Дробно-дифференциальные модели распространения космических лучей в галактике

В.В.Учайкин[1*],

[1] Ульяновский госуниверситет, Ульяновск, Россия , vuchaikin@gmail.com

Аннотация

Дается обзор применения дробно-дифференциальных уравнений в физике космических лучей. Рассматриваются задачи диффузионного переноса и стохастического ускорения частиц. Обсуждается физический смысл дробно-дифференциальных операций, приводятся новые результаты.

Введение

Оживление в последние десятилетия интереса к дробным производным и их применениям в различных областях естественных (и не только естественных) наук (см. [1]) не миновало и физику космических лучей. Важнейшей особенностью межзвездной среды, в которой распространяются космические лучи, является ее турбулентный характер. Впервые связь между турбулентностью и дробным дифференцированием была установлена в работе А.С. Монина еще в 1955 году, правда, в переменных Фурье. В пространственных переменных выведенное им уравнение для плотности распределения пробной частицы в турбулентной среде имеет вид

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -B(-\triangle)^{1/3}\psi(\mathbf{r},t) + \delta(\mathbf{r})\delta(t),$$

экзотично выглядит оператор Лапласа в третьей степени. Дробная степень обеспечивает более быстрое по сравнению с нормальной диффузией расплывание диффузионного пакета – режим супердиффузии.

Естественно было ожидать введения подобных форм и в диффузию космических лучей. Напомним, что практически с самого начала развития теории переноса космических лучей в Галактике выделилось два направления – модель изотропной диффузии, и модель анизотропной диффузии [2]. В одном из вариантов последней процесс движения заряженных частиц в межзвездных магнитных полях разлагается на продольную и поперечную составляющие (компаунд-диффузия). Именно в рамках этой модели впервые появляется оператор, связанный с дробным дифференцированием [3]: уравнение (B.11) этой работы приводится к виду

$${}_0\mathsf{D}_t^{1/2}\psi_\perp(\mathbf{r}_\perp,t) = D_\perp\triangle_\perp\psi_\perp(\mathbf{r}_\perp,t) + \delta(\mathbf{r}_\perp)\delta_{1/2}(t).$$

Здесь $\delta_\beta(t) = t_+^{-\beta}/\Gamma(1-\beta)$ – дробное обобщение дельта-функции,$\delta_\beta(t) \equiv {}_0\mathsf{D}_t^\beta 1_+(t)$. Дробный оператор порядка 1/2 ("полупроизводная") по времени обеспечивает замедленную диффузию (субдиффузию) частиц в поперечных по отношению к магнитным силовым линиям направлениях. Хорошо представлено применение дробно-дифференциальных уравнений в этой задаче в обзорной части работы [4].

В статье [5], посвященной одномерной диффузии, оба эти режима (супер- и субдиффузии) были объединены одним уравнением и найдено его решение, зависящее двух параметров $\alpha \in (02]$ и $\beta \in (0,1]$ – дробных порядков частных производных по координатам и времени. Два года спустя в наших работах [6-8] эти уравнения были обобщены на 3-мерный случай,

$$\left[{}_0\mathsf{D}_t^\beta + D(-\triangle)^{\alpha/2}\right]\psi(\mathbf{x},t) = \delta(\mathbf{x})\delta_\beta(t). \tag{1}$$

Характерной особенностью решений этих уравнения явились тяжелые степенные хвосты (при $\alpha < 2$), особое поведение в начале координат, и закон расширения диффузионного пакета со временем $t^{\beta/\alpha}$. Мы назвали найденное семейство решений *дробно-устойчивыми распределениями* и позднее подробно исследовали их.

*Автор поддерживается РФФИ, грант 10-01-00608

1 Изотропная аномальная диффузия

Уравнение (1) и было использовано в наших с А.А. Лагутиным первых работах [9-11], посвященных развитию дробно-дифференциальной модели изотропной аномальной диффузии космических лучей. Была введена зависимость коэффициента диффузии от энергии, но в самом процессе диффузии изменение энергии не учитывалось, поэтому решения остались теми же самыми. Затем А.А.Лагутин с А.Г. Тюменцевым использовали эти же уравнения и эти же решения в ряде других своих работ. В процессе этих исследований численные значения параметров были смещены от начальных значений $\alpha = 1.7$, $\beta = 0.8$ в 2001 г. до $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.8$ в 2004 г. [12, с.13], при этом отношение β/α возросло от 0.47 до 2.67. Если начальные значения еще не представлялись абсурдными, то про последние этого уже не скажешь: расширение облака космических лучей, извергнутого точечным мгновенным источником, происходит по закону $R_c \propto t^{\beta/\alpha} = t^{2.67}$, благополучно преодолевая скорость света и продолжая ускоряться далее. Разумеется, это – принципиально новая модель поведения космических лучей. Вероятно, именно она имеется в виду, когда говорится о модели Лагутина-Тюменцева. Критике этой модели и разрешению возникшего в ней парадокса посвящена моя работа [13]. В ней на основе представлений CTRW (Continuous Time Random Walk) модели обсуждается физический смысл дробно-дифференциального уравнения. Согласно этим аргументам, причина нефизического поведения космических лучей в модели Лагутина-Тюменцева заключается в том, что уравнение (1) описывает процесс, в котором длины перелетов и времена задержек никак не связаны друг с другом. Случайные времена задержки предполагаются распределенными с асимптотически степенной плотностью $q(t) \propto t^{-\beta-1}$, где $\beta \in (0,1)$, но ни экспериментальные данные, и теоретические модели таких ловушек неизвестны.

Если же вообще убрать ловушки из рассматриваемой схемы, она тут же "рассыпается": все частицы мгновенно улетают на бесконечность. Но с этим "парадоксом"справиться гораздо легче: надо просто вернуть конечную скорость частицам. При этом сразу же появляется задержка во времени, но теперь она обусловлена не гипотетическими ловушками, а реальным движением частицы по своей траектории. В модели восстанавливается "школьный закон"$r = vt$, пробеги и соответствующие им задержки во времени теперь тесно связаны этим соотношением, а в уравнении аномальной диффузии сумма разделенных временной и пространственной производных заменяется усредненной по случайному направлению $\mathbf{\Omega}$ дробной материальной производной:

$$\mathsf{D}_t^\alpha + D(-\triangle)^{\alpha/2} \mapsto \langle(\mathsf{D}_t + v\mathbf{\Omega}\nabla)^\alpha\rangle$$

Построенная на основе этих соображений модель названа нами *моделью ограниченной аномальной диффузии* (ОАД), чтобы отличать ее от модели неограниченной аномальной диффузии (НАД).

Справедливости ради следует сказать, что при $\alpha > 1$ в асимптотике больших времен мы *можем* получим прежнее уравнение с разделенными производными и $\beta = 1$, если только не будем особо интересоваться асимптотическим поведением пропагатора на больших и малых расстояниях. К сожалению, именно эти области задействованы в работах по излому спектра [9] и результаты этих (как и последующих) работ, полученные в рамках модели НАД, должны быть пересмотрены. В случае же $\alpha < 1$ (модель Лагутина-Тюменцева) форма пропагатора, найденного с учетом конечной скорости движения оказывается совершенно иной.

2 Стохастическое доускорение: аддитивные блуждания Леви

Подобно тому, как пространственное перемещение космических лучей в приближении компаунд-диффузии разлагается на продольное и поперечное перемещения, движение их в фазовом (координатно-импульсном) пространстве так же может быть (и тоже – приближенно) разложено на независимые движения в каждом из этих подпространств (модель leaky-box). Во второй половине работы мы рассмотрим динамику в импульсном пространстве, связанную с проблемой ускорения (точнее, доускорения) частиц в турбулентном магнитном поле межзвездной среды. CTRW-подход и здесь проявляет свойства эвристического инструмента для интерпретации получаемых уравнений. Оказывается, здесь имеется гораздо больше оснований для применения отвергнутой нами в первой части статьи модели НАД. Действительно, последовательные взаимодействия (*столкновения*) заряженной частицы с более или менее локализованными неоднородностями магнитного поля – от движущихся с относительно небольшой скоростью магнитных облаков, которые имел в виду Ферми в своих пионерских работах, до сильных ударных волн в остатках сверхновых [14], можно рассматривать как *мгновенные перелеты из одной точки импульсного пространства в другую.* Приобретаемые частицей в результате таких столкновений импульсы $\Delta\mathbf{p}_i$ являются случайными, и даже при изотропном их распределении представляющая частицу в импульсном пространстве точка

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 + \Delta\mathbf{p}_3 + \dots,$$

подобно броуновской частице, все дальше уходит от точки (импульса) инжекции ускорения $\mathbf{p}_0$, что и означает дальнейшее ускорение (доускорение) частицы.

Вытекающее из CTRW-модели обобщенное кинетическое уравнение имеет вид

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(\mathbf{p},t) = \mu \mathsf{A} f(\mathbf{p},t) + f_0(\mathbf{p})\delta_\alpha(t). \tag{2} $$

Здесь

$$ \mathsf{A} f(\mathbf{p},t) = \int [w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}-\Delta\mathbf{p}) f(\mathbf{p}-\Delta\mathbf{p},t) - w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}) f(\mathbf{p},t)] d\Delta\mathbf{p} $$

– интегральный оператор ускорения с плотностью приращения импульса при столкновении $w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}-\Delta\mathbf{p})$.

Со статистической точки зрения главный итог вывода Ферми в том, что для формирования степенного энергетического спектра $N(E)$ достаточно экспоненциального роста энергии ускоряемой частицы $E = E_0 e^{at}$ со временем и экспоненциального распределения возраста $d\mathsf{P} = \exp(-t/\tau)dt/\tau$ регистрируемых частиц. И все. Никаких флуктуаций, кроме флуктуаций возраста, определяемых параметром τ – средним значением этого возраста. Да это и понятно: о каких флуктуациях может идти речь, если на приращение энергии в e раз, по оценкам Ферми, уходит 100 миллионов столкновений?

Чтобы исследовать влияние на энергетический спектр ускоренных частиц других источников флуктуаций, необходимо рассмотреть процессы с большими возможностями ускорения в каждом из столкновений и меньшей их частотой. К числу таких процессов относятся упоминавшиеся выше взаимодействия с сильными ударными волнами, когда даже при однократном взаимодействии с фронтом возможно увеличение энергии частицы в 7–13 раз (см. [14], с. 449). С этой целью мы перейдем от вырожденной (линейчатой) спектральной функции $\delta(E - E_0 e^{at})$, характеризующей детерминированный процесс ускорения Ферми, к непрерывной $n(E,t)$, связанной с импульсным распределением $f(\mathbf{p},t)$ соотношением:

$$ n(E,t) = \int \delta(E - E(\mathbf{p})) f(\mathbf{p},t) d\mathbf{p}. $$

Полагая, как и Ферми, параметр τ не зависящим от энергии, представим искомый спектр в виде

$$ N(E) \equiv N(E;\tau) = \tau^{-1}\left[\int_0^\infty n(E,t) e^{-t/\tau} dt\right] = \tau^{-1}\widehat{n}(E,\tau^{-1}), $$

где $\widehat{n}(E,\lambda)$ – трансформанта Лапласа спектральной функции по временной переменной. Учет влияния кинетических флуктуаций осуществляется теперь на этапе составления уравнений для распределений $f(\mathbf{p},t)$ или $n(E,t)$ путем включения дополнительных слагаемых, содержащих дифференциальные и интегральные операторы. Из аналогии с аномальной диффузией в координатном пространстве легко понять, что к дробному лапласиану (в импульсных переменных) приведет степенной характер распределений $\Delta\mathbf{p}$:

$$ \int\limits_{|\Delta\mathbf{p}|>p} w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}') d\Delta\mathbf{p} \propto p^{-\gamma},\ p\to\infty. $$

Если показатель $\gamma > 2$, второй момент конечен,и мы находимся в "классической"диффузионной области. Если же $\gamma < 2$, второй момент приращения бесконечен, и мы приходим к модели *аддитивных блужданий Леви*, в которой

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = -K(-\triangle_{\mathbf{p}})^{\nu/2} f(p,t) + f_0(p)\delta_\alpha(t), \tag{3} $$

и

$$ {}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) = \begin{cases} \partial^\nu [a_\nu n(E,t)]/\partial E^\nu + n_0(E)\delta_\alpha(t), & 0<\nu<1; \\ \partial[a_1 n(E,t)]/\partial E + \partial^\nu[a_\nu n(E,t)]/\partial E^\nu + n_0(E)\delta_\alpha(t), & 1<\nu<2. \end{cases} $$

Здесь

$$ \nu = \begin{cases} \gamma, & \gamma \le 2; \\ 2, & \gamma > 2, \end{cases} $$

$\partial^\nu/\partial E^\nu$ – более близкое к привычному обозначение дробного дифференциального оператора ${}_0\mathsf{D}_E^\nu$, а коэффициенты K, a_1 и a_ν – постоянны. Последнее обстоятельство (постоянство коэффициентов) весьма существенно для самого вывода уравнений. Как правило, вывод дробно-дифференциальных уравнений идет с применением интегральных преобразований, непременным условием применимости которых как раз и является постоянство коэффициентов. Вывести таким образом, скажем, уравнение (3), а затем поставить перед дробным лапласианом переменный коэффициент диффузии $K(p)$ было бы совсем неправильно (в этом можно убедиться даже на примере уравнений с целым лапласианом).

3 Стохастическое ускорение: мультипликативные блуждания Леви

Недостаток изложенной выше модели в том, что приращения импульса в акте ускорения не зависят от величины импульса частицы, вступающей во взаимодействие, тогда как и в модели Ферми, и в более поздних ее вариантах приращения энергии (а, стало быть, и импульса) в среднем пропорциональны энергии (импульсу) частицы перед взаимодействием. В этом случае, энергия ускоренной частицы выражается не суммой, а произведением независимых случайных величин. Назовем такую модель *мультипликативным блужданием*, чтобы отличать ее от модели *аддитивного блуждания*, рассмотренной выше.

В мультипликативной модели приращение импульса пропорционально (в статистическом смысле) абсолютной величине самого импульса частицы p', вступающей во взаимодействие,

$$\Delta\mathbf{p} = p'\mathbf{q}, \quad \int\limits_{|\Delta\mathbf{p}|>p} w(\Delta\mathbf{p};\mathbf{p}')d\Delta\mathbf{p} \propto (p/p')^{-\gamma},\ p\to\infty.$$

Полагая распределение вектора пропорциональности $\mathbf{q}$ не зависящим от $\mathbf{p}'$ и изотропным $(W(\mathbf{q};\mathbf{p}')d\mathbf{q} = (1/2)V(q)dqd\xi,\ \xi = \cos(\mathbf{q},\mathbf{p}))$, преобразуем кинетическое уравнение (2) к виду

$${}_0\mathsf{D}_t^\alpha f(p,t) = \mu\left\{\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\xi}{2}\int\limits_{0}^{\infty}V(q)f\left(p\Big/\sqrt{1+2\xi q+q^2},t\right)\Big/\left(\sqrt{1+2\xi q+q^2}\right)^3dq - f(p,t)\right\} + f_0(p)\delta_\alpha(t). \tag{4}$$

представляющему новую модель распределенного доускорения (точнее, новую модификацию модели, предложенной в [15]). Чтобы приблизить ее к реальным процессам доускорения, например, при пересечении фронтов ударных волн на остатках сверхновых, примем, как это сделано в [15],

$$V(q) = \gamma q^{-\gamma-1}, \quad \gamma > 1.$$

Полученную в результате модель можно назвать *мультипликативными блужданиями Леви.*

Рассмотрим уравнение для спектральной функции в двух крайних случаях. Случай 1: $\gamma > 2$, существует второй момент приращения импульса, пропорциональный E^2, и мы возвращаемся в область классической диффузии с переменными коэффициентами:

$${}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) = \partial[a_1 E n(E,t)]/\partial E + \partial^2[a_2E^2n(E,t)]/\partial E^2 + n_0(E)\delta_\alpha(t).$$

Случай 2. Теперь γ меньше двух, но не просто меньше, а много меньше, так, что в уравнении (3) под знаком квадратного корня можно пренебречь всеми членами, кроме q^2.

$${}_0\mathsf{D}_t^\alpha n(E,t) = \mu\left\{\int\limits_1^\infty \gamma q^{-\gamma-1}n(E/q,t)dq/q - n(E,t)\right\} + n_0(E)\delta_\alpha(t). \tag{5}$$

Я не утверждаю, что это – хорошее приближение, просто именно такой оператор ускорения использовался в работе [13] для конкретных расчетов.

Уравнение (5) допускает простое аналитическое решение и в случае моноэнергетического источника $(n(E) = \delta(E-E_0))$ приводит к энергетическому спектру

$$N_\alpha(E;\tau) = [\mu\tau^\alpha\gamma/(1+\mu\tau^\alpha)^2](E/E_0)^{-1-\gamma/(1+\mu\tau^\alpha)}/E_0. \tag{6}$$

Несмотря на то, что формула (6) выведена в предположениях, весьма упрощающих реальную ситуацию, и имеет в значительной степени качественный характер, она в компактном виде отражает влияние на форму энергетического спектра космических лучей *всех трех источников флуктуационного ускорения*: флуктуаций возраста частицы (параметр τ), флуктуаций числа актов ускорений (параметры α и μ) и флуктуаций энергии, приобретаемой в отдельном акте (параметр γ). Представив масштабный параметр μ в виде $\mu = \tau_{\mathrm{A}}^\alpha$, где τ_{A} – характерный временной интервал между ускорениями частицы на остатках различных сверхновых (напомним, τ – среднее время жизни относительно ядерных столкновений), можно записать абсолютную величину показателя интегрального спектра в более наглядном виде $\gamma' = 1 + \gamma/[1+(\tau/\tau_{\mathrm{A}})^\alpha]$. При $\alpha = 1$, и $\mu\tau \gg 1$ приходим к формуле Ферми с $a = \mu/\gamma$.

Заключение

Рассмотренные здесь вопросы вскрывают очень важный аспект применения дробно-дифференциальных уравнений к физическим задачам – аспект интерпретации, то есть, по существу *понимания* адекватности аппарата описываемому процессу. Причина, конечно, в нелокальности дробных операторов. Из-за этого свойства мы и не можем оперировать здесь с приращениями, пропорциональными самой величине в данной точке или в данный момент, а ведь именно таким путем мы и выводим большинство уравнений теоретической физики.

Автор благодарен профессору М.И.Панасюку и всем участникам февральского (2010) заседания его семинара (НИИЯФ МГУ) за обсуждение ряда вопросов, связанных с этой работой, В.С.Птускину и Л.Г.Свешниковой за ценные консультации и фонду РФФИ за финансовую поддержку исследований (грант є 10-01-00608).

Список литературы

[1] *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. 2008. Ульяновск, изд-во "Артишок".

[2] *Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И.* Происхождение космических лучей. 1963. -М.: Изд-во АН СССР.

[3] *Chuvilgin L.G., Ptuskin V.S.* Anomalous diffusion of cosmic rays across the magnetic field. // Astron. Astrophys.1993. V. 279. P. 278-297.

[4] *Webb G.M., Zang G.P., et al.* Compound and perpendicular diffusion of cosmic rays and random walk of the field lines. // Astrophys. Journal. 2006. V. 651. P. 211-236.

[5] *Saichev A.I., Zaslavsky G.M.* Fractional kinetic equations: Solutions and applications. // Chaos 1997. V. 7. P. 753-764.

[6] *Золотарев В.М., Учайкин В.В., Саенко В.В.* Супердиффузия и устойчивые законы. // ЖЭТФ 1999. Т. 115. С. 1411-1425.

[7] *Учайкин В.В.* Субдиффузия и устойчивые законы. // ЖЭТФ 1999. Т. 115. С. 2113-2132.

[8] *Uchaikin V.V., Zolotarev V.M.* Chance and Stability. 1999. Netherlands, Utrecht, VSP.

[9] *Лагутин А.А., Никулин Ю.А., Учайкин В.В.* Излом в спектре космических лучей как следствие фрактальности магнитного поля Галактики. // Препринт Алтайского госуниверситета No 4. Барнаул. 2000.

[10] *Lagutin A.A., Uchaikin V.V.* Fractional diffusion of cosmic rays. // Proc. of 27th ICRC (Hamburg) 2001. V.5. P.1896-1899.

[11] *Lagutin A.A., Uchaikin V.V.* Anomalous diffusion equation: Application to cosmic ray transport. // Nuclear Instr. and Meth. in Phys. Research B. 2003. V. 5. P. 212-216.

[12] *Лагутин А.А., Тюменцев А.Г.* Спектр, массовый состав и анизотропия во фрактальной Галактике. // Известия Алтайского госуниверситета. 2004. No 5. С.4-21.

[13] *Учайкин В.В.* О дробно-дифференциальной модели переноса космических лучей в галактике. // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. С. 115-120.

[14] *Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л. и др.* Астрофизика космических лучей. 1990.– М.: Наука.

[15] *Wandel A., Eichler D., Letaw J.R.et al.* Distributed reacceleration of Cosmic Rays. // Astrophysical Journal. 1987. V. 316. P. 676-690.