ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 90, № 3
март, 1992

 Р. Р. Нигматуллин

ДРОБНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Установлена связь между фрактальным множеством Кантора (полосками Кантора) и дробным интегралом. При этом фрактальная размерность множества Кантора совпадает с дробным показателем интеграла. Из анализа полученных результатов следует, что уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции t. Такие системы могут быть классифицированы как системы с «остаточной» памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой. Обсуждается применимость таких уравнений для описания процессов переноса и релаксации. Получен ряд обобщений, расширяющих область применимости дробной производной.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с проникновением идей фрактальной геометрии [1] в современную теоретическую физику предпринимаются активные и многочисленные попытки объяснить зависимости типа

$$\Phi(z)=A_\nu z^{-\nu}, \tag{1}$$

встречающиеся в различных областях естествознания. Здесь ν — некоторый дробный показатель степени, A_ν — постоянная, зависящая от ν, z — некоторая интенсивная переменная (время, частота, температура и т. д.). Анализ литературы по фрактальной геометрии показывает, что теоретические методы, приводящие к зависимости (1), можно разделить примерно на три группы: первая — «переброс» обычно с помощью интегрирования дробной размерности фрактального объекта на другие физические величины. Вторая группа методов сводит задачу к рассмотрению функционального уравнения типа

$$\Phi\left(\frac{z}{b}\right)=\xi\Phi(z), \tag{2}$$

имеющего единственное решение вида (1) с произвольной постоянной A и показателем $\nu=\ln\xi/\ln b$. Третья группа методов основана на численных методах, где фрактальная геометрия поверхности задается численно. Многочисленные примеры можно найти в материалах конференции [2], а также в работах [3—5].

Помимо этих методов, в работах [6—10] были предприняты попытки связать зависимости типа (1) с решениями уравнений в дробных производных. Хотя математический аппарат дробного исчисления в настоящее время хорошо разработан [11, 12] и даже существует развитый на его основе бесполевой метод расчета граничных потоков [13], широкое применение дробных интегралов (ДИ) и производных сдерживается по одной простой причине — отсутствием у них ясной физической интерпретации. Если найти их четкое физическое истолкование, примерно такое же, какое существует у обыкновенного интеграла и производной, то оно несомненно бы расширило область их применения в физике. Следует упомянуть, что физическая реализация производной половинного порядка была дана в электрохимии [14]. Некоторые теоретические модели показывают, что в ветвящихся фрактальных структурах могут реализоваться сверхмедленные процессы переноса [15]. Они описываются уравнениями диффузии с временной дробной производной, показатель которой лежит в интервале $0<\alpha<1$.

Основная цель этой статьи заключается в том, чтобы показать наличие прямой связи между ДИ и фрактальным множеством Кантора. Если полное число оставшихся состояний на каждом этапе разбиения этого множества нормировать на единицу, то доля сохраняющихся состояний ν, входящая в показатель ДИ, в точности совпадает с фрактальной размерностью множества Кантора, причем $0<\nu<1$. Найдена временная промежуточная асимптотика, где следует ожидать появления такого оператора. Обсуждается применимость уравнений в дробных производных к процессам переноса в пористых и перколяционных системах, а также для систем, где взаимодействие носит столкновительный характер. Обсуждаются «сверхмедленные» процессы релаксации, когда физическая величина меняется медленнее первой производной. Даны обобщения предлагаемого в работе подхода для произвольного и случайного разбиения множества Кантора.

1. ДРОБНЫЙ ИНТЕГРАЛ И САМОПОДОБНЫЙ ВРЕМЕННОЙ ПРОЦЕСС

Для того чтобы ясно понять физическую интерпретацию ДИ, полезно напомнить два предельных случая, широко используемых в физике.

Рассмотрим эволюцию некоторой физической системы, где значение $J(t)$ связано с другим значением $f(t)$ через функцию памяти $K(t)$

$$J(t)=\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Пусть $K(t)$ равно ступенчатой функции

$$K(t-\tau)=\begin{cases}1/t, & 0<\tau<t,\\ 0, & \tau>t,\end{cases} \tag{4}$$

множитель $1/t$ выбран по причине нормировки функции памяти на единицу

$$\int_0^t K(\tau)\,d\tau=1. \tag{5}$$

Тогда в процессе эволюции система проходит через все состояния непрерывным образом без каких-либо потерь. В этом случае

$$(6)\qquad J(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{1-e^{-pt}}{pt}F(p) \overset{pt\gg 1}{=\!=} \frac{F(p)}{pt},$$

что соответствует полной памяти. Здесь и далее $F(p)$ — лапласовский образ функции $f(t)$, p — параметр преобразования Лапласа.

Другой предельный случай имеет место в том случае, когда система теряет все свои состояния за исключением одного с бесконечно большой плотностью. В этом случае мы имеем

$$(7)\qquad J(t) = \int_0^t \delta(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = f(t) \doteqdot e^{-pt}F(p).$$

Выражение (7) соответствует хорошо известному марковскому процессу с полным отсутствием памяти. Этот процесс связывает все последующие состояния с предыдущими через одно текущее состояние в каждый момент времени t.

Эти два предельных случая, хорошо известные в физике, позволяют сформулировать следующий вопрос. А не существует ли таких физических систем, которые в процессе эволюции занимают промежуточное место между «прямой», т. е. когда система в процессе эволюции не теряет ни одного состояния за все время t, и «точкой», т. е. когда рассматриваемая система теряет все свои состояния за исключением одного, сосредоточенного в момент времени t с бесконечно большой плотностью? Обыкновенная геометрия не дает утвердительного ответа на этот вопрос, т. к. «не знает» промежуточного геометрического объекта между прямой и точкой. Фрактальная геометрия отвечает на этот вопрос утвердительно, т. к. такой объект существует и известен под названием канторовского множества или полосок Кантора [1]. Проблему можно сформулировать следующим образом. Пусть в системе с заданной пространственной геометрией в процессе эволюции «выживает» только часть состояний, а другая часть состояний от их общего числа необратимо теряется в процессе эволюции. Потеря части состояний понимается в том смысле, что они необратимо теряются и становятся недоступными для системы. Множество Кантора устроено таким образом, что оно учитывает недоступность части состояний автоматически (см. рис. 1, где $\xi=0{,}35$; $\nu=\ln 2/\ln(1/\xi)=$ $=0{,}6602520221\ldots$. По вертикальной оси отложена плотность соответствующих полосок. Площадь всех полосок на каждом этапе разбиения равна единице. Процесс построения множества Кантора описан в разделе 2). Что произойдет с множеством Кантора в пределе $N\to\infty$ (N — номер этапа разбиения) при условии, что нормировка суммарной площади (для определенности на единицу) под оставшимися полосками сохраняется? Мы хотим показать, что множество Кантора в пределе $N\to\infty$ сходится к ДИ, причем показатель ν ДИ указывает на долю сохранившихся состояний и совпадает с фрактальной размерностью множества.

Иными словами, канторово множество для ДИ является аналогом δ-образной последовательности, которая, как известно, в пределе сходится к δ-функции.

2. СВЯЗЬ ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА И МНОЖЕСТВА КАНТОРА

Для установления связи между ДИ и фрактальным множеством Кантора удобно использовать ступенчатую функцию

$$(8)\qquad \eta(t_1<\tau<t_2)=\begin{cases}1, & \text{если } \tau\in[t_1,t_2],\\ 0, & \text{если } \tau \text{ вне } [t_1,t_2].\end{cases}$$

Лапласовский образ выражения (8) равен

$$(9)\qquad \eta(t_1<\tau<t_2)=\frac{1}{p}e^{-pt_1}(1-\exp(-p(t_2-t_1))).$$

Как известно [1], множество Кантора строится по следующему алгоритму. Вначале выбирается весь временной интервал длины (продолжительности) t. На следующей стадии средняя часть отрезка удаляется и на концах его остаются два отрезка длины ξt ($\xi<{}^1/_2$). На последующем этапе каждый сохраняющийся отрезок длины ξt подвергается той же самой процедуре деления и т. д. Процесс построения множества Кантора показан на рис. 1. Координаты точек после первого этапа деления равны $[0,\ \xi t]$, $[t(1-\xi),\ t]$. Плотность оставшихся состояний после первого этапа деления равна $(2\xi t)^{-1}$. На втором этапе деления число точек равно восьми и координаты точек в порядке их возрастания следующие: $[0,\ \xi^2 t]$, $[(\xi-\xi^2)t,\ \xi t]$, $[t(1-\xi),\ t(1-\xi+\xi^2)]$, $[t(1-\xi^2),\ t]$. Плотность состояний на втором этапе деления определяется выражением $1/(2\xi)^2 t$. Как и на первом этапе, выражение для плотности получается из условия нормировки всех оставшихся состояний на единицу. Если на N-м этапе обозначить координаты точек через $t_m^{(N)}$ ($m=1,2,\ldots$), то на $(N+1)$-м этапе координаты точек в порядке возрастания определятся следующими рекуррентными соотношениями:

$$(10)\qquad t_{m+1}^{(N+1)}=t_m^{(N)},\quad t_{m+2}^{(N+1)}=t_m^{(N)}+\xi^{N+1}t,$$
$$t_{m+3}^{(N+1)}=t_{m+1}^{(N)}-\xi^{N+1}t,\quad t_{m+4}^{(N+1)}=t_{m+1}^{(N)},$$

с плотностью $1/(2\xi)^{N+1}\cdot t$. Вклад в интеграл от 2^N полосок на N-м этапе деления может быть записан как

$$(11)\qquad J(t)=\frac{1}{(2\xi)^N\cdot t}\int_0^t d\tau\sum_{m=1}^{2^N}\eta(t_m^{(N)}<\tau<t_{m+1}^{(N)})f(\tau),$$

$$(12)\qquad J(t)\risingdotseq\Phi(p)=\frac{1-\exp(-pt\xi^N)}{(2\xi)^N pt}\sum_{m=1}^{2^N}e^{-pt_m^{(N)}}F(p).$$

Сумма, входящая в выражение (12), может быть преобразована следую-

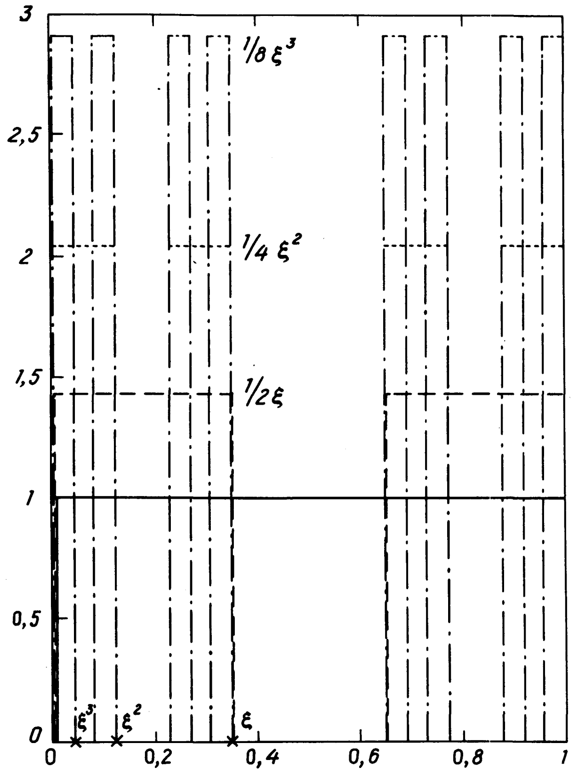

Рис. 1

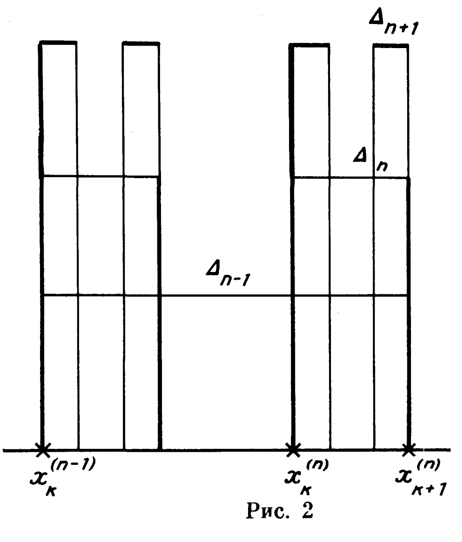

Рис. 2

щим образом. Для этого рассмотрим рис. 2. Преобразование Лапласа ступенчатой функции на n-й стадии выразится формулой

$$\eta\,(x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)}) \doteqdot \frac{1}{p}\, e^{-px_k^{(n)}}\,(1 - \exp\,(-\,p\Delta_n)).$$

Если повторить этот процесс для $(n+1)$-го этапа, то получится

$$\eta(x_k^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta_{n+1}) +$$
$$+ \eta(x_k^{(n)} + \Delta_n - \Delta_{n-1} < x < x_k^{(n)} + \Delta_n) \doteqdot$$
$$\doteqdot \frac{1}{p} e^{-px_k^{(n)}} (1 - e^{-p\Delta_{n+1}}) + \frac{1}{p} e^{-px_k^{(n)}} e^{-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})} (1 -$$
$$-\exp(-p\Delta_{n+1})) = \frac{1 - \exp(-p\Delta_{n+1})}{p_{(n+1)}} (1 + e^{-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})}) e^{-px_k^{(n)}}.$$

Используя связь $x_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n+1)}$ и вновь повторяя эту процедуру, мы получим окончательный результат

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \eta(x_k^{(n+1)} < x < x_{k+1}^{(n+1)}) \doteqdot \frac{1}{p} (1 - \exp(-p\Delta_{n+1})) \times \tag{13}$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} (1 + \exp(-p(\Delta_{k-1} - \Delta_k))).$$

Используя соотношение (13) и учитывая, что $\Delta_n = \xi^n t$, выражение (12) можно преобразовать к виду

$$\Phi(p) = \frac{1 - \exp(-pt\xi^N)}{pt\xi^N} Q_N(pt(1-\xi)) F(p), \tag{14}$$

здесь

$$Q_N(z) = 2^{-N} \prod_{n=0}^{N-1} (1 + \exp(-z\xi^n)) \tag{15}$$

с $z = pt(1-\xi)$. Для относительно больших N ($N \gg 1$), $|pt\xi^N| \ll 1$ из (14) следует

$$\Phi(p) = Q_N(z) F(p). \tag{16}$$

Можно заметить, что $Q_N(z)$, определенное выражением (15), удовлетворяет следующему уравнению:

$$Q_N\left(\frac{z}{\xi}\right) = \frac{1 + \exp(-z/\xi)}{2} Q_{N-1}(z). \tag{17}$$

Из выражения (17) следует, что для интервала

$$\xi/(1-\xi) < |pt| < \xi^{-N} \tag{18а}$$

и для

$$0 \leqslant \tau/t \leqslant 1 \tag{18б}$$

функция $Q_N(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$Q_N(z/\xi) \simeq {}^1/_2 Q_{N-1}(z). \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что в пределе $N \to \infty$ существует предел $Q_N(z)$. Используя неравенство $0 < |\exp(-pt\xi^n(1-\xi))| < 1$, можно заключить, что для любого pt $(0<|pt|<\infty)$

$$0<\lim_{N\to\infty} Q_N(z)=\bar{Q}(z)<1.$$

Поэтому в пределе $N\to\infty$ функциональное уравнение (19) принимает форму

$$\bar{Q}(z/\xi)={}^1/_2\bar{Q}(z). \tag{20}$$

Решение уравнения (20) имеет вид

$$\bar{Q}(z)=A_\nu z^{-\nu}. \tag{21}$$

В выражении (21) $\nu=\ln 2/\ln(1/\xi)$ – фрактальная размерность множества Кантора.

Таким образом, мы доказали, что для промежуточной области $|pt|$, удовлетворяющей (18а), $\Phi(p)$ принимает форму

$$\Phi(p)\simeq A_\nu(1-\xi)^{-\nu}(pt)^{-\nu}F(p). \tag{22}$$

Выражению (22) соответствует представление $J(t)$ в форме дробного интеграла (11)

$$J(t)=A_\nu[t(1-\xi)]^{-\nu}[\Gamma(\nu)]^{-1}\int_0^t(t-\tau)^{\nu-1}f(\tau)d\tau= \tag{23}$$

$$=\frac{A_\nu}{(1-\xi)^\nu\Gamma(\nu)}\int_0^1(1-u)^{\nu-1}f(ut)du\equiv B_\nu t^{-\nu}D^{-\nu}f,$$

$$0<\nu<1,\quad 0<\tau<t.$$

Константа A_ν не может быть получена из уравнения (20) и поэтому необходимо свернуть $Q_N(z)$ в интеграл, чтобы оценить A_ν приближенно. Детали оценки константы A_ν даны в приложении.

3. СООТВЕТСТВИЕ С ДВУМЯ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СЛУЧАЯМИ И ФИЗИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Значения параметра ξ заключено в следующем интервале:

$$0<\xi\leqslant{}^1/_2. \tag{24}$$

Для $\xi={}^1/_2$ значение фрактальной размерности $\nu=1$. В этом случае из (23) следует, что $J(t)$ связано с $f(t)$ через полный интеграл и соответствует случаю полной памяти. Если $\xi\to 0$ $(\nu\to 0)$, то из выражения (15) следует

$$\bar{Q}(z)={}^1/_2(1+\exp(-pt)). \tag{25}$$

В t-представлении выражение (25) соответствует линейной комбинации двух дельта-функций половинной интенсивности, локализованных на концах выбранного интервала $[0,\ t]$. Этот случай соответствует полному отсутствию памяти, как это следовало из предварительных рассуждений. Таким образом, из анализа предельных случаев следует, что показатель ДИ ν соответствует доле сохраняющихся состояний в процессе эволюции рассматриваемой физической системы и охватывает случаи полностью замкнутой ($\nu=1$) и марковской ($\nu=0$) систем, когда все состояния вырождаются в одно или два с бесконечно большой плотностью. Интересен для анализа случай $\xi={}^1/_4$. В этом случае $\nu={}^1/_2$, что соответствует классической диффузии на квазиодномерных полубесконечных системах, где связь между концентрацией и потоком всегда выражается через интеграл или производную только половинного порядка [13—15]. Появление ДИ половинного порядка в этом случае можно понять из следующих рассуждений. Для одномерной диффузии, как известно, существуют два эквивалентных решения [13]. Одно из них соответствует выравниванию концентрации в прямом направлении ($x>0$), второе решение соответствует отраженному решению от границы в обратном направлении ($x<0$). Для полубесконечного пространства плотность состояний для прямого процесса становится преобладающей и поэтому половина состояний теряется. Другими словами, ДИ половинного порядка указывает на долю сохраняющихся состояний в процессе диффузии для полубесконечных каналов.

Из этих рассуждений можно понять, что ряд физических систем, которые могут быть описаны уравнениями в дробных производных, должны содержать в себе каналы, входящие в состав некоторой ветвящейся фрактальной структуры. Это утверждение было подтверждено в работе [15], где для основного канала было получено «сверхмедленное» уравнение диффузии типа

$$\frac{\partial^\alpha c}{\partial t^\alpha}=\mathscr{D}_\alpha\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},\quad 0<\alpha<1. \tag{26}$$

Структура каналов может быть различной и порождаться определенной фрактальной структурой среды. В работах [10, 16, 17] такие процессы классифицировались как процессы с «остаточной» памятью. Причина появления такого термина заключается в следующем. Как известно, в статистической физике одним из простых критериев необратимости процесса является смена знака времени при замене $t\to -t$. Специфика процесса, описываемого в дробных производных, состоит в том, что при такой замене

$$(-t)^\nu=t^\nu[\cos(\nu\pi)+i\sin(\nu\pi)] \tag{27}$$

часть процесса сохраняется, а другая часть соответствует необратимым потерям. Процесс с «остаточной» памятью соответствует энергетическому принципу, сформулированному Джоншером для диэлектрической релаксации [18] в частотной области.

С этой точки зрения процессы переноса в перколяционных кластерах, фрактальных деревьях, пористых системах должны быть проанализированы заново, для того чтобы получить корректные уравнения переноса для таких систем. В частности, показатель ДИ соответствует доли каналов (ветвей), открытых для протекания.

Другим широким классом физических систем, где можно ожидать появления уравнений в дробных производных, являются процессы с потерями, обусловленные столкновениями. Запишем уравнение Ньютона в виде

$$\text{(28)} \qquad \Delta\mathbf{v}_i = \frac{1}{m_i}\int_0^t \mathbf{F}_i(\mathbf{r},\mathbf{p},\tau)\,d\tau = \frac{t}{m_i}\int_0^1 \mathbf{F}_i(\mathbf{r},\mathbf{p},ut)\,du,$$

здесь m_i — масса i-й частицы, $\mathbf{F}_i$ — сила взаимодействия i-й частицы со средой. Если взаимодействие со средой носит столкновительный характер, то сила F_i может быть записана в форме

$$\text{(29)} \qquad \mathbf{F}_i(\mathbf{r},\mathbf{p},\tau) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r},\mathbf{p},\tau)\sum_k \eta(t_k<\tau<t_{k+1})\rho_k,$$

здесь ρ_k — плотность состояний, $\eta(t_k<\tau<t_{k+1})$ — ступенчатая функция, определенная выражением (8). Для силы, действующей только определенную долю времени, повторяя рассуждения предыдущего раздела, мы получим

$$\text{(30)} \qquad \Delta\mathbf{v}_i = \frac{t}{m_i}B_\nu D^{-\nu}\mathbf{F}_i,$$

здесь

$$B_\nu = A_\nu(1-\xi)^{-\nu}, \quad D^{-\nu}f = [\Gamma(\nu)]^{-1}\int_0^u (u-u_1)^{\nu-1}f(u_1 t)\,du_1$$

— безразмерный ДИ, записанный для переменной $u=\tau/t$. С помощью коммутативных свойств дробной производной (11) уравнение (30) может быть переписано в более элегантной форме

$$\text{(31)} \qquad \frac{m_i}{t^2}\frac{d^{1+\nu}(\Delta\mathbf{r}_i)}{du^{1+\nu}} = B_\nu\mathbf{F}_i, \quad 0<\nu<1, \quad 0<u=\tau/t<1.$$

Это уравнение может быть применено для описания броуновского движения и потерь, вызванных столкновениями. В частности, для упругой силы $\mathbf{F}_i = \varkappa\nabla^2(\Delta\mathbf{r}_i)$ мы получим обобщенное уравнение переноса вида

$$\text{(32)} \qquad \frac{m_i}{t^2}\frac{d^{1+\nu}(\Delta\mathbf{r}_i)}{du^{1+\nu}} = B_\nu\varkappa\nabla^2(\Delta\mathbf{r}_i).$$

Уравнение вида (32) было впервые получено в работе [9], но из других соображений. Из уравнения (32) следует новый тип линейного волнового движения, занимающего промежуточное положение между чистой диффузией $\nu=0$ и классическим волновым движением $\nu=1$. Интересно было бы обнаружить волны такого типа на эксперименте.

Рассуждения предыдущего раздела приводят к новым типам релаксации, которые следуют из уравнений для гармонического осциллятора и классического уравнения с экспоненциальным законом релаксации

$$\text{(33а)} \qquad \frac{d^{1+\nu}(\Delta\mathbf{r})}{du^{1+\nu}} + B_\nu(\omega_\alpha t)^2\Delta\mathbf{r} = 0,$$

$$\text{(33б)} \qquad \frac{d^\nu F}{du^\nu} + B_\nu(\lambda t)F = 0, \quad 0<\nu<1.$$

В уравнении (33а) ω_α ($\alpha=x$, y, z) — собственные частоты осциллятора, $\Delta\mathbf{r}$ — вектор смещения, в (33б) λ — обратное время релаксации, B_ν — безразмерная константа порядка единицы. Эти уравнения были фактически записаны в работе [10], но без их должного обоснования. Особого внимания заслуживает уравнение (33б), предсказывающее «сверхмедленную» релаксацию, когда некоторая физическая величина F меняется медленнее первой производной. Интересно поставить вопрос: наблюдались ли процессы такого типа где-либо на эксперименте? Можно указать, по крайней мере, на существование «сверхмедленной» релаксации наведенной электрической поляризации в диэлектриках [18—19]. Как известно [19], ряд экспериментальных данных хорошо описывается эмпирическим выражением Коула — Коула для комплексной восприимчивости

$$(34)\qquad \chi(\omega)=\frac{\chi_0}{1+(j\omega/\omega_p)^{1-\alpha}}$$

Не опираясь на гипотезу о распределении времени релаксации [19], применимость которой вызывает сильные сомнения [18], получим выражение (34) из уравнения (33б). Уравнение (33б), записанное для поляризации P в присутствии внешнего переменного электрического поля, может быть записано в виде

$$(35)\qquad (\lambda t)^{-1}\frac{d^\nu P}{du^\nu}+B_\nu P=\chi_2 E.$$

С помощью фурье-преобразования дробной производной (11) уравнение (35) можно решить стандартными способами и получить из него выражение для восприимчивости вида (34) с параметрами $\nu=1-\alpha$, $\omega_p=(B_\nu\lambda t)^{1/\nu}t^{-1}$, $\chi_0=\chi_2/B_\nu$. Этот результат ясно указывает на существование «сверхмедленных» процессов релаксации и заставляет пересмотреть ряд процессов, «скрытых» под распределениями времен релаксации.

Результаты предыдущего раздела могут быть применены и к уравнению Лиувилля. Обычное уравнение Лиувилля описывает эволюцию замкнутой системы, где полное число состояний сохраняется. Уравнение Лиувилля типа

$$(36)\qquad \frac{i\hbar}{t}\frac{\partial^\nu\rho}{\partial u^\nu}=[H,\rho]$$

для заданного интервала эволюции $[0,\ t]$ с потерей части состояний $(1-\nu)$ естественным образом учитывает необратимость и не требует введения бесконечно малого источника [20] для построения неравновесного оператора. Детальное исследование особенностей термодинамики систем описываемых уравнений Лиувилля типа (36) — дело ближайшего будущего.

4. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В разделе 2 мы получили ДИ для функции, определенной выражением (15). Можно обобщить этот результат для случая, когда множество Кантора состоит на каждой стадии из k полосок шириной $k\xi<1$. Предыдущий результат был получен для случая $k=2$. Используя те же самые идеи, которые привели к выражению (15) и рис. 2, можно показать, что для k полосок ($k=2, 3, \ldots$) $Q_N^{(k)}(z)$ примет вид

$$(37)\qquad Q_N^{(k)}(z)=\prod_{n=0}^{N-1}\frac{1-\exp\left(-\dfrac{k}{k-1}z\xi^n\right)}{k\left[1-\exp\left(-\dfrac{1}{k-1}z\xi^n\right)\right]}$$

для $0<\xi\leqslant 1/k$, $z=pt(1-\xi)$. Вместо того чтобы исследовать функцию $Q_N^{(k)}(z)$, мы докажем более общий результат. Рассмотрим произведение

$$(38)\qquad G_N(z)=\prod_{n=0}^{N-1}f(z\xi^n),$$

где $f(x)$ — некоторая произвольная функция. Покажем, что при некоторых условиях, наложенных на $f(x)$, произведение (38) обладает «универсальным» поведением и приводит к зависимости вида (21) для широкого класса разбиений множества Кантора. Для того чтобы найти условие на функцию $f(x)$, представим $G_N(z)$ в виде суммы

$$(39)\qquad G_N(z)=\exp\left[\sum_{n=0}^{N-1}\ln f(\xi^n z)\right]\simeq\exp\left[\int_0^{N-1}\ln f(\xi^n z)\,du\right]=$$

$$=\exp\left[\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_{\varepsilon z}^{z}\ln[f(y)]\frac{dy}{y}\right].$$

Здесь $\varepsilon=\xi^{N-1}\ll 1$, $0<\xi<1$. Интегрируя выражение (39) по частям, получим

$$(40)\qquad G_N(z)=\exp\left[\frac{1}{\ln(1/\xi)}\ln y\cdot\ln[f(y)]\,\Big|_{\varepsilon z}^{z}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_{\varepsilon z}^{z}\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy\right].$$

Рассмотрим пределы $z\gg 1$, $\varepsilon z\ll 1$ и, предполагая, что

$$(41)\qquad \lim_{\varepsilon z\to 0}f(\varepsilon z)=1,\quad \lim_{z\to\infty}f(z)=\bar f<1,$$

получим из (40)

$$(42)\qquad G_N(z)\simeq z^{-\nu}\exp\left[-\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_0^{\infty}\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_0^{\varepsilon z}\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy+\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_z^{\infty}\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy\right].$$

Здесь $\nu=\ln(1/\bar{f})/\ln(1/\xi)$. Для оценки двух интегралов положим, что

(43а) $$f(y)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k y^k \quad \text{для} \quad y\ll 1,$$

(43б) $$f(y)=\bar{f}+\sum_{k=1}^{\infty}C_k y^{-k} \quad \text{для} \quad y\gg 1.$$

Из разложений (43) нетрудно заключить, что

(44а) $$\frac{f'(y)}{f(y)}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^k \quad \text{для} \quad y\ll 1,$$

(44б) $$\frac{f'(y)}{f(y)}=\sum_{k=2}^{\infty}A_k y^{-k} \quad \text{для} \quad y\gg 1.$$

Коэффициенты a_k, A_k являются соответственно функциями коэффициентов c_k, C_k разложений (43). Используя разложения (44), можно найти условия малости двух последних интегралов, входящих в выражение (42),

$$\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_0^{\varepsilon z}\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\ln(1/\xi)}\int_0^{\varepsilon z}y^k\ln y\,dy=$$
$$=\frac{\varepsilon z}{\ln(1/\xi)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}(\varepsilon z)^k\ln\left(\varepsilon z\exp\left(-\frac{1}{k+1}\right)\right).$$

Этот интеграл будет малым при условии

(45) $$\left|a_0(\varepsilon z)\ln\left(\frac{\varepsilon z}{e}\right)\right|\ll 1.$$

Здесь и далее e — основание натуральных логарифмов. Аналогичным образом оценивается и второй интеграл, входящий в (42):

$$\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int_z^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}A_k y^{-k}\ln y\,dy=\frac{1}{\ln(1/\xi)}\sum_{k=2}^{\infty}A_k\frac{\ln(z\exp(1/(k-1)))}{(k-1)z^{k-1}}.$$

Он будет малым при условии

(46) $$\left|A_2\frac{\ln(ez)}{z}\right|\ll 1.$$

Если интеграл

(47) $$\int_0^{\infty}(\ln[f(y)])'\cdot\ln y\,dy=\int_0^{\infty}\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy=\mathrm{I}$$

имеет конечное значение, то произведение (38) приводит к следующему результату:

$$(48)\qquad G_N(z)\simeq A_\nu z^{-\nu}$$

для интервала переменной z, удовлетворяющей условиям (45) и (46) с константой $A_\nu=\exp\,[-\mathrm{I}/\ln(1/\xi)]$. Дробный показатель ν определяется выражением

$$(49)\qquad \nu=\ln(1/\bar{f})/\ln(1/\xi).$$

В частности, для функции $f(z\xi^n)$, входящей в (37), показатель $\nu=\ln k/\ln(1/\xi)$, что обобщает результат (21).

Результаты раздела 2, полученные для регулярного множества Кантора, могут быть обобщены на случай, когда параметры являются случайными и могут быть выражены в виде

$$(50)\qquad \xi_i=\xi+\delta_i.$$

В формуле (50) δ_i — малые случайные отклонения от среднего ξ, $\bar{\xi}=n^{-1}\sum_i^n \xi_i$, $|\xi-\xi_i|=|\delta_i|\ll\xi<1$. В этом случае из соотношения (13) следует, что

$$(51)\qquad \Delta_n=\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\cdot t\simeq\xi^n\left(\exp\left[\sum_i^n \ln(1+\delta_i/\xi)\ \right]\right)\cdot t.$$

Принимая во внимание разложение

$$\ln(1+x)\simeq x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-)^{m+1}\frac{x^m}{m}$$

для $x=\delta_i/\xi\ll 1$ из (51), мы получим следующий результат:

$$(52)\qquad \Delta_n=\xi^n\left[\exp\left(\frac{\langle\delta\rangle}{\xi}-\frac{\langle\delta^2\rangle}{2\xi^2}+\ldots\right)\right]^n\cdot t\equiv\bar{\xi}^n t.$$

Здесь $\langle\delta^s\rangle=n^{-1}\sum_i \delta_i^s$ $(s=1,2,\ldots,m..)$ — средние значения множества $\{\delta_i\}^i$. Из выражения (52) следует, что все предыдущие результаты сохраняются, если в соответствующих формулах сделать замену $\xi\to\bar{\xi}$.

Автор выражает глубокую признательность проф. Р. М. Хиллу за приглашение в Кингз-колледж (Лондонский университет) и за возможность обсуждения с ним и проф. А. Мьёти (A. Le Mehaute) ряда идей, выдвинутых в этой работе.

Автор выражает благодарность В. К. Федянину за интерес, проявленный к работе, а также Д. Н. Зубареву за внимание к исследованиям по дробным производным и их возможным приложениям в физике.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценка константы A_ν, входящей в выражения (21)—(23)

Функция $f(y)$ для $k=2$ определяется следующим выражением $f(y)=(1+e^{-y})/2$. Из формулы (40) следует что

$$Q_N(z)=\exp\left[\frac{\ln y}{\ln(1/\xi)}\ln\left(\frac{1+e^{-y}}{2}\right)\Bigg|_{\varepsilon z}^{z}+\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int\limits_{\varepsilon z}^{z}\frac{\ln y\cdot e^{-y}}{1+e^{-y}}dy\right]=$$

$$=z^{-\nu}\exp\left[\frac{1}{\ln(1/\xi)}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-y}}{1+e^{-y}}\ln y\cdot dy-\left(\int\limits_0^{\varepsilon z}+\int\limits_z^\infty\right)\frac{e^{-y}\ln y}{1+e^{-y}}dy\right],$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{e^{-y}\ln y}{1+e^{-y}}dy=\int\limits_0^\infty\ln y\left[\sum_{n=1}^\infty(-)^{n+1}e^{-ny}\right]dy=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty(-)^{n+1}\frac{\gamma+\ln n}{n}=-\gamma\ln 2+\sum_{k=2}^\infty(-)^k\frac{\ln k}{k}=-\frac{1}{2}\ln^2 2.$$

Таким образом, значение константы A_ν определится выражением

$$A_\nu=\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\ln^2 2}{\ln(1/\xi)}\right)=2^{-\nu/2}.$$

Два последних интеграла будут малы при условии

$$\left|(z\varepsilon)\cdot\ln\left(\frac{z\varepsilon}{e}\right)\right|\ll 1,\quad |e^{-z}\ln z|\ll 1,$$

что примерно совпадает с асимптотикой (18), установленной ранее другим методом.

Список литературы

[1] *Mandelbrot B.* Fractal Geometry of Nature. San-Francisco: Freeman, 1983.
[2] Фракталы в физике // Труды VI Межд. симпозиума по фракталам в физике. М.: Мир, 1988.
[3] *Pajkossy T., Nyikos L.* // Electrochimika Acta. 1989. V. 34. № 2. P. 171–179.
[4] *Kaplan T., Gray L. J., Lin S. H.* // Phys. Rev. B. 1987. V. 35. № 10. P. 5379–5381.
[5] *Sapoval B.* // Solid State Ionics. 1987. V. 23. P. 253–259.
[6] *Le Mehaute A., Gnibert A., Delaye M., Filippi C.* // S. R. Acad. Sci. 1982. V. 294. (Serie II). P. 835–837.
[7] *Le Mehaute A., Crepy G.* // Solid State Ionics. 1983. V. 9/10. P. 359–364.
[8] *Le Mehaute A., Dugast A.* // J. of Power Sources. 1983. V. 9. P. 359–364.
[9] *Nigmatullin R. R.* // Physica Status Solidi (b). 1984. V. 123. P. 739–745.
[10] *Nigmatullin R. R.* // Physica Status Solidi (b). 1984. V. 124. P. 389–393.
[11] *Oldham K., Spanier J.* Fractional Calculus. London, New York: Academic Press, 1973.
[12] *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
[13] *Бабенко Ю. И.* Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия, 1986.
[14] *Нигматуллин Р. Ш., Белавин Б. А.* // Труды КАИ. 1964. Т. 82. С. 58–61.
[15] *Nigmatullin R. R.* // Physica Status Solidi (b). 1986. V. 133. P. 425–430.
[16 *Dissado L. A., Nigmatullin R. R., Hill R. M.* // Dynamical Processes in Condensed Matter / Ed. by M. Evans. 1985. V. 63. P. 253–292.
[17] *Нигматуллин Р. Р.* // ФТТ. 1985. Т. 27. № 5. С. 1583–1585.
[18] *Jonscher A. K.* Dielectric Relaxation in Solids. London: Chelsea Dielectric Press, 1983.

[19] *Браун В.* Диэлектрики. М.: ИЛ. 1961.
[20] *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.

Казанский государственный
университет

Поступила в редакцию
31.I.1991 г.

R. R. Nigmatullin

NON-INTEGER INTEGRAL AND ITS PHYSICAL INTERPRETATION

A relationship between Cantor's bars totality and non-integer integral is established. The fractal dimension of the totality coincides with the integral fractional exponent. Equations in fractional derivatives describe the evolution of some physical systems with losses and the fractional exponent indicates the part of the system states conserving for all time of the evolution. An application of the equations in fractal derivatives to relaxation and transfer processes is discussed. Some generalizations increasing the region of applicability of the non-integer integral are obtained.