УДК 517.392:543.42

ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

© З.Ю.Сунгатуллина

В статье построены аналоги квадратурных формул прямоугольников, трапеций, получена оценка их погрешности.

Теория решения обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной математики, которое находит широкое применение в самых разных прикладных областях естествознания. За последнее время вышло в свет большое число работ, посвященных теоретическим и практическим вопросам решения обратных задач [1].

Инверсия Абеля является одним из важных разделов математической физики и находит весьма широкое применение в самых разных областях как фундаментальной, так и прикладной физики. К числу наиболее распространенных задач, приводящих к инверсии Абеля, можно отнести следующие: трехмерная реконструкция молекул, исследование структуры нуклонов и атомных ядер методами рассеяния частиц, лазерное зондирование атмосферной турбулентности, исследование распределения вещества в Галактике по данным спектральных наблюдений и т.д. Однако в работах, посвященных прикладным вопросам абелевской инверсии, особое место занимает локальная диагностика лабораторной плазмы. Это обусловлено тем, что в случаях осевой или сферической симметрии плазменного объекта функциональная связь между измеряемой функцией $f(x)$ и искомым распределением определяется в общем случае интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода

$$\int_a^x (x-y)^{-\mu}\varphi(y)dy = f(x) \qquad (1.1)$$

Для нахождения решения уравнения (1.1) можно использовать алгоритм дробного дифференцирования, позволяющего получить решение в один этап. На основе определения дробного интеграла Римана-Лиувилля уравнение можно представить в виде

$$f(x) = \Gamma(1-\mu) D_\alpha^{\mu-1}\left[\varphi(x)\right], \qquad (1.2)$$

и, следовательно, решение в силу свойства коммутативности дробных интегралов записывается следующим образом:

$$\varphi(x) = \left[\Gamma(1-\mu)\right]^{-1} \mathrm{D}_\alpha^{1-\mu}\left[f(x)\right]. \qquad (1.3)$$

Из соотношений (1.2), (1.3) следует, что инверсия Абеля связана с дифференцированием либо экспериментальной функции $f(x)$, либо дробного интеграла от этой функции.

В общем виде решение уравнения Абеля сводится к задаче вычисления дробного интеграла. Дробный интеграл точно вычисляется лишь в частных случаях, поэтому актуальной является задача построения квадратурных формул для приближенного вычисления таких интегралов.

1. Определение дробных интегралов и производных, их простейшие свойства

Согласно [2], для n-кратного интеграла известна формула

$$\int_a^x dx\int_a^x dx\ldots\int_a^x \varphi(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt, \qquad (2)$$

доказательство которой легко осуществить методом математической индукции. Заметив, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части в (1) можно придать смысл и при нецелых значениях n. Поэтому естественно определять интегрирование нецелого порядка следующим образом:

Опр. 1. Пусть $\varphi(x) \in L_1(a,b)$.

Интегралы

$$\left(I_{a+}^\alpha\varphi\right)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\ x>a \qquad (3)$$

$$\left(I_{b-}^\alpha\varphi\right)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\ x<b \qquad (4)$$

где $\alpha>0$, называются интегралами дробного порядка n.

Первый из них называют иногда левосторонним, а второй - правосторонним. Операторы I_{a+}^α, I_{b-}^α называют операторами дробного интегрирования.

Интегралы (3), (4) принято называть также дробными интегралами Римана-Лиувилля.

Чаще всего нам придется иметь дело с левосторонним дробным интегрированием, для которого будем иногда использовать обозначение типа:

$$f_\alpha(x)=\left(I_{a+}^{\alpha}f\right)(x). \qquad (5)$$

Дробные интегралы (3), (4), очевидно, определены на функциях $\varphi(x)\in L_1(a,b)$, существуя почти всюду.

2. Пусть требуется вычислить интеграл вида

$$\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad (6)$$

где $p(t)=(x-1)^{\alpha-1}$ – вес функции.

$$I=\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt. \qquad (7)$$

Рассмотрим наиболее простые квадратурные формулы, аналоги известных квадратурных формул. Интерполяционная квадратурная формула получается путем замены плотности интерполяционным полиномом с последующим точным вычислением полученных интегралов. Для построения аналогов формул Ньютона-Котеса поступим аналогичным образом.

$$\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt =$$

$$=\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(L_n(f,t)+r_n(f,t)\right)dt.$$

2.1. Аналог квадратурной формулы левых прямоугольников

$$n=0;\ x_0=a.$$

Тогда $I\approx\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(a)\,dt =$

$$=f(a)\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt = f(a)\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha}+R(f),$$

где $R(f)=f'(\xi)\left[\frac{x(x-a)^\alpha}{\alpha}-\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\right.$

$$\left.-\frac{a(x-a)^\alpha}{\alpha}\right].$$

2.2. Аналог квадратурной формулы правых прямоугольников

Тогда

$$I\approx\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(x)\,dt =$$

$$f(x)\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha}+R(f),$$

где $R(f)=-f'(\xi)\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

2.3. Аналог квадратурной формулы трапеции

$$\int_a^x \frac{\left(L_1(f,t)+r_n(f,t)\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt =$$

$$=\frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{x(x-a)^\alpha}{\alpha}-\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}-b\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha}\right]+$$

$$+\frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{x(x-a)^\alpha}{\alpha}-a\frac{(x-a)^\alpha}{\alpha}\right]+\frac{f''(\xi)}{2}.$$

При использовании этих аналогов малых квадратурных формул получаются аналоги больших квадратурных формул Ньютона-Котеса: трапеции, левых и правых прямоугольников. Доказывается их сходимость при бесконечном возрастании количества узлов.

* * * * * * * * * *

1. Салахов М.Х. Математическая обработка и интерпретация спектроскопического эксперимента. Казань, 2001. С.103-115.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. С.41-43.

THE CONSTRUCTION OF SQUARE FORMULAS FOR APPROXIMATE CALCULATION OF FRACTIONAL INTEGRALS

Z.Yu.Sungatullina

The article shows the analogues of the square formulas of rectangles and trapeziums; the errors of calculation are found as the result.