i1 f * pi / 450000] -
  ((1 + i1) Sqrt[e^-3 * x] Sqrt[f])^(2/3) Hypergeometric0F1[2/3,
  i1 f * pi / 450000] Hypergeometric0F1[4/3, i1 e^-3 * f * pi / 450000])) /
  (2 e^x ((1 + i1) Sqrt[e^-3 * x] Sqrt[f])^(2/3) Hypergeometric0F1[1/3,
```

$$\frac{i e^{-3 \times f \pi}}{450\,000} \text{HypergeometricOF1}\left[\frac{2}{3}, \frac{i f \pi}{450\,000}\right] -$$

$$\frac{1}{50\,000} i e^{-2 \times \left((1+i) \sqrt{f}\right)^{2/3} f \pi}$$

$$\text{HypergeometricOF1}\left[\frac{4}{3}, \frac{i f \pi}{450\,000}\right]$$

$$\text{HypergeometricOF1}\left[\frac{5}{3}, \frac{i e^{-3 \times f \pi}}{450\,000}\right]$$

Определение амплитудной и фазовой пространственно-частотных характеристик входного импеданса линии:

In[5]:= **zm = Abs[z1];**

In[6]:= **az = Arg[z1];**

Визуализация амплитудной пространственно-частотной характеристики входного импеданса линии:

In[7]:= **p1 = Plot3D[zm, {f, 10<sup>2</sup>, 10<sup>6</sup>}, {x, 1, 15},**

**PlotPoints → 100,**

**PlotLabel ->**

**"Space-frequency plot of magnitude of  
nonuniform long line impedance"]**

Space-frequency plot of magnitude of nonuniform long line impedance

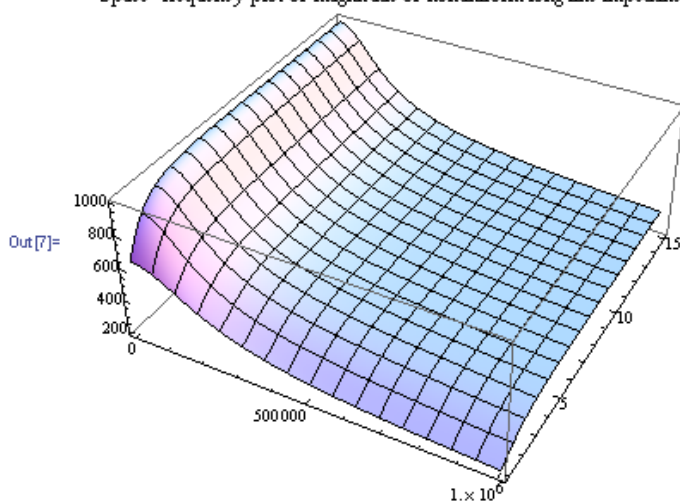


Рис.5.33. Амплитудная пространственно-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии

Визуализация фазовой пространственно-частотной характеристики входного импеданса линии:

```
In[8]:= p2 = Plot3D[az, {f, 102, 106}, {x, 1, 15},
    PlotPoints -> 100,
    PlotLabel ->
    "Space-frequency plot of angle of nonuniform
    long line impedance" ]
Space-frequency plot of angle of nonuniform long line impedance
```

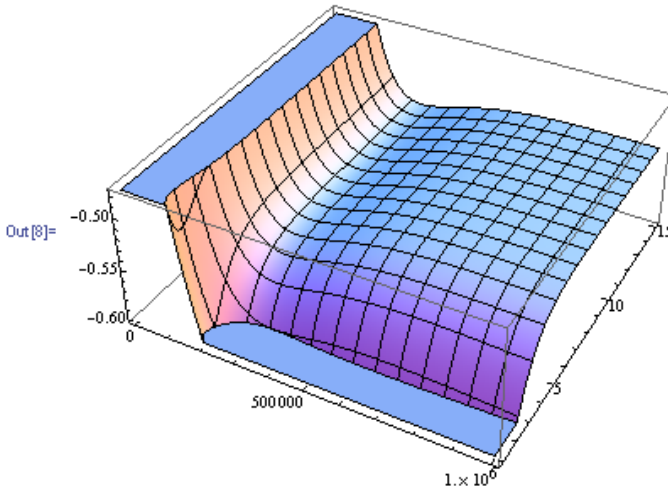


Рис.5.34. Фазовая пространственно-частотная характеристика входного импеданса линии

Определение и визуализация семейства фазово-частотных характеристик линии при фиксированных длинах отрезков линии от 1 до 13 с шагом 2 (показаны также линии фазовых углов  $-\pi/4$  и  $-\pi/6$  радиан):

```
In[9]:= p61 = Plot[{-π/4, -π/6, Table[az, {x, 1, 13, 2}]},
    {f, 102, 106}, PlotLabel -> "az(f), x=const",
    AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
```

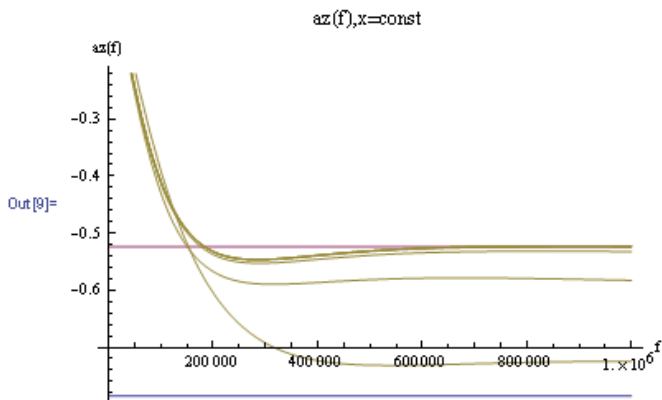


Рис.5.35. Семейство фазово-частотных характеристик входного импеданса линии (длины отрезков линии от 1 до 13 с шагом 2)

Определение и визуализация семейства фазово-частотных характеристик линии при фиксированных длинах отрезков линии от 1 до 5 с шагом 1:

```
In[10]:= p63 = Plot[{-π/4, -π/6, Table[az, {x, 1, 5, 1}]],
  {f, 10^2, 10^6}, PlotLabel -> "az(f),x=const",
  AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
```

Интересной особенностью фазово-частотных характеристик рис. 5.35 является наличие горизонтальных участков, свидетельствующих о наличии свойств интегральных операторов дробных порядков в диапазоне от 30 до 45 угловых градусов для линий с относительно малой длиной.

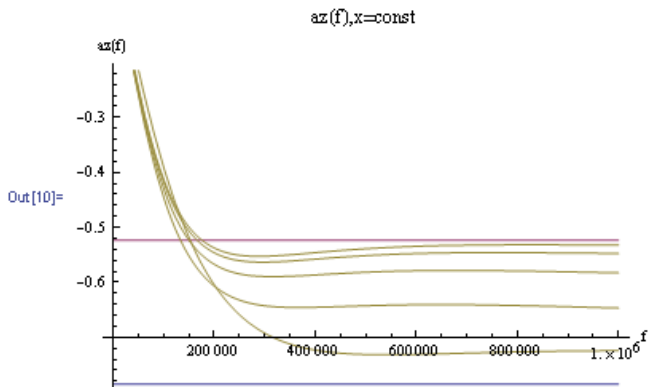


Рис.5.36. Семейство фазово-частотных характеристик входного импеданса неоднородной линии (длины отрезков линии от 1 до 5 с шагом 1)

Определение и визуализация фазо-частотной характеристики линии при  $x=14$  с указанием зоны допуска  $30^\circ \pm 2^\circ$ :

```
In[11]:= p69 = Plot[{ -29 π / 180, -31 π / 180, -π / 6, az /. x → 14 },
  {f, 104, 107}, PlotLabel -> "az(f), x=14",
  AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
az(f), x=14
```

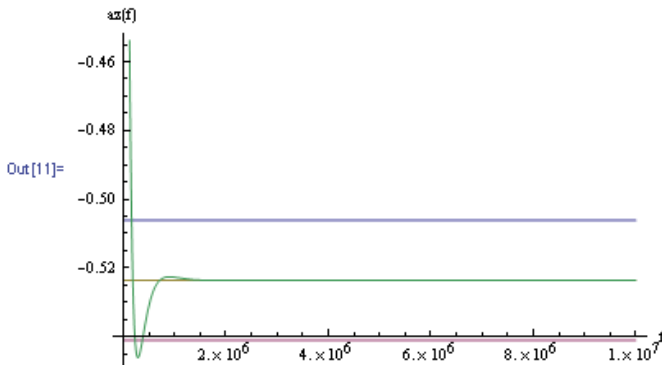


Рис.5.37. Фазово-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии (длина отрезка линии 14 ед. и зона допуска  $\pm 2^\circ$ )

Определение и визуализация семейства частотных характеристик линии в логарифмическом масштабе:

```
In[12]:= p00 = LogLogPlot[{{Table[zm, {x, 1, 11, 2}], 106/f},
  {f, 103, 108}, GridLines -> Automatic,
  PlotLabel -> "zm(f), x=1, 3, ..., 11",
  AxesLabel -> {"f", "zm(f)"}]
In[13]:= paa = LogLinearPlot[{{-π/6, Table[az, {x, 1, 11, 2}]},
  {f, 103, 108}, GridLines -> Automatic,
  PlotLabel -> "az(f), x=1, 3, ..., 11",
  AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
```



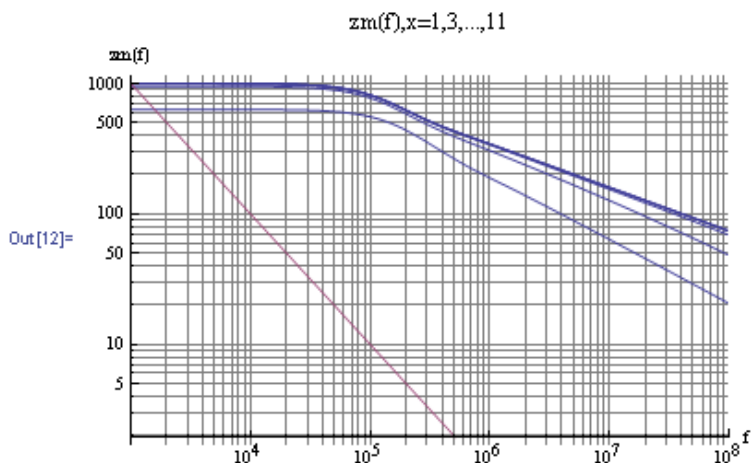


Рис.5.38. Семейство амплитудно-частотных характеристик входного импеданса неоднородной линии в логарифмическом масштабе

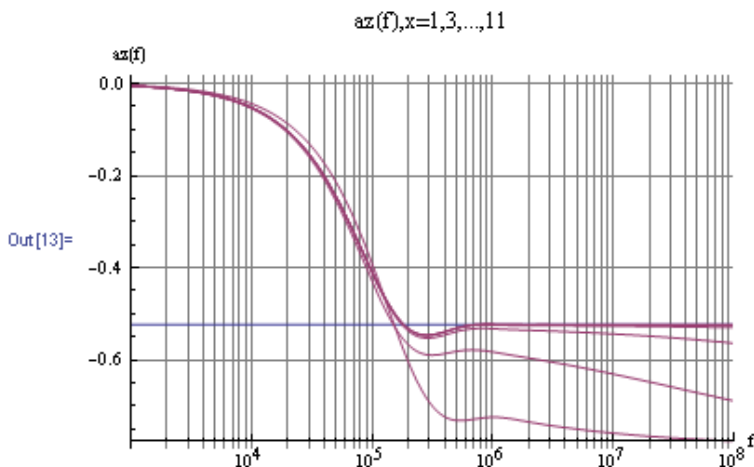


Рис.5.39. Семейство фазо-частотных характеристик входного импеданса неоднородной линии в полулогарифмическом масштабе

Определение и визуализация фазо-частотной характеристики импеданса отрезка длинной линии в полулогарифмическом масштабе.

```
In[14]= paz = LogLinearPlot[{-π/4, -π/6, az /. x → 15},
    {f, 102, 108}, PlotLabel -> "az(f), x=15",
    AxesLabel -> {"f", "az(f)"}, GridLines -> Automatic,
    PlotLabel -> "az(f), x=15", AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
```

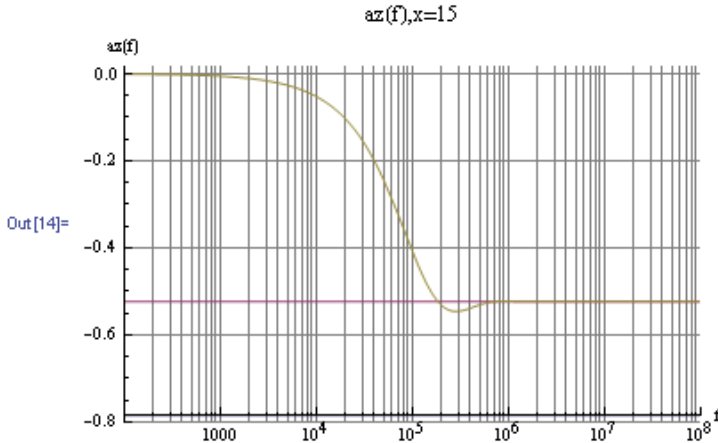


Рис.5.40. Фазо-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии в полулогарифмическом масштабе.

Анализ частотных характеристик линий рис. 5.35-3.40 показывает, что они в достаточно-широком диапазоне частот воспроизводят свойства интегрального оператора порядка  $1/3$ .

**Пример 5. 2.** Линия с параметрами:

$$r(x) = r \cdot e^{-2x}; c(x) = Ca \cdot e^{-x}.$$

Так как для исследования данного варианта линии использовалась программа примера 5.1, фрагменты и результаты ее работы приводятся без особых пояснений.

```
In[1]:= DSolve[{z'[x] - r * e^{-2*x} + i * 2 * pi * f * Ca * e^{-x} * z[x]^2 == 0, z[0] == w},
z[x], x]
```

```
In[3]:= z0 = zo[1000, 10^{-8}, f, x, 0];
```

```
In[4]:= zo = FullSimplify[z0]
```

```
Out[4]= (150 000 000 e^{-2 * x}
(e^{3 * x} sqrt{e^{-3 * x}} ((1 + i) sqrt{f})^{1/3} Hypergeometric0F1Regularized[1/3,
i e^{-3 * x} f pi / 450 000] Hypergeometric0F1Regularized[5/3, i f pi / 450 000] -
((1 + i) sqrt{e^{-3 * x}} sqrt{f})^{1/3} Hypergeometric0F1Regularized[1/3, i f pi / 450 000]
Hypergeometric0F1Regularized[5/3, i e^{-3 * x} f pi / 450 000])) /
(450 000 ((1 + i) sqrt{e^{-3 * x}} sqrt{f})^{1/3} Hypergeometric0F1Regularized[
```

```


$$\frac{1}{3}, \frac{i f \pi}{450000}] \text{Hypergeometric0F1Regularized}\left[\frac{2}{3}, \frac{i e^{-3 \times f \pi}}{450000}\right] -$$


$$i \sqrt{e^{-3 \times f \pi} \left( (1 + i) \sqrt{f} \right)^{1/3}} f \pi \text{Hypergeometric0F1Regularized}\left[\frac{4}{3}, \frac{i e^{-3 \times f \pi}}{450000}\right] \text{Hypergeometric0F1Regularized}\left[\frac{5}{3}, \frac{i f \pi}{450000}\right]$$

In[5]:= zm = Abs[zo];
In[6]:= az = Arg[zo];
In[7]:= p1 = Plot3D[z, {f, 102, 106}, {x, 1, 15}, PlotPoints -> 100,
PlotLabel ->
"Space-frequency plot of magnitude of nonuniform long
line impedance"]

```

Space-frequency plot of magnitude of nonuniform long line impedance

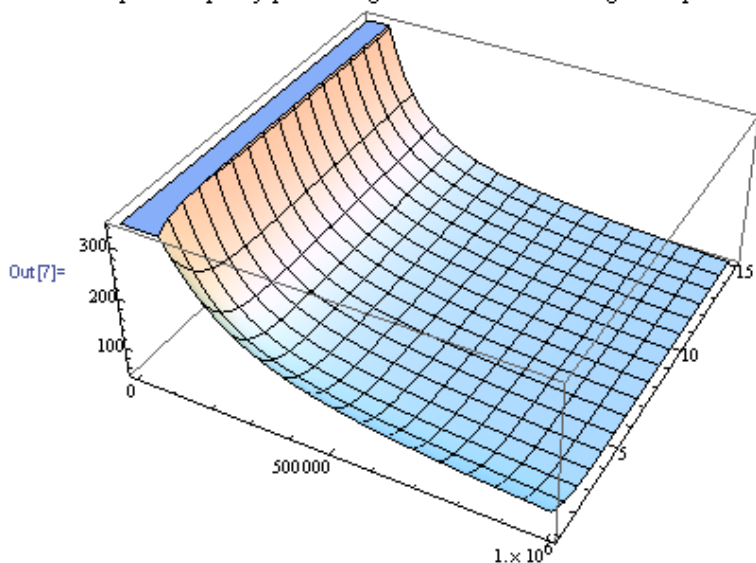


Рис.5.41. Амплитудная пространственно-частотная характеристика входного импеданса неоднородной линии

```

In[8]:= p2 = Plot3D[a, {f, 102, 106}, {x, 1, 15}, PlotPoints -> 100,
PlotLabel ->
"Space-frequency plot of angle of nonuniform long line
impedance"]

```

Space–frequency plot of angle of nonuniform long line impedance

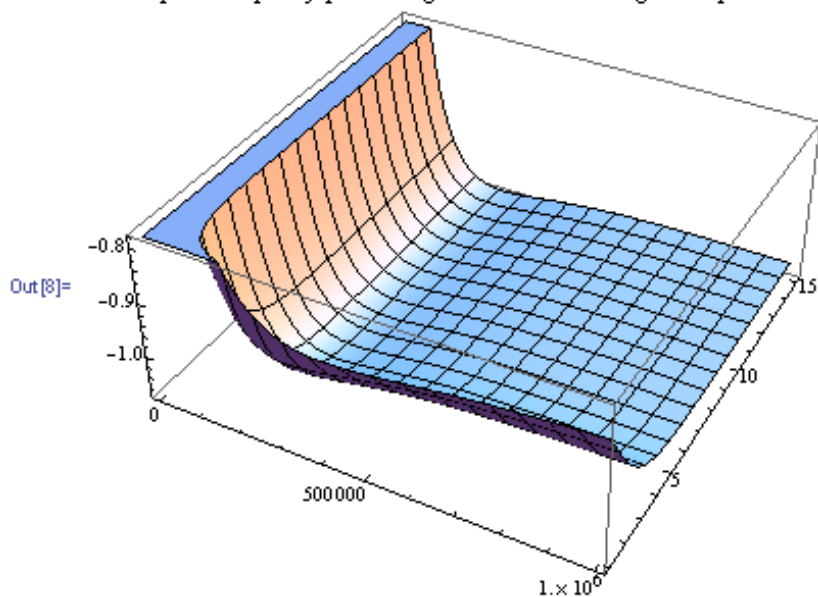


Рис.5.42. Фазовая пространственно-частотная характеристика входного импеданса линии

```

In[10]:= p00 = LogLogPlot[{{Table[z0, {x, 2, 10, 2}],  $\frac{10^6}{f}$ }, {f, 10^3, 10^8}},
GridLines -> Automatic, AxesLabel -> {"f", "z0(f)"}]

```

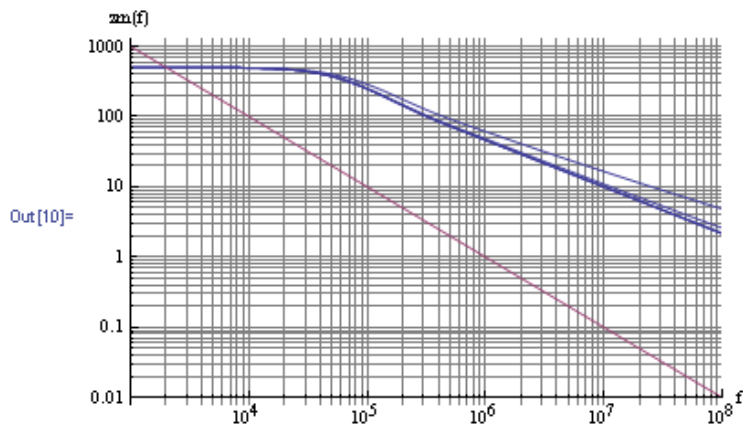


Рис.5.43. Семейство амплитудно-частотных характеристик входного импеданса линии в логарифмическом масштабе

```
In[11]:= paa = LogLinearPlot[{{ $-\frac{\pi}{3}$ , Table[az, {x, 2, 10, 2}]}, {f, 103, 108}},
GridLines -> Automatic, AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
```

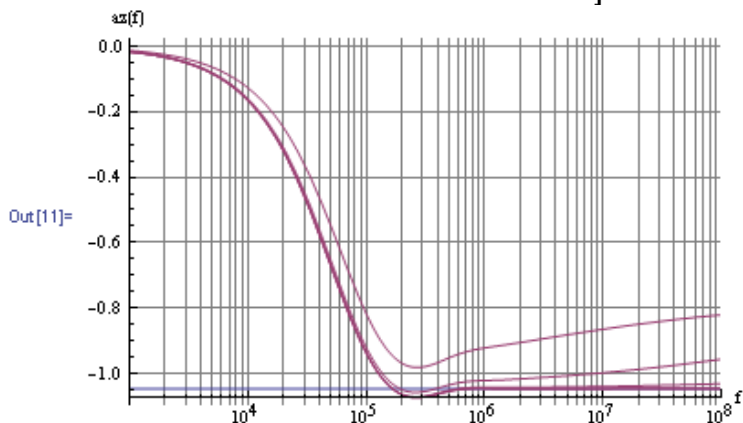


Рис.5.44. Семейство фазо-частотных характеристик входного импеданса линии в полулогарифмическом масштабе

```
In[13]:= p10 = LogLinearPlot[{{ $-\frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{3}$ , az /. x -> 12}, {f, 103, 108}},
GridLines -> Automatic, AxesLabel -> {"f", "az(f)"}]
```

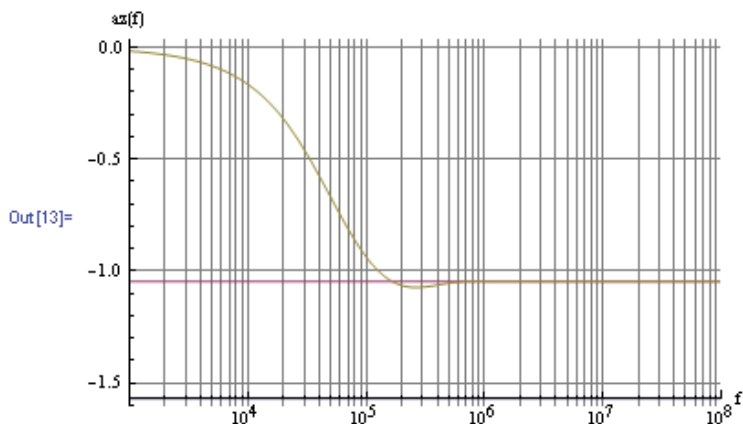


Рис.5.45. Фазо-частотная характеристика входного импеданса линии в полулогарифмическом масштабе.

Анализ частотных характеристик линии рис. 5.41-5.45 показывает, что они в достаточно-широком диапазоне частот воспроизводят свойства интегрального оператора порядка 2/3.

## 5.5. Аппроксиматоры интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков на операционных усилителях

В рассмотренных выше электронных цепях интегродифференциальные операторы реализованы в виде импедансов (адмиттансов). Это предопределяет физическую основу сигналов, которые подвергаются дифференцированию (интегрированию). Если входной сигнал представляет собой ток, его интеграл будет являться напряжением и наоборот. В системах автоматического управления и электронных моделях динамических систем часто необходимо обеспечить однородность физической природы сигналов. Чаще всего используются сигналы в виде напряжения. Для обеспечения такой однородности может быть использована широко распространенная в аналоговой вычислительной технике и автоматическом управлении техника операционных усилителей. Для этого необходимо в качестве входных цепей и в качестве цепей обратной связи операционных усилителей использовать как традиционные элементы (резисторы, конденсаторы, индуктивности), так и двухполюсники, реализующие интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков. В ряде работ такие нетрадиционные элементы электронных цепей называют фракторами (fractor) [11].

Рассмотрим возможные структуры активных электронных цепей, реализующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков. Будем использовать условное обозначение фрактора, предложенное в работе [11]. Эта символика напоминает, что фрактор занимает промежуточное положение между резистором и конденсатором (рис. 3.44).

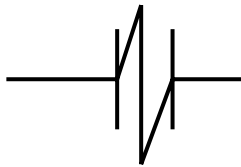


Рис. 5.46. Условное обозначение фрактора (элемента, аппроксимирующего адмиттанс типа  $(j\omega)^\beta$ )

Если в цепь обратной связи операционного усилителя включить фрактор, а на вход усилителя подавать сигнал через резистор, мы получим аналоговую реализацию интегратора нецелого порядка (рис. 5.47). В этой схеме входной сигнал  $\hat{U}_1$  в форме напряжения преобразуется с помощью резистора  $R_0$  в ток, поступающий в цепь

обратной связи (фрактор), с помощью которого он преобразуется в выходной сигнал  $\hat{U}_2$  в соответствии с выражением:

$$\hat{U}_2 = -\frac{Z_\alpha}{R_0} \cdot \hat{U}_1. \quad (5.34)$$

Так как импеданс фрактора приближенно воспроизводит интегральный оператор порядка  $\alpha$ , схема рис. 5.47 является квазианалогом интегратора нецелого порядка.

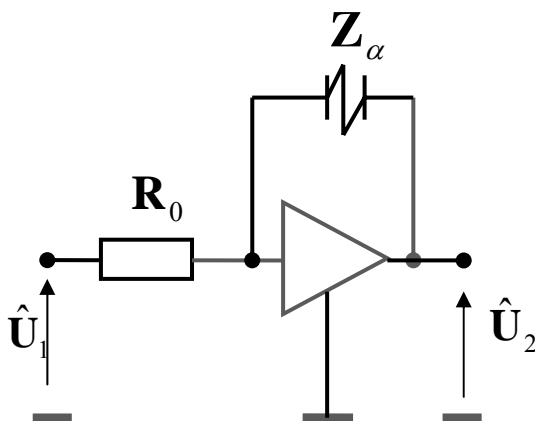


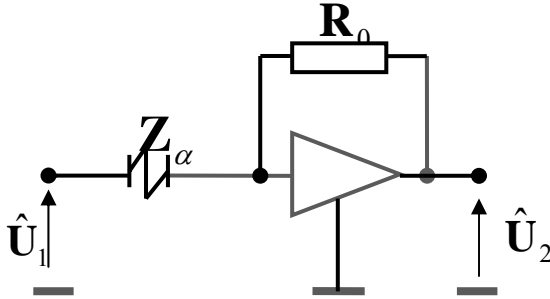
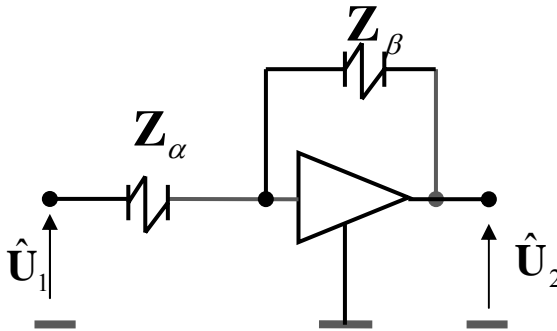
Рис.5.47. Активная аппроксимация интегратора порядка  $\alpha$ .

Если фрактор включить в качестве входного элемента операционного усилителя, а резистор – в цепь обратной связи, мы получим квазианалог дифференциатора порядка  $\alpha$ :

$$\hat{U}_2 = -\frac{R_0}{Z_\alpha} \cdot \hat{U}_1 \quad (5.35)$$

Схема такого дифференциатора изображена на рис. 5.48.

Используя два фрактора с различными нецелыми порядками интегрального оператора можно реализовать дифференциаторы и интеграторы различных разностных порядков. Схема такого интегратора (дифференциатора) приведена на рис. 5.49. Вместо любого из фракторов могут быть использованы конденсаторы для реализации различных порядков дифференциальных операторов

Рис.5.48. Активная аппроксимация дифференциатора порядка  $\alpha$ .Рис.5.49. Активная аппроксимация интегратора порядка  $\beta - \alpha$  при  $\beta > \alpha$   
(дифференциатора порядка  $\alpha - \beta$  при  $\alpha > \beta$ ).

Рассмотренные подходы к аппроксимационному синтезу электронных цепей, реализующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков могут быть использованы для построения контроллеров нецелых порядков и для моделирования динамических систем, математическими моделями которых являются интегро-дифференциальные уравнения нецелых порядков.



### Список литературы к Главе 5

1. Карлащук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. — М.: «СОЛОН-Пресс», 2003. — 736 с.
2. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Мат. Сб.. — 1868. — 3. — С. 1 — 68.
3. Нигматуллин Р.Ш., Белавин В.А. Электролитический дробно-дифференцирующий и интегрирующий двухполюсник // Труды Казанского авиац. Ин-та. — вып. 82. Радиотехника и электроника. — Казань, 1964. — С. 58 — 67.
4. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. — Киев: Наук. Думка, 1967. — 568 с.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
6. Симак Л.А. Анализ неоднородных RC- цепей с распределенными параметрами и аппроксимация проводимостей с заданной частотной характеристикой // Мат. 3 Всесоюзной науч.-техн. Конф. "Проблемы нелинейной электротехники". — Киев: Наук. Думка, 1988. — С. 90 — 93.
7. Симак Л.А. Аппроксимационный синтез электронных цепей, моделирующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков // Электроника та системи управління. — 2005, № 1. — С. 140-151.
8. Симак Л.А. Дифференциальные преобразования на основе производных дробного порядка // Электрон. Моделирование. — 1986. — 8, № 4. — С. 54-60.
9. Симак Л.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление. Вопросы теории, моделирования и применения. Киев, 1987. — 56 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; № 98).
10. Симак Л.А. Математические модели реактивных элементов дробного порядка электрических цепей переменного синусоидального тока // Электрон. моделирование. — 1986. — 8, № 1. — С. 95 — 97.
11. Bohannan G.W. Analog Realization of a Fractional Control Element — Revisited // Wavelength Electronics, Inc., Bozeman, Montana, 59771, Dept. of Physics, Montana State University, Bozeman, Montana, 59717. — 4 p.

12. Carlson G.E., Halijak C.A. Simulation of the fractional derivative operator and the fractional integral operator // Kansas. State Univ. Bulletin. – 1961. – 45. – P. 1-22.
13. "Fractional Calculus & Applied Analysis" – An International Journal for Theory and Applications, ISSN 1311-0454.
14. Haba T.C., Loum G.L., Zoueu J.T., Ablart G. Use of a Component with Fractional Impedance in the Realization of an Analog Regulator of Order  $\frac{1}{2}$  // Journal of Applied Sciences 8(1), 2008. – P.59-67.
15. Hashimoto K., Takahashi S., Amano H. Realization of a noninteger-order integrator // Elec.Eng. Japan. – 1969. – 89, No 11. – P. 94–101.
16. Ichise M., Nagayanagi Y., Kojima T. An Analog Simulation of Non-integer Order Transfer Functions for Analysis of Electrode Processes // J. Electroanal.Chem.. – 1971. – Vol. 33. – p.p. 253-265.
17. Kaplan T., Gray L.J. Effect of disorder on a fractal model for the ac response of a rough interface // Phys. Rev. – 1985. – No 11. – P.7360--7366.
18. Nishimoto Katsuyuki (Ed.) Fractional Calculus and Its Applications // Proc. of the International Conf. held at the Center of Nihon University, Tokyo, May 29 – June 1, 1989 // College of Engineering, Nihon University, Japan, 1990. – 284 p.
19. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. – New-York & London: Academic Press, 1974. – 234 p.
20. Oustaloup A. Systemes asservis d'ordre  $\frac{1}{2}$ , 1,  $\frac{3}{2}$ , 2: une etude comparative aide a les choisir // L'Onde Elec. – 1979. – 59, No 2, P. 41 – 47.
21. Oustaloup A., Sabatier J., Moreau X. From fractal Robustness to the CRONE Approach // ESAIM: Proc. Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications. – 1995. – Vol.5. – p.p. 177--192.
22. Petras I., Podlubny I., O'Leary P., Dorcak L., Vinagre B. Analogue Realization of Fractional Order Controllers. FBERG, Technical University of Kosice, Kosice, 2002, 84 p., ISBN 8070996277.
23. Pipes Louis A. Computation of the Impedances of Nonuniform Lines by a Direct Method // A.J.E.E. Transactions of the Amer. Inst. Electr.Eng.. – 1956. – Vol. 75. – Pt.1. – p. p. 551-554.
24. Podlubny I., Petras I., Vinagre B.M., O'leary P., Dorcak L. Analogue realization of fractional order controllers // Nonlinear Dynamics. – 2002. – Vol 29. – p.p. 281--296.
25. Poinot T., Trigeassou J.-C. A method for modeling and simulation of fractional systems // Special Issue of Signal Processing. – 2003. – Vol. 83, No 11. – p.p. 2319-2333.
26. Roy D.S.C., Shenoj B.A. Distributed and lumped realization of a constant argument impedance // J. Franklin Inst. – 1966. – 282, No 5. – P. 318--329.

27. *Roy D.S.C.*, On the Realization of a Constant – Argument Immitance or Fractional Operator // IEEE Transactions on Circuit Theory. – 1967. – Vol.CT-14, No. 3. – p.p. 264-274.
28. *Xue D., Chen Y.-G., Atherton D.P.* Feedback Control Systems – analysis and design with MATLAB 6. London: Springer-Verlag. -- 2002. – 463 p.
29. *Nakagava M.* Chaos and Fractals in Engineering. – World Scientific Publishing Company, 1999. – 944 p.

## Глава 6. ПРИМЕНЕНИЯ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В НАУКЕ, ТЕХНИКЕ, ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

В настоящее время стремительно растет число применений дробного исчисления в различных областях науки, техники, естествознания, экономики и других отраслях человеческой деятельности, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. В данной главе, носящей, в основном, обзорно-реферативный характер, рассмотрены некоторые подходы, близкие научным интересам авторов.

### 6.1. Проникновение дробных дифференциалов в фундаментальные законы естествознания

В 1991 г. Westerlund S. [79] предложил использовать дробные производные для описания процесса распространения плоских электромагнитных волн в изотропной однородной диэлектрической среде с потерями. Уравнение для напряженности электрического поля в одномерном случае имеет вид:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \chi_0 E^{(\nu)} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0,$$

где:  $E$  – напряженность электрического поля,

$\mu_0, \varepsilon_0, \chi_0$  – константы,

$E^{(\nu)}$  – дробная производная напряженности электрического поля по времени порядка  $\nu$  ( $0 < \nu < 2$ ). Позднее им же [80] было предложено в уравнениях Максвелла соотношения  $D = \varepsilon E$  и  $B = \mu H$  ( $D$  – электрическое смещение,  $B$  – магнитная индукция) заменить их дробными обобщениями:  $D = \varepsilon E^{(\nu-1)}$  и  $B = \mu H^{(\nu-1)}$ , что фактически вводило в систему уравнений Максвелла интегралы дробного порядка от  $E$  и  $H$  при  $0 < \nu < 1$ .

M. Caputo в 1993 г. в работе по исследованию электролитически поляризуемой среды [16] предложил более общее выражение для зависимости между  $D$  и  $E$ :

$$\gamma D^{(\nu)} + \alpha D = \sigma E + \varepsilon E^{(\nu)},$$

где  $\gamma, \alpha, \sigma, \varepsilon$  – константы, а  $\nu$  – нецелый порядок дифференцирования по времени. Это позволило при некоторых упрощающих предпо-

ложениях свести уравнения Максвелла в одномерном (по пространству) случае к следующей системе двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial^2 D}{\partial t^2},$$

$$\gamma D^{(\nu)} + \alpha D = \sigma E + \varepsilon E^{(\nu)}.$$

Westerlund S. [80] предложил обобщение второго закона Ньютона и показал, что закон Гука в теории упругости ( $F = kx$ ), Ньютоновская модель вязкой жидкости ( $F = kx'$ ) и второй закон Ньютона ( $F = kx''$ ) могут рассматриваться как частные случаи более общего соотношения вида:  $F = kx^{(\beta)}$ , где порядок производной  $\beta$  может быть любым действительным числом.

Не осталась без внимания и теория относительности Эйнштейна и связанный с ней известный «парадокс близнецов». Известному соотношению теории относительности  $E = m \cdot c^2$  сопоставляется выражение для каузальной модели массы, которая

является функцией времени:  $\frac{d^{-2\alpha}W(t)}{dt^{-2\alpha}} = m(t) \cdot c_o^2$ , где  $0 < \alpha < 1$ .

Таким образом, дополнением к уравнениям теории относительности является, по существу, связь массы с дробным интегралом энергии. Подробнее об этом можно прочитать в [81]. Вестерлунду принадлежит также крылатая фраза: «*Неживая материя имеет память*. Иначе говоря, мы можем сказать, что Природа работает с дробными производными по времени» [79].

Применению дробного исчисления в космологии посвящена работа [26], в которой вариационные принципы механики обобщаются путем введения принципа вариационного действия, связанного с дробной производной функции Лагранжа. Нестандартность подхода автора заключена в том, что в рамках принципа дробного действия гравитационная константа  $G$  должна быть дополнена определенным затухающим фактором, определенным с помощью выражения:  $\Delta G = 3(1 - \alpha)H / 4\pi G\rho T$ , где  $H$  - параметр Хаббла,  $\rho$  - плотность материи,  $T$  - космическое время,  $\alpha$  - дробный порядок производной. Указывается, что в последние несколько десятилетий доказана полезность дробного исчисления в различных областях науки, таких как классическая и квантовая физика, теория поля, физика твердого тела, динамика жидкости, турбулентность, общая химия, нелинейная биология, стохастический анализ, нелинейная теория управления, обработка изображений.

## 6.2. Автоматическое управление и обработка сигналов

Применения дробного исчисления в автоматическом управлении можно подразделить на две группы. Первую образуют методы математического и компьютерного моделирования систем дробного порядка, в которых проявляются свойства дробной динамики (обычно это связано с наличием сигналов со степенной зависимостью во временной и (или) частотной областях). Ко второй относятся методы использования дробного исчисления для синтеза систем управления динамическими системами как целого, так и дробного порядков, в частности, синтеза контроллеров нецелого порядка.

Математическая модель линейной динамической системы с постоянными параметрами дробного порядка в случае единственной переменной имеет вид:

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t), \end{aligned}$$

где:  $a_i, b_j$  – коэффициенты уравнения,  $\alpha_i, \beta_j$  – дробные порядки дифференциальных операторов,  $y(t)$  – функция выхода динамической системы (функция состояния),  $u(t)$  – функция входа динамической системы (функция управления). В случае нулевых начальных условий передаточная характеристика динамической системы в области преобразования по Лапласу принимает вид:

$$W(p) = \frac{b_m p^{\beta_m} + b_{m-1} p^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 p^{\beta_0}}{a_n p^{\alpha_n} + a_{n-1} p^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 p^{\alpha_0}}.$$

Решение классических проблем теории автоматического управления (устойчивость, наблюдаемость, робастность и т.п.) в случае систем дробного порядка оказываются существенно сложнее из-за трансцендентности передаточных характеристик таких систем. С подробностями можно познакомиться в работе [84].

В теории автоматического управления широко распространены и применяются элементы системы управления, получившие название PID – контроллеров. [54] Они представляют собой совокупность пропорционального, интегрирующего и дифференцирующего звеньев. Математическая модель классического PID – контроллера является взвешенной суммой входного сигнала, его интеграла и производной:

$$u(t) = K \cdot e(t) + T_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}$$

Передаточная функция контроллера в области преобразования по Лапласу имеет вид:

$$G(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K + T_i \cdot p^{-1} + T_d \cdot p.$$

Контроллеры дробного порядка обозначаются аббревиатурой  $PI^\lambda D^\delta$ , их математическое описание во временной области имеет вид:

$$u(t) = K \cdot e(t) + T_i \cdot D_i^{-\lambda} e(t) + T_d \cdot D_i^\delta e(t).$$

Передаточная функция дробного контроллера в операционной области по Лапласу имеет вид:

$$G(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = K + T_i \cdot p^{-\lambda} + T_d \cdot p^\delta.$$

Применения дробного исчисления в автоматическом управлении и робототехнике неразрывно связаны с цифровой обработкой сигналов. В частности, в рамках 41-й конференции Института инженеров-электриков по принятию решений и автоматическому управлению, которая состоялась в Лас-Вегасе в декабре 2002 г. [31] был организован специальный симпозиум по применению дробного исчисления в автоматическом управлении и роботике. На этом симпозиуме были прочитаны следующие лекции:

1. Историческое введение
2. Основы дробного исчисления
3. Системы дробного порядка и управляющие воздействия дробного порядка
4. Аналоговая и цифровая реализация операторов дробного порядка
5. Робастное управление
6. Другие применения в автоматическом управлении
7. Роботика
8. Идентификация систем

Кроме этого, были представлены материалы по программным средствам системы Matlab для реализации применений дробного исчисления в автоматическом управлении, а именно:

- Программные средства в Matlab для реализации контроллеров дробного порядка,
- Программные средства для применений Matlab в системах идентификации,

- Программные реализации контроллеров дробного порядка в Matlab, ориентированные на программирование траекторий роботов с применением дробного исчисления.

В материалах симпозиума содержится обширная библиография по дробному исчислению и последние публикации и события, связанные с развитием этого направления.

Укажем на ряд работ, положивших основу использования дробного исчисления в автоматическом управлении и роботике.

В работах S. Manabe [46, 47] обсуждаются основные проблемы, связанные с частотными и переходными характеристиками систем управления, передаточная функция которых в режиме без обратной связи описывается формулой  $1/s^k$ . Рассмотрены вопросы исследования нелинейных систем с насыщением, содержащих интегрирующие звенья нецелого порядка. Исследуются величины перерегулирования в переходном режиме, время установления, приводится метод вычисления переходных характеристик и вопросы реализации. В частности, отмечается, что интеграл нецелого порядка может быть точно представлен только системой с распределенными параметрами. Таким образом, обычные системы управления не могут содержать элементы интегрирования нецелого порядка. Однако, остается непреложным фактом, что такие системы имеют весьма желательные особенности, а опыт показывает, что многие попытки, направленные на улучшение нелинейных систем управления возвращают нас к конструированию интегральных систем нецелого порядка или систем с фазовым сдвигом, не зависящим от частоты, путем использования методов аппроксимации.

В докладе I.Podlubny и др. [61] рассматриваются некоторые методы дробного исчисления в приложении к моделированию и управлению динамическими системами. Сп. лит. – 18 назв.

В работе I.Petras и др. [55] представлен синтез контроллеров дробного порядка, анализ их поведения и методы моделирования. Обращается внимание на неадекватное представление нецелочисленных систем целочисленными моделями и различное их поведение в режиме замкнутой обратной связи. Сп. лит. – 10 назв.

В работе I.Podlubny [60] рассматриваются динамические системы произвольного действительного (дробного) порядка. Предлагается концепция контроллеров дробного порядка, включающих в себя дробного порядка интегратор и дробного порядка дифференциатор. На примере приводятся доказательства преимуществ динамических систем с контроллерами нецелых порядков. Сп. лит. – 28 назв.



Класс линейных динамических систем дробного порядка с постоянными коэффициентами и запаздыванием рассмотрен Y.Q.Chen и K.Moore [19]. Получены границы аналитической стабильности таких систем с использованием функции Ламберта. Аналитические результаты иллюстрируются числовыми примерами. Сп. лит. – 30 назв.

Использованию искусственных нейронных сетей для реализации контроллеров нецелого порядка посвящена работа S.Abbisio, R.Caponetto и др. [8]. Рассмотрена аппаратная реализация производных и интегралов дробного порядка на основе формулы Грюнвальда – Летникова. В выполненных экспериментах нейронная сеть насчитывала около 1000 весовых коэффициентов.

В работе [13] анализируются свойства систем с явлениями люфта и удара. Показано, что этот тип нелинейности может в перспективе анализироваться методами дробного исчисления. Динамика дробного порядка иллюстрируется с использованием диаграмм Найквиста. Список лит. 32 назв.

В работе F.B.M.Duarte, J.A.T.Machado [23] рассмотрено применение алгоритмов дробного исчисления для управления траекториями движения многозвеного робота-манипулятора. Многозвеновый робот-манипулятор имеет ряд преимуществ по сравнению с обычными, так как допускает оптимизацию траектории как в свободном пространстве, так и в условиях наличия препятствий (например, монтажного затеснения). Однако, при реализации алгоритмов управления могут возникать хаотические движения из-за возможности неоднозначных положений отдельных звеньев робота. Использование в системах формирования траектории элементов с характеристиками интегро-дифференциаторов нецелого порядка позволило оптимизировать траектории и сформировать условия, исключающие хаотические движения.

В работе L.Dorsak и др. [24] представлены некоторые альтернативные типы математического описания и методы решения динамических систем дробного порядка в пространстве состояний. Показаны различия в постановке задач в пространстве состояний для динамических систем целого и дробного порядка, важность инициализационной функции для систем дробного порядка. Обсуждается связь с теорией управления в системах с обратной связью. Приводятся результаты моделирования. Используются формулы Грюнвальда-Летникова и z-преобразования. Сп. лит.- 24 назв.

В работе P.W.Ostalczyk, T.Rybicki [49] определяется показатель качества для систем с обратной связью, включающих в себя CRONE – контроллеры. Рассмотрен числовой пример динамической системы второго порядка с CRONE –контроллером в цепи обратной

связи. Анализируются области неопределенности на диаграммах Найквиста. Список лит.- 9 назв.

В работе Y.Q.Chen и K.L.Moore [18] представлены два метода дискретизации дифференциатора дробного порядка. Первый связан с реализацией прямой рекурсивной дискретизации оператора Тастина. Второй является прямой дискретизацией оператора Аль-Алаоуи с помощью аппарата цепных дробей. Аппроксимационная дискретизация является минимально-фазовой и устойчивой. Приведены вычислительные процедуры в среде MATLAB и иллюстративные примеры. Сп. лит. – 24 назв.

В работе D.Xue и Y.Q.Chen [83] в краткой форме приводятся 4 типичных контроллера дробного порядка, а именно: TID-контроллер (*Titled Proportional and Integral*), CRONE-контроллер (*Contrôle Robuste d'Ordre Non Entier*),  $PI^\lambda D^\mu$ - контроллер и дробный стабилизирующий компенсатор. Главная цель работы – обратить внимание к необычным путям робастного управления на основе дробного исчисления. Сп. лит. – 32 назв.

В работах I.Petras, Y.Q.Chen, B.M.Vinagre и др. [56, 76] исследуется использование дробного исчисления в системах адаптивного управления, основанного на модели-прототипе. Иллюстрируются на примерах преимущества метода и делаются замечания относительно направлений дальнейших исследований.

D.Xue и Y.Q.Chen [83] в общих чертах ввели 4 типа наиболее употребительных дробных контроллеров. Основные идеи и технические формулировки представлены со сравнительными комментариями. Основная цель работы – обратить внимание на нетрадиционные пути развития робастного контроля на основе использования дробного исчисления. Сп. лит. – 32 назв.

В работе N.M.Fonseca Ferreira и др. [29] реализуются алгоритмы дробного порядка в гибридном управлении роботов – манипуляторов на основе соотношения: положение / усилие. Анализируются во временной и частотной областях эффективность и робастность систем. Исследуется также явления динамической гибкости и люфта. Демонстрируются на основе сравнения преимущества подхода с использованием алгоритмов управления дробного порядка.

В работе I.Podlubny и др. [62] предлагается подход к реализации контроллеров дробного порядка на основе разложения в цепные дроби. Приводятся структурные схемы цепей, реализующих цепные дроби.

В работе P. Ostalczyk [50] представлены основные свойства интегратора дробного порядка (линейного, в дискретном времени с постоянными параметрами). Анализируется система с обратной связью, включающая дробный интегратор. Обсуждаются переходные и

частотные характеристики. В качестве численного примера предлагается аппроксимационная реализация интегратора дробного порядка. Сп. лит. – 9 назв.

Моделирование операции дифференцирования дробного порядка с использованием концепции систем с дискретным временем может рассматриваться в качестве подхода по обработке сигналов с целью изобретения алгоритмов численного дифференцирования на основе интеграла свертки. Существует множество численных алгоритмов дробного дифференцирования, предложенных в математической литературе. Эти алгоритмы базируются главным образом на определении дробного дифференцирования в форме Грюнвальда - Летникова. Точность этих алгоритмов улучшается путем увеличения частоты отсчетов сигнала. Однако, для некоторых сигналов, в особенности тех, которые могут моделироваться с помощью полиномов конечных степеней, подход на основе формул Грюнвальда-Летникова не всегда приводит к точным дифференциаторам. В работе *Saed Samadi* и др. [64] разработан дифференциатор с дискретным временем, основанный на разложении в ряд Ньютона. Система воспроизводит производную дробного порядка сигнала в каждый момент времени на основе текущего отсчета и  $N$  предыдущих отсчетов сигнала. Выходной сигнал является точной производной для любого входного сигнала, который может моделироваться полиномом степени не больше  $N$ . Получены также в замкнутой форме выражения для коэффициентов дифференциаторов как целого, так и дробного порядков. Сп. Лит.- 17 назв.

Работа Wang Jifeng и Li Yuankai [35] посвящена анализу в частотной области систем управления дробного порядка. Найдено соотношение частотных свойств систем дробного и целого порядков на основе анализа диаграмм Боде и контуров Найквиста. Сп. лит. 9 назв.

Практическому использованию PI-контроллеров дробного порядка и процедуре настройки контроллеров для системы управления теплофизическим экспериментом посвящена работа T.Bhaskaran, Y.Q.Chen и G.Bohannan [14]. Показано, что включение в систему управления динамической системой контроллеров дробного порядка улучшает устойчивость объекта и уменьшает перерегулирование. Использованию контроллеров нецелого порядка для решения проблем автоматизированного электропривода посвящен доклад Волянского Р.С. и Садового А.В. [2].

Новый метод аппроксимации дробных производных и его применение в управлении нелинейными системами изложен в работе J.Machado и A.Galhano [45]. Авторами реализована формула Грюнвальда-Летникова, в области  $z$ -преобразования. Эффективность

контроллеров, синтезированных по предлагаемому методу проверялась на примере нелинейного актюатора с обратной связью, который подтвердил высокую точность и робастность системы.

### 6.3. Физика, электроника

Обзор исследований по использованию дробных производных в релаксационных процессах приведен в работе F.Mainardi и R.Gorenflo [42]. Целью обзора являлся пересмотр основных положений теории релаксационных процессов и, в основном, линейной вязкоупругости, с учетом концепции дробного исчисления. Сп. лит. : 120 назв.

Математическая модель аномальной диффузии форме уравнения в частных производных смешанного порядков рассмотрена в работе [20]. Исследовался одномерный (по пространству) случай:

$$\frac{{}^C \partial^\alpha}{dt^\alpha} u(x, t) = k_\alpha \frac{\partial^2}{dx^2} u(x, t), \quad \text{где } \frac{{}^C \partial^\alpha}{dt^\alpha} - \text{ производная дробного порядка } \alpha \text{ по Капуто.}$$
 Представлены два численных метода – конечных разностей и конечных элементов.

Westerlund в работе [79] предложил математическую модель конденсатора в виде интегрального уравнения дробного порядка для заряда и в виде дифференциального уравнения смешанного порядка для тока:

$$q(t) = C_0 \cdot u(t) + C_\chi \cdot \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}}, \quad t > 0, n < 1;$$

$$i(t) = C_0 \cdot \frac{du(t)}{dt} + C_\chi \cdot \frac{d^n u(t)}{dt^n},$$

$$t > 0, n < 1;$$

Использование дробного исчисления в теоретической электродинамике связано с концепцией мультиполей [27]. Точечные мультиполи (монополи, диполи, квадраполи и т.п.) являются известными источниками электрического поля, поля и распределения потенциалов которых хорошо изучены. Пространственные распределения мультиполей выражаются в терминах дельта-функции Дирака и ее пространственных производных. Например, распределение заряда точечного монополя описывается выражением:  $\rho(r) = q\delta(r)$ , а для диполя:  $\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r})$ . Таким образом, поле точечного монополя обределяется функцией Дирака, тогда как для точечного

диполя – первой производной этой функции. Основанием для использования дробного исчисления является ответ на вопрос: какое распределение заряда формирует поле, зависящее от дробной производной дельта-функции Дирака? Ответом на этот вопрос было введение понятия дробного мультиполя. В упомянутой работе было выведено и исследовано выражение скалярного электрического потенциала распределенного заряда типа дробного мультиполя. Следующим шагом в использовании дробного исчисления в теории электромагнитного поля явилось развитие дробной версии метода изображений в электростатике и формирование «промежуточных» волн между плоской и цилиндрической волнами, являющихся решениями дробного скалярного уравнения Гельмгольца.

В целом ряде исследований в области электродинамики было выяснено, что электролитические среды и диэлектрические материалы проявляют дробное поведение в том смысле, что частотная

зависимость импеданса имеет вид  $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^\beta$ , где  $\beta \in (0, 1)$ , т.е. может

принимать дробные значения.

Известна технология синтеза так называемых ультраконденсаторов [11,25], использующая пористые электроды фрактальной структуры, наполненные электролитом и разделенные тонкой пористой мембраной, препятствующей замыканию электродов. Работа таких конденсаторов основана на эффекте Гельмгольца, суть которого состоит в том, что при напряжении ниже определенного уровня отсутствует электролиз и электролит ведет себя как изолятор. Ток между электродами отсутствует. Под воздействием внешнего напряжения формируется два слоя заряженных ионов. Благодаря фрактальной структуре электродов эффективная площадь такого конденсатора достигает весьма больших значений (порядка 2000 кв. м /грамм), что позволяет получить значения емкостей порядка тысяч фарад. Проведенные в работе [25] исследования показали, что адекватные математические модели таких конденсаторов являются динамическими системами дробного порядка, и они могут изучаться методами дробного исчисления.

В Российском федеральном ядерном центре – ВНИИ экспериментальной физики В.Карелиным и А.Тренькиным [3] экспериментально обнаружена фрактальная микроструктура токового канала при пробое однородных воздушных промежутков импульсами напряжения наносекундного диапазона. Исследованы неустойчивость и распад электронной лавины и формирование самоподобной пространственной структуры (фрактала) и определена его топологиче-

ская размерность. Показано, что импеданс системы, полученный из осциллограмм, хорошо аппроксимируется в частотной области выражением:  $Z(\omega) \cong k \cdot \omega^{-\beta}$  при  $\beta \approx 0.3-0.5$ , то-есть имеет свойства интегратора порядка 0.3-0.5.

## 6.4. Механика

Вязкоупругие материалы способны запоминать часть энергии, затраченной на их деформацию, в то время как остальная часть рассеивается. Первые исследования в этом направлении были выполнены Nutting в 1921 году. Теория упругости рассматривает обычно два типовых линейных элемента механических цепей: пружину и демпфер[68].

Деформация пружины подчиняется линейному закону:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{d^0}{dt^0} \varepsilon, \text{ где } \sigma - \text{ усилие, приложенное к пружине, } \varepsilon - \text{ деформация, вызванная приложенным усилием, } E - \text{ коэффициент жесткости пружины.}$$

Демпфер описывается уравнением связи усилия с первой производной деформации или скоростью перемещения поршня:

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon} = \eta \frac{d^1}{dt^1} \varepsilon,$$

Для вязкоупругих систем вводится так называемый реологический элемент, для которого связь между усилием и деформацией описывается дробной производной:

$$\sigma = p \frac{d^v}{dt^v} \varepsilon.$$

На практике получила распространение дробная 4-параметрическая модель реологического элемента, математическая модель которого имеет вид:

$$\sigma + \frac{p}{E_1 + E_2} \cdot \frac{d^v \sigma}{dt^v} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \varepsilon + \frac{p E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{d^v \varepsilon}{dt^v}.$$

Эта модель может также быть представлена в следующем виде:  $\sigma + a \cdot \frac{d^v \sigma}{dt^v} = b \cdot \varepsilon + c \cdot \frac{d^v \varepsilon}{dt^v}$ . Нетрудно видеть, что этот элемент является обобщением пружины и демпфера.

В механике сплошной среды наиболее характерно применение дробного исчисления в теории вязкоупругости.

Как известно, существует ряд элементарных моделей механики сплошной среды, описывающих связи между усилиями и деформациями. Обозначая усилия и деформации соответственно  $\sigma(t)$  и  $\varepsilon(t)$ , эти математические модели имеют вид:

- $\sigma(t) = m \cdot \varepsilon(t)$  - модель Гука: усилие пропорционально деформации,
- $\sigma(t) = b \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$  - модель Ньютона: усилие пропорционально первой производной деформации,
- $\sigma(t) = m \cdot \varepsilon(t) + b \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$  - модель Фойгта: усилие является линейной комбинацией деформации и первой производной деформации,
- $\sigma(t) + a \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt} = b \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$  - модель Максвелла: линейная комбинация усилия и первой производной усилия пропорциональна первой производной деформации,
- $[1 + a \cdot \frac{d}{dt}]\sigma(t) = [m + b \cdot \frac{d}{dt}]\varepsilon(t)$  - модель Зенера, обобщающая приведенные выше модели. Аналоговые механические модели состоят из пружин, демпферов и их различных соединений (параллельных, последовательных и параллельно-последовательных). Условные обозначения аналоговых механических моделей приведены на рис.6.1.

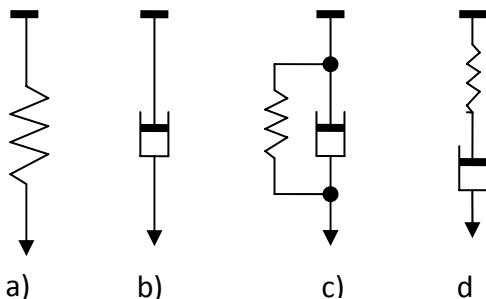


Рис.6.1. Условные обозначения аналоговых механических моделей элементов вязкоупругих тел: Гука(а), Ньютона(б), Фойгта(с), Максвелла(д).

На основе этих моделей формируется вид общего дифференциального уравнения вязко-упругой системы [41, 78]:

$$\left[1 + \sum_{k=1}^p a_k \frac{d^k}{dt^k}\right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^k}{dt^k}\right] \varepsilon(t).$$

Это уравнение носит название операторного уравнения механической системы. Его обобщение на дробные порядки интегро-дифференциальных операторов имеет вид:

$$\left[1 + \sum_{k=1}^p a_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right] \sigma(t) = \left[m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right] \varepsilon(t),$$

$$\beta_k = k + \beta - 1, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

В основе этого уравнения можно увидеть элементарные дробные версии ( $p = q = 1$ ) моделей Гука ( $a = b = 0$ ), Ньютона ( $a = m = 0$ ), Фойгта ( $a = 0$ ) и Максвелла ( $m = 0$ ).

Другой важной и интересной задачей механики сплошных сред, в решении которой применяется дробное исчисление, является проблема Бассета – движение сферы, погруженной в несжимаемую вязкую жидкость. Эта задача находит широкое применение в задачах о потоках в геофизике и технике. В безразмерной форме она сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка относительно скорости сферы вида [30]:

$$\frac{dV(t)}{dt} + \beta^\alpha \cdot \frac{d^\alpha V(t)}{dt^\alpha} + V(t) = 1,$$

$$\beta^\alpha > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad V(0^+) = V_0.$$

В работе H.W.Park, J.Choe и J.M. Kang [53] рассматривается уравнение диффузии дробного порядка применительно к исследованию процесса диффузии (транспорта жидкости) в трубопроводах с фрактальными трещинами. Показывается, что полученные с помощью такого уравнения решения хорошо согласуются с практикой на широком диапазоне времен. Сп. лит. – 20 назв.

Концепция дробной производной используется в работе E.Flores и T.Osler [28] для решения проблемы таутохроны в поле потенциала произвольной формы. Приводится обобщение на поля потенциала, зависящего от двух переменных. В приложении даны мотивации для использования концепции и методов дробного исчисления. Сп. Лит. – 6 назв.

В работе D.Schertzer и др.[67] выводится дробное уравнение Фоккера-Планка для вероятности распределения частиц, движение которых подчиняется нелинейному уравнению Ланжевена, управ-



ляемому скорее стационарному шуму Леви, чем Гауссовому. Обсуждаются существование и единственность решения такого уравнения. Сп. лит. – 58 назв.

В работе V.E.Tarasov [69] рассмотрено описание фрактальной среды, использующее дробные интегралы. Выводятся дробные обобщения уравнения, которое определяет среднюю массу. Доказано, что дробные интегралы могут быть использованы для описания среды с нецелочисленной размерностью массы. Показано, что подход с использованием дробного интегрирования потенциально более полезен для физики фрактальной среды, чем традиционные методы, которые используют целочисленное интегрирование. Рассматривается дробное уравнение непрерывности. Сп. лит. – 32 назв.

В статье Y. Aoki и др. [10] на примерах показано, что зависимость от времени температуры в тепловой системе в переходном режиме может быть аппроксимирована и моделироваться с помощью дифференциального уравнения дробного порядка. Аналитические решения доступны в терминах функции Миттаг-Лефлера. Соответственно предлагается для таких систем использование ПИД - контроллеров нецелого порядка. Сп. лит. – 23 назв.

Термин дробной динамики связан с уравнениями движения с одним или несколькими членами с производными дробного порядка. Этот тип уравнения появляется в описании процессов хаотической динамики, распространения волн во фрактальной среде и теории поля. В работе V.E.Tarasov, G.M.Zaslavsky [73] развит метод  $\epsilon$  - разложения, когда порядок дробной производной мало отличается от целых значений. Сп. лит. – 51 назв.

В работе V.E.Tarasov [71] используются дробные интегралы для описания динамических процессов во фрактальной среде. Рассматривается модель «дробной» непрерывной среды для фрактальной среды и выводятся дробные обобщения уравнений баланса массовой плотности, плотности момента и внутренней энергии. Рассматриваются дробные обобщения уравнений Навье-Стокса и Эйлера. Выводится также уравнение равновесия фрактальной среды. Рассматриваются звуковые волны в модели непрерывной среды для фрактальной среды. Сп. лит. – 24 назв.

В работе С.Ш.Речвишвили [5] обнаружена связь между спектральной плотностью мощности фликкер-шума и дробной производной Римана-Лиувилля. Показано, что системы со спектром фликкер-шума могут «вычислять» дробную производную от случайного стационарного процесса. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования фликкер-шума в электронных схемах. Метод реализован с помощью программы схемотехнического моделирования *PSpice*. Сп. лит. – 8 назв.

В работе V.E.Tarasov [72] рассматриваются дробные обобщения Гамильтоновых и градиентных систем. Выводятся дробное обобщение условий Гельмгольца для фазового пространства. Рассматриваются примеры дробных градиентных и Гамильтоновых систем. Упомянуто, что дробное исчисление находит применение в кинетических теориях, статистической механике, динамике комплексных сред и т.д. В частности, доказывается, что динамические системы, которые определяются хорошо известными уравнениями Лоренца, являются дробными градиентными системами. Сп. лит. – 32 назв.

В работе S.Umarov и S.Steinberg [74] конструируются модели многомерных случайных блужданий, управляемых дифференциальными уравнениями в частных дробных производных и многочленными дифференциальными уравнениями дробного порядка. Сп. лит. – 38 назв.

В работе H.Weitzner и G.M.Zaslavsky [77] приводятся два замечания, касающиеся применения дробных уравнений в физике. Первое связано с конкуренцией между нормальной диффузией и диффузией, вызванной дробными производными, которая имеет место в дробных кинетических теориях. Показано, что для больших времен члены с дробными производными доминируют в решении и приводят к следу (хвосту сигнала) степенного типа. Вторая заметка относится к новому классу уравнений, в которых дробные производные ответственны за дробную дисперсию. В этом случае асимптотики должны определяться конкуренцией между дробной дисперсией и нелинейными членами. Обсуждается природа дробного уравнения Гинзбурга – Ландау и дробного нелинейного уравнения Шредингера. Сп. лит. – 16 назв.

Статья V.E.Tarasov [70] посвящена дробным обобщениям уравнения Лиувилля. Обсуждается дробный аналог фазового пространства как пространства дробной размерности и как пространства с дробной метрикой. Сп. лит.- 25 назв.

В работе R.Hilfer [32] рассматриваются точные решения обобщенных релаксационных уравнений дробного порядка, которые комбинируются с простой кратковременной регуляризацией. Решение включает обобщенные функции Миттаг-Лefлера. Подобные уравнения встречаются в моделях многих стекло-образующих материалов. Сп. лит. – 13 назв.

В статье L.Ya.Kobelev [36] дробные производные и интегралы обобщаются на случаи, когда дробные степени  $d$  являются функциями пространственных и временных координат. Эти обобщения позволяют описывать динамику и изменения функций, определенных на мультифрактальных сетях, в которых каждый элемент сети

характеризуется своей собственной дробной размерностью, зависящей от координат и времени. Сп. лит. - 17 назв.

Недавно было введено понятие локальной дробной производной для функций одной переменной. Было также показано, что оно полезно при изучении свойств дробной дифференцируемости фрактальных и мультифрактальных функций. Было продемонстрировано, что локальный показатель Гёльдера (размерность) непосредственно связан с максимальным порядком, для которого существует локальная дробная производная. В работе К.М.Kalvanka и A.D.Gandal [37] это определение распространяется на локальную дробную производную по направлению для функций многих переменных и на ряде примеров показывается их (понятий) единство. Сп. лит. – 23 назв.

В статье V.V.Kulich и J.L.Lage [39] рассматривается применение дробного исчисления к решению задач механики вязкой диффузии жидкости. Применение дробного исчисления наряду с преобразованием Лапласа к классическому уравнению вязкой диффузии в полубесконечном пространстве приводит к аналитическим (дробного порядка) решениям для напряжений сдвига и скорости жидкости во всей области. Сравнение результатов, полученных с помощью дробного исчисления с существующими аналитическими результатами для первой и второй проблемы Стокса, показывает преимущества дробной методологии в отношении простоты и мощи по сравнению с существующими методами. Сп. лит. – 6 назв.

Работа J.S.Leszczynski [40] ориентирована на исследование моделей молекулярной динамики мульти-частичных столкновений. Анализируется как работает закон дробного взаимодействия в случае мульти-частичных столкновений. Необходимо отметить, что закон дробного взаимодействия, определяемый с помощью дробной производной, где дробные производные аккумулируют всю историю перекрытия частицы по времени в взвешенной форме. Большим преимуществом этого дробного закона является то, что он позволяет моделировать мультичастичные столкновения в динамике гранулированной когезии (слипания). Сп. лит. – 17 назв.

В работе L.Yuan, O.P.Agrawal [85] представлен численный алгоритм динамического анализа механических систем под воздействием демпфирующих сил, пропорциональных дробным производным от смещения. Динамика системы описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$mD^2 x(t) + cD^\alpha x(t) + kx(t) = f(t). \text{Сп. лит. – 9 назв.}$$

## 6.5. Биология и медицина

В 30 годы прошлого века в исследованиях по электрической проводимости мембран клеток биологических организмов K.S.Cole [21] установил, что реактивное сопротивление мембраны описывается выражением:  $X(\omega) = X_0\omega^{-\alpha}$ , которому соответствует передаточная функция, характерная для интегратора дробного порядка:  $g(p) = X_{op} \cdot p^{-\alpha}$ . Экспериментально было показано, что значения  $\alpha$  соответствуют 0.45 для свиной печени и мышечных тканей, 0.25 - для картофеля, 0.37 - для мышцы лягушки, 0.88 - для крови и т.д.

Anastasio T.J. в работе [7] указал на недостатки в классических подходах к моделированию поведения нейронов в вестибулярно-окулярном рефлексе (периодические движения глаз с целью фиксации изображения при вращательных движениях головы) и предложил модель дробного порядка для нейрона, в

виде: 
$$\frac{R(p)}{V(p)} = \frac{\tau_1(p\tau_2 + 1)p^{\alpha_d - \alpha_i}}{p\tau_1 + 1}$$
, где:  $R(p)$  - изображение по Лапласу

степени разряда нейрона  $r(t)$ ,  $V(p)$  - изображение по Лапласу угловой скорости вращения головы  $v(t)$ ,  $\tau_1, \tau_2$  - постоянные времени модели,  $\alpha_d, \alpha_i$  - дробные порядки дифференцирования и интегрирования.

Anastasio T.J. предложил также более общую гипотезу: поскольку мышечные и соединительные ткани мускуло-скелетной системы проявляют характерные для вязко-упругих материалов свойства и имеют динамику типа дробного интегрирования, она должна быть компенсирована с помощью динамики дифференцирования дробного порядка, и, таким образом, «динамика дробного порядка может быть свойством, характерным для систем управления двигателем в общем случае»[7].

Модель респираторной системы человека на основе использования дробного исчисления предложена и исследована в работе [33] Поскольку респираторная система человека представляет собой фрактальную структуру, ее модель может быть построена по аналогии с разветвленной системой длинных линий. На основе сравнительного анализа частотных характеристик импеданса респираторной системы и ее математических моделей целого и дробного характера установлено, что дробная модель лучше согласуется с экспериментальными данными. Использование дробной модели откры-

вает новые возможности в диагностике бронхо-легочных заболеваний.

Дробные обобщения условий экстремума функций (в частности, теоремы Ферма) часто возникают в математической биологии. Нахушев А.М. в работе [4] использовал методы дробного исчисления для построения математических моделей роста популяции биологических структур (клеток, микроорганизмов, органов, живых существ). Им предложено обобщение теоремы Ферма для поиска экстремума функций, которые не являются дифференцируемыми, но имеют дробные производные определенных порядков. Подобные задачи возникают «...при поиске максимальной скорости, с которой ткани животного могут обеспечиваться кислородом»,..., а также в задаче «...о максимальной биомассе, которую может поддерживать данная экосистема». В биологии и демографии известен закон Мальтуса, или закон экспоненциального роста численности популяции, имеющий вид функционального уравнения:  $u(t) = u(\tau) \cdot e^{\mu(t-\tau)}$ ,  $(t, \tau \in [t_0, T])$ , где  $\mu$  - характеристический показатель. Дробным обобщением закона Мальтуса является дифференциальное уравнение дробного порядка вида:

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = \mu \cdot u, 1 \leq \alpha < 2.$$

Применению дробных производных к моделированию артериальной вязкоупругости посвящена работа D.O.Craiem и др. [22]. Показано в экспериментах, что в артериальной системе человека релаксационный отклик системы на интервале времени порядка 1 часа согласуется с дробной моделью вязко-упругого поведения с порядком производной порядка 0.2-0.4 с погрешностью меньше 1 %. Утверждается, что дробное исчисление должно рассматриваться как реальная альтернатива для моделирования проблем артериальной вязкоупругости.

## 6.6. Экономика и финансы

Дробное исчисление коснулось и такой, как казалось далекой от техники области человеческой деятельности, как экономика и финансы [17]. Дробные версии математических моделей финансовых систем демонстрируют интересное динамическое поведение, которое может хорошо отражать фиксированные точки, и периодические, и хаотические движения. Обнаружено, что хаос проявляется в поведении моделей финансовых систем дробного порядка при порядках меньше трех.

Известна математическая модель финансовой системы в виде трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = Z = (Y - a)X,$$

$$\dot{Y} = 1 - bY - X^2,$$

$$\dot{Z} = -X - cZ,$$

где  $X$  - ставка процентов,  $Y$  - спрос на капитальные вложения,  $Z$  - индекс цен,  $a, b, c$  - неотрицательные коэффициенты. Предложено дробное обобщение этой математической модели финансов в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений дробных порядков:

$$\frac{d^{q_1} X}{dt^{q_1}} = Z = (Y - a)X,$$

$$\frac{d^{q_2} Y}{dt^{q_2}} = 1 - bY - X^2,$$

$$\frac{d^{q_3} Z}{dt^{q_3}} = -X - cZ,$$

Подробно проанализированы фазовые диаграммы решений приведенной системы уравнений дробного порядка при различных порядках дифференциальных операторов. Показана возможность реализации хаотических и периодических решений, что может позволить исследователям по новому решать задачи устойчивости финансовых систем, исследовать влияние памяти процесса и предсказывать кризисоподобные явления и другие процессы, связанные с функционированием экономических систем.

## 6.7. Тенденции в применениях дробного исчисления к математическому моделированию динамических систем

Анализ многочисленных публикаций по теории и применениям дробного исчисления, содержание докладов, сделанных на конференциях различного уровня и направленности, характер обзорных материалов, посвященных дробному исчислению и его применениям, позволяют сделать ряд акцентов, касающихся тенденций развития этого направления, а также обозначить проблемы, которые могли бы стимулировать дальнейшие исследования и разработки в области использования аппарата дробного исчисления в математическом и компьютерном моделировании. Этим вопросам, в частности посвящен ряд монографических работ и публикаций в периодической литературе [12, 38, 44, 48, 51, 52, 57-59, 63, 66, 75].

Математический анализ нецелых порядков (fractional calculus – в англоязычной литературе) успешно применяется в качестве инструмента решения уравнений в частных производных, в основном, в теплофизике. В частности, в работе Ю.И.Бабенко [1] развит метод решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа на основе расщепления дифференциальных операторов вида:

$$\frac{\partial}{dt} - a \frac{\partial^2}{dx^2} \text{ на произведение:}$$

$$\left( \frac{\partial^{1/2}}{dt^{1/2}} - \sqrt{a} \frac{\partial}{dx} \right) \left( \frac{\partial^{1/2}}{dt^{1/2}} + \sqrt{a} \frac{\partial}{dx} \right) \text{ с последующим преобразованием исход-$$

ного уравнения в эквивалентное уравнение смешанного порядка (первого порядка по пространственной переменной и половинного порядка по временной).

Известные ранее интегральные преобразования (Фурье, Лапласа, Габора, Гильберта, Меллина, Ханкеля, Хартли, распределение Вигнера и др.) были обобщены в соответствующие дробные версии. В работе [15] приведен обстоятельный обзор последних достижений в теории и применениях дробных преобразований. Сп. лит. – 127 назв.

Теория дробного исчисления интенсивно развивается в направлении разработки методов решения интегро - дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, интегродифференциальные операторы которых принимают нецелые вещественные и комплексные значения, зависят от времени или других аргументов (чаще всего пространственных) или даже распределены по некоторому закону [9, 43].

Наблюдается мультидисциплинарный подход к теории фракталов и математическому анализу нецелых порядков. В теории фракталов усилилось внимание к динамическим процессам и системам во фрактальных средах, обобщаются основные фундаментальные законы естествознания, что позволяет говорить о появлении фрактальной механики, фрактальной электродинамики, фрактальной химии и т.д. [6, 78].

Использование результатов, полученных в области нанотехнологий, позволяет осуществить прорывы в направлении создания широкодиапазонных антенн для радиолокации, гидроакустики, телевидения и телекоммуникации, а также синтеза высокоэффективных устройств накопления энергии. В обоих случаях достижение положительных результатов получено за счет реализации префрактальных структур, реализующих в ограниченных объемах весьма большие длины одномерных объектов и поверхности двумерных. Примерами реализации этих идей являются фрактальные антенны,

и ультраконденсаторы [11,34,65,82]. Исследование математических моделей префрактальных систем в частотной области неизбежным образом приводит к использованию аппарата дробного исчисления.

Уточнение математических моделей процессов в различных областях науки, техники, технологии приводит к новой постановке задач идентификации и технической диагностики. Параметрическая идентификация, как известно, предполагает нахождение неизвестных параметров исследуемой системы при заданных структуре, типе математической модели и отклике системы на внешнее воздействие. Введение нецелочисленных и переменных порядков интегро-дифференциальных операторов превращает проблемы идентификации в структурно-параметрические, поскольку появляется еще одна степень свободы системы, связанная с нецелочисленными порядками интегралов и производных, входящих в уравнения математических моделей.

К числу открытых и нерешенных задач, связанных с дробным исчислением и его применениями в математическом и компьютерном моделировании следует отнести:

- создание эффективных методов, алгоритмов и программ решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений нецелого порядка,
- развитие методов конечных элементов и конечных объемов, адаптированных к решению мультифизических задач и реализации их в программных средах типа FlexPDE, FEMLAB, Comsol Multiphysics и т.п.,
- создание электронных моделей и аппроксиматоров дробных дифференциаторов, дробных интеграторов, дробных PID – контроллеров, а также их программных реализаций в средах систем MATLAB/Simulink,
- синтез элементов электрических и электронных цепей, обладающих свойствами интеграторов и дифференциаторов нецелых вещественных и комплексных порядков и разработка на их основе методов структурного моделирования интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков в средах систем MATLAB/Simulink,
- разработка методов решения и компьютерного моделирования интегро-дифференциальных уравнений переменных нецелых порядков с заданными начальными и краевыми условиями,
- развитие методов структурной и параметрической идентификации динамических систем, математические модели которых содержат интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков, а также их обобщения на случай переменных и распределенных нецелых порядков.



### **Список литературы к Главе 6**

1. Бабенко Ю.И. Тепломассообмен: Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. – Л.: Химия, 1986. – 144 с.
2. Волянский Р.С., Садовой А.В. Исследование частотных характеристик динамических звеньев с производными дробных порядков // XIV Международная научно-техническая конференция «Проблемы автоматизированного электро-привода. Теория и практика», 2007, 17-22 сент. Крым (пгт Николаевка). – 8 с.
3. Карелин В.И., Тренькин А.А. Самоподобная пространственная структура бесстримерного разряда наносекундного диапазона / Журнал технической физики, 2008, том 78, вып. 3. – С. 29—35.
4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии: Учеб. Пособие для университетов. – М.: Высш. Шк., 1995. -- 301 с.
5. Речвиашвили С.Ш. Моделирование фликкер-шума с помощью дробного интегро-дифференцирования. //Журнал технической физики, 2006, том 76, вып. 6. – с. 123--126.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 528 с.
7. Anastasio T.J. The fractional order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons / Biological Cybernetics, vol. 72, 1994. – pp. 69--79.
8. S.Abbisso, R.Caponetto, O.Diamante, E.Di Cola, L.Fortuna, D.Porto Realization of a Non Integer Order PID Controller //ECCTD'01 – European Conf. on Circuit Theory and Design, Espoo, Finland, 2001. – pp. I-317 – I-320.
9. T.M. Atanackovic, L.Oparnica, S.Pilipovic On a nonlinear distributed order fractional differential equation // J.Math.Anal.Appl., Vol. 328, 2007. – pp.590--608.
10. Y. Aoki, M. Sen, S.Paolucci Approximation of transient temperatures in complex geometries using fractional derivatives // Technical Note of Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Notre Dame, 2005, 21 p.
11. R.Aparicio, A.Hajimiri Capacity Limits and Matching Properties of Integrated Capacitors // IEEE Journal of solid state circuits, Vol.37, No.3, 2002. – pp.384--393.
12. Applications of Fractional Calculus in Physics /Edited by Rudolf Hilfer, World Scientific. -- 463 p.
13. R.S.Barbosa, J.A.T.Machado Fractional Descibing Function Analysis of Systems with Backlash and Impact Phenomena // 6th

- International Conference of Intelligent Systems 2002, Opatija, Croatia. – 6 pg.
14. T.Bhaskaran, YangQuan Chen, G.Bohannan Practical Tuning of Fractional order Proportional and Integral Controller (II): Experiments // Proc/ of the ASME 2007 Int. Design Eng. Techn. Conf.& Computers and Information in Engineering Conf/ IDETC/CIE 2007, Sept. 4-7, 20078, Las Vegas, Nevada, USA. – 14 p.
  15. A.Bultheel, H.Martinez-Sulbaran Recent developments in the theory of fractional transforms //Preprint of Dep. of Computer Science,K.U.Leuven, Belgium, 2003. – 30 p.
  16. M.Caputo Free modes splitting and alterations of electrochemically polarizable media // Rend. Fis. Acc. Lincei,ser. 9, Vol. 4, 1993. – pp. 89-98.
  17. W.C.Chen Nonlinear dynamics and chaos in a fractional – order financial system // Chaos, Solutions and Fractals, Vol. 36, 2008. – pp. 1305-1314.
  18. Yang Guan Chen, Kevin L. Moore Discretization Schemes for Fractional-Order Differentiators and Integrators // IEEE Transactions on Circuits and Systems- I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 49, No. 3, March 2002. – pp. 363 – 367.
  19. YangQuan Chen, K.L.Moore Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems // Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, December 2001, WeA05-1, pp. 1421--1426. (Vol. 181, pp 11--16).
  20. M.Ciedielski, J.Leszczynski Numerical simulations of anomalous diffusion // CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics, June 3-6,2003, Glivice,Poland. – 5 p.
  21. Cole K.S. Electric conductance of biological systems / Proc. Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol., Cold Spring Harbor, New York, 1933. – pp.107--116.
  22. D.O.Craiem, F.J.Rojo, J.M.Atienza, G.V.Guenia, R.L.Armentano Fractional Calculus applied to model arterial viscoelasticity // Latin American Applied Research, Vol. 38, 2008. – pp. 141-145.
  23. F.B.M.Duarte, J.A.T.Machado Pseudoinverse Trajectory Control of Redundant Manipulators:A Fractional Calculus Perspective // ICRA'02 – 2002 IEEE Int. Conference on Robotics and Automation, 10-17/May/2002. – 6 p.
  24. L.Dorcak, I.Petras, I.Kostial, J.Terpak Fractional – Order State Space Models //Int. Carpathian Control Conference ICC'2002, Malenovice Czech Republic, May 27-30, 2002, pp. 193--198.

25. A.Dzielinski, D.Sierociuk Ultracapacitor Modelling and Control Using Discrete Fractional Order State-Space Model // *Acta Montanistica Slovaca*, Vol. 13, No. 1, 2008. – pp.136--145.
26. EL-NABULSI Ahmad Rami Cosmology with Fractional Action Principle // *Romanian Reports in Physics*, Vol. 59, No. 3, 2007. -- pp.763--771.
27. N.Engheta On the role of fractional calculus in electromagnetic theory // *IEEE Antenna and Propagation Magazine*, V.39, No. 4,1997, pp. 35--46.
28. E.Flores, T.Osler The Tautochrone Under Arbitrary Potentials Using Fractional Derivatives // *American Journal of Physics*, 67, 1999, pp. 718--722 (Vol.498, pp.457--487).
29. N.M.Fonceka Ferreira, J.A.Tenreiro Machado Fractional - Order Hybrid Control of Robotic Manipulators // *Proceedings of ICAR 2003 – The 11th International Conference on Advanced Robotics. – Coimbra, Portugal, June 30 – July 3, 2003. – p.p. 264 – 269. – ref. 24.*
30. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / Edited by Alberto Carpinteri, Francesco Mainardi. – 348 p.*
31. Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Workshop # 2, Las Vegas, December 9, 2002. – 300 p.*
32. R.Hilfer On Fractional Relaxation // *Fractals*, Vol. 11, Supplementary Issue (February 2003), pp. 251--257.
33. Ionescu C., Keyser R. On the potential of using fractional-order systems to model the respiratory impedance // *The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati Fascicle III, 2006. -- Electrotechnics, Electronics, Automatic Control, Informatics. – pp. 57--62.*
34. I.S.Jesus, J.A.T.Machado Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes // *Nonlinear Dyn*, DOI 10.1007/s11071-008-9377-8.
35. Wang Jifeng, Li Yuankai Frequency Domain Analysis and Applications for Fractional-order Control Systems // *7th International Symposium on Measurement Technology and Intelligent Instruments, Journal of Physics: Conference Series 13 (2005), p.p. 268-273.*
36. L.Ya.Kobelev Generalized Riemann-Liouville fractional derivatives for multifractal sets // *arHiv<sup>^</sup>math.CA/0002008 v1 1Feb 2000, 4 p.*
37. K.M.Kalvanka, A.D.Gandal Local fractional derivatives and fractal functions of several variables // *arHiv:physics/9801010 v1 10 Jan 1998, 4 p.*

38. B.T.Krishna, K.V.V.S.Reddy Active and Passive Realization of Fractance Device of order  $\frac{1}{2}$  // *Electronic Components*, 2008. – pp.1--7.
39. V.V.Kulish, J.L.Lage Application of Fractional Calculus to Fluid Mechanics // *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 124, 2002, pp. 803--805.
40. J.S.Leszczynski Fractional Calculus in application to mechanics of multiparticle contacts // *CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics*, June 3-6, 2003, Gliwice, Poland . – pp.1--9.
41. Mainardi F. Fractional Calculus. Some basic problems in continuum and statistical mechanics // *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. – Springer –Verlag, 1977. – P. 291--348.
42. F.Mainardi, R.Gorenflo Time-fractional derivatives in relaxation processes:a tutorial survey // *arXiv:0801.4914v1 [math-ph]*31 Jan 2008. – 40 p.
43. F.Mainardi, A.Mura,R.Gorenflo,M.Stojanovic The Two Forms of Fractional Relaxation of Distributed Order // *Journal of Vibration and Control*, Vol.13, 2007. – pp. 1249 – 1268.
44. J.A.T.Machado, I.S.Jesus, A.Galhano,J.B.Cunha Fractional order electromagnetics // *Signal Processing*, Vol. 86, 2006. – pp. 2637--2644.
45. J.A.T.Machado A.Galhano A New Method for Approximating Fractional Derivatives: Application in Non-linear Control // *ENOC-2008*, Saint Petersburg, Russia, June, 30 – July, 4, 2008. – 5 p.
46. S. Manabe The Non-integer Integral and its Application to Control Systems // *ETJ of Japan*, Vol.6, No. 3/4, 1961. – pp. 83-87.
47. S. Manabe The System Design by the Use of a Model Consisting of a Saturation and Nonlinear Integrals // *ETJ of Japan*, Vol.8, No. 3/4, 1963. – pp. 147--150.
48. Oldham K.B., Spanier J. *The Fractional Calculus*. – New-York & London: Academic Press, 1974. – 234 p.
49. P.W.Ostalczyk, T.Rybicki The CRONE Robustness Measure // *Proc. of ICAR 2003*. – The 11th Int.Conf. on Advanced Robotics, Coimbra, Portugal, June 30 – July 3, 2003. – pp. 246--251.
50. Piotr Ostalczyk Fundamental properties of the fractional – order discrete – time integrator // *Signal Processing*, Vol. 83, 2003. – pp. 2367-2376.
51. Oustaloup A. Systemes asservis d'ordre  $\frac{1}{2}$ , 1,  $\frac{3}{2}$ , 2: une etude comparative aide a les choisir // *L'Onde Elec.* – 1979. – 59, No 2, P. 41 – 47.
52. Oustaloup A., Sabatier J., Moreau X. From fractal Robustness to the CRONE Approach // *ESAIM: Proc. Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications*. – 1995. – Vol.5. – p.p. 177-192.

53. H.W.Park, J.Choe, J.M. Kang Pressure Behavior of Transport in Fractal Porous Media Using a Fractional Calculus Approach // Energy Sources, Vol. 22, 2000, pp. 881--890.
54. Ivo Petras The fractional – order controllers: Methods for their synthesis and applications //arHiv:math.OA/0004064v1, 11 Apr. 2000
55. I.Petras, L.Dorsak, I.Kostial Control quality enhancement by fractional order controllers // Acta Montanistica Slovaca, Rocnik 3 (1998), 2 , 143--148
56. I.Petras, YangQuan Chen, B.M.Vinagre A Robust Stability Test Procedure for a Class on Uncertain LTI Fractional Order Systems // International Carpathian Control Conference ICC'2002, Malenovice, Czech Republic, May 27-30, 2002, pp. 247--252.
57. Petras I., Podlubny I., O'LearyP., Dorcak L., Vinagre B. Analogue Realization of Fractional Order Controllers. FBERG, Technical University of Kosice, Kosice, 2002, 84 p., ISBN 8070996277.
58. Pipes Louis A. Computation of the Impedances of Nonuniform Lines by a Direct Method // A.J.E.E. Transactions of the Amer. Inst. Electr.Eng.. – 1956. – Vol. 75. – Pt.1. – p. p. 551--554.
59. Podlubny I. Fractional Differential Equations / Mathematics in Sciences and Engineering, Vol. 198. – Academic Press, 1999. – 340 p.
60. I.Podlubny Fractional-Order Systems and  $PI^\lambda D^\mu$  - Controllers //IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.44, No. 1, 1999. – pp. 208 – 214.
61. I.Podlubny, L.Dorcak, I.Kostial On Fractional Derivatives, Fractional-Order Dynamic Systems and PID-controllers // Proc of the 36th CDC San Diego, pp. 4985-4990.
62. I.Podlubny, I.Petras, B.M.Vinagre,YangGuan Chen, P.O'Leary, L.Dorcak Realization of fractional order controllers // Acta Montanistica Slovaca, Rocnik 8(2003),cislo 4. – p.p. 233-235
63. N.M.F.Ferreira, J.A.T.Machado Fractional – Order Hybrid Control of Robotic Manipulators //Proceedings of ICAR 2003 – The 11th International Conference on Advanced Robotics. – Coimbra, Portugal, June 30 – July 3, 2003. – p.p. 393 – 398. – ref. 10.
64. Saed Samadi, M.Omair Ahmad, M.N.S.Swamy Exact Fractional-Order Differentiators for Polynomial Signals // IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS, Vol.11, No. 6, 2004. – pp. 529 – 532.
65. H.Samavati,A.Hajimiri,A.R.Shahani,G.N.Nasserbakht,T.H.Lee Fractal Capacitors // IEEE Journal of solid- state circuits, Vol. 33, No. 12, 1998. – pp.2035--2041.
66. Sumpner W.E. Heaviside's fractional differentiator // Proc. Phys. Soc., Vol. 41, 1928. – pp. 404-425.

67. D.Schertzer, M.Larcheveque, J.Duan, V.V.Yanovsky, S.Lovejoy Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Levy stable noises // Journal of Mathematical Physics, Vol. 42, No. 1, 2001. – pp. 200-212.
68. Andre Schmidt, Lothar Gaul FE Implementation of Viscoelastic Constitutive Stress-Strain Relations involving Fractional Time Derivative //in Constitutive Models for Rubber II, A.A.Balkema Publishers, Tokyo, 2001, p. 79--89.
69. V.E.Tarasov Continuous Medium Model for Fractal Media //Physics Letters A, Vol. 336, 2005. – pp. 167--174.
70. V.E.Tarasov Fractional Liouville and BBJKI Equations // Journal of Physics: Conference Series 7 (2005), pp. 17-33; arHiv:nlin.CD/0602062 v1 28 Feb 2006, 20 p.
71. V.E.Tarasov Fractional Hydrodynamic Equations for Fractal Media //Annals of Physics, Vol. 318, No. 2, 2005, pp. 286--307; arHiv:physics/0602096v1 14 Feb 2006, 20 p. (Vol. 532, pp.85--104)// arXiv:cond-mat/0506137v1 6 Jun 2005. – pp.1--11.
72. V.E.Tarasov Fractional Generalization of Gradient and Hamiltonian Systems // Journal of Physics A. Vol. 38. No. 26.(2005) pp.5929 – 5943; arHiv:math.DS/0602208 v1 10 Feb 2006
73. V.E.Tarasov, G.M.Zaslavsky Dynamics with Low-Level Fractionality // arHiv:Physics/0511138v1 16 Nov 2005. – 24 p.
74. S.Umarov, S.Steinberg Random walk associated with distributed fractional order differential equations //IMS Lecture Notes – Monograph Series; imsart-lnms ver. 2005/10/19 file: Umarov\_Steinberg.tex date:March 23, 2006. – 11 p.
75. Vinagre B.M., Monje C.A., Calderon A.J. Fractional Order Systems and Fractional Order Control Actions // 41st IEEE Conf. On Decision and Control, Las Vegas, Dec.,2002, Tutorial Workshop # 2. – pp.1–35.
76. B.M.Vinagre, I.Petras,I.Podlubny,Y.Q.Chen Using Fractional Order Adjustment Rules and Fractional Order Reference Models in Model-Reference Adaptive Control // Nonlinear Dynamics, 2002, Vol. 29, pp. 269--279.
77. H.Weitzner, G.M.Zaslavsky Some applications of fractional equations //arHiv:nlin.CD/0212024 v1 9 Dec 2002, 11p.
78. West B.J., Bologna M., Grigolini P. Physics of Fractal Operators. - Springer –Verlag, 2003. – 354 p.
79. Westerlund S. Dead matter has memory! // Physica Scripta, Vol. 43, 1991. – pp. 174--179.
80. Westerlund S. Causality, report no. 940426, University of Kalmar, 1994.

81. Westerlund S., Einstein's Relativity – and what it really is // Preprint SE-39351, Kalmar Sweden, 2003. – 5 p.
82. Westerlund S.,Extam L. Capacitor theory // Dielectric and Electrical Insulation, IEEE Transactions on, Vol.1, No. 5, 1994. – pp. 826--839.
83. D.Xue, Y.Q.Chen A comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers // Proc. of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation, June 10-14, 2002, Shanghai, P.R.China, pp. 3228--3235.
84. D.Xue, Y.Q.Chen, D.P.Atherton Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB. – SIAM, 2007. – 354 p.
85. L.Yuan, O.P.Agrawal A Numerical Scheme for Dynamic Systems Containing Fractional Derivatives // Proc. of DETC'98, 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences, September 13-16, 1998, Atlanta, Georgia (DETC98/MECH-5857).

Национальная Академия наук Украины  
Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова  
Отделение гибридных моделирующих и управляющих  
систем в энергетике

# **ДРОБНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Научное издание

**Всеволод Викторович Васильев  
Лилия Алексеевна Симак**

Печатается по решению Ученого совета  
Отделения гибридных моделирующих и управляющих  
систем в энергетике ИПМЭ им. Г.Е.Пухова НАН Украины

Подготовка к печати, компьютерный набор, верстка  
*Виктория Владимировна Чёч*

---

Подписано к печати 12.12.08. Формат 60 x 84/16. Бумага офсетная  
Усл. печ. л. 16.5 Уч.-изд. л. 17.0  
Тираж 100 экз.  
Заказ № \_\_\_\_\_

Отпечатано ООО «Академпресс»  
Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей, изготовителей и  
распространителей продукции № ДК 2634 от 04.10.06 г.  
Адрес: 01133, г. Киев, ул. Кутузова, 18/7  
Телефон: 286-24-38