Методологическая школа-конференция
"Математическая физика и нанатехнологии"
посвященная 40-летию возрождения
Самарского государственного университета
(Самара, 4-9 октября 2009 года)

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

(КУРС ЛЕКЦИЙ)

Анатолий Александрович Килбас

Механико-математический факультет,
Белорусский государственный университет,
220030 Минск, Беларусь

E-mail: anatolykilbas@gmail.com

Лекция 1. Дробные интегралы и дробные производные

§1. Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию так назывемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки. В связи с этим мы приведем список монографий и обзорных статей по этой тематике:

1. Oldham K.B., Spanier, J. *The Fractional Calculus.* New York-London: Academic Press. 1974.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и поизводные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника. 1987.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* New York: Gordon and Breach. 1993. (Расширенное и дополненное русское издание).

3. Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* New York: John Wiley and Sons. 1993.

4. Carpintery A., Mainardi F. (Eds.) *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.* CIAM Cources and Lectures. Vol. 376. Wien: Springer. 1997.

5. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996).* CISM Courses and Lectures. 1997. Vol. 378. P. 223-276.

6. Podlubny I. *Fractional Differential Equations.* San-Diego: Academic Press. 1999.

7. Hilfer R. (Ed.) *Applications of Fractional Calculus in Physics.* Singapore: WSPC. 2000.

8. Metzler R., Klafter J. The random walkr's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Reports.* 2000. Vol. 339. P. 1-77.

9. Нахушев А.М. *Элементы дробного исчисления и их приложения.* Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН. 2000.

10. Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J. (Eds.) *Fractional Differentiation and its Applications.* Bordeaux: Bordeaux Univ. 2005.

11. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука. 2005.

12. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Amsterdam, etc.: Elsevier. 2006.

В вышеуказанных монографиях и статьях можно найти различные приложения дифференциальных уравнений дробного порядка в физике, механике, химии, инженерии и других областях науки и естествознания с библиографией работ в этих отраслях.

Дифференциальные уравнения дробного порядка имеют следующий общий вид

$$F\left[x, y(x), D^{\alpha_1}y(x), D^{\alpha_2}y(x), \cdots, D^{\alpha_m}y(x)\right] = f(x). \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, \cdots, x_l)$ - точка l-мерного Евклидова пространства $\mathbf{R}^l$ $(l \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\})$, $F\left[x, y_1, y_2, \cdots, y_l\right]$ и $f(x)$ - заданные функции, а D^{α_k} - операторы дробного дифференцировния действительного порядка $\alpha_k > 0$ или комплексного порядка $\alpha_k \in \mathbf{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha_k) \geq 0)$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$. Соответствующие линейные уравнения с заданными функциями $A_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, m)$ и $f(x)$ даются формулой

$$A_0 y(x) + \sum_{k=1}^{m} A_k(x) \left(D^{\alpha_k} y\right)(x) = f(x). \quad (1.2)$$

Дифференциальные операторы дробного порядка в (1.1)-(1.2) могут иметь различные формы. Обзор методов и результатов в теории дифференциальных уравнений дробного порядка был дан в двух обзорных статьях

13. Kilbas A.A., Trujillo J.J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems - I. *Appl. Anal.* 2001. Vol. 78. P. 153-192; II. *Appl. Anal.* 2002. Vol. 81. P.435-494.

и его расширенный вариант представлен в монографии [12].

Среди одномерных линейных дифференциальных уравнений (1.2) уравнения наиболее изучены уравнения, содержащие дробные производные Римана-Лиувилля $D^{\alpha}y = D^{\alpha}_{a+}y$, $a \in \mathbf{R}$. Такие дробные производные положительного порядка $\alpha > 0$ определяются формулой

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} (I^{n-\alpha}_{a+}y)(x) \;\; (x > a;\; n = [\alpha]{+}1), \quad (1.3)$$

где $I^{\alpha}_{a+}y$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$:

$$(I^{\alpha}_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \;\; (x > a), \qquad (1.4)$$

$\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера.

Отметим, что подход Римана-Лиувилля (1.4) к определению дробного интегрирования есть обобщение интегрирования с переменным верхним пределом $\int_{a+}^{x}$, взятого n раз:

$$\int_a^x dt \int_a^t dt_1 \cdots \int_a^{t_{n-2}} y(t_{n-1})dt_{n-1} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t)dt \qquad (1.5)$$

Действительно, если мы используем формулу $(n-1)! = \Gamma(n)$ и заменим натуральное n на $\alpha > 0$, то (1.5) дает (1.4).

Оператор дробного дифференцирования D^{α}_{a+} обратен оператору дробного интегрирования (1.4) слева:

$$(D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} y)(x) = y(x) \quad (\alpha > 0) \tag{1.6}$$

для "достаточно хороших"функций $y(x)$. В частности, если $0 < \alpha < 1$, то

$$(D^{\alpha}_{a+} y)(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{1.7}$$

а при $\alpha = n \in \mathbf{N}$

$$(D^{n}_{a+} y)(x) \equiv (D^n y)(x) \quad (D = d/dx) \tag{1.7$'$}$$

есть обычная производная порядка n.

С 80-х годов XX-го века началось исследование одномерных дифференциальных уравнений (1.2) с модифицированными дробными производными Римана-Лиувилля (1.3) $D^{\alpha_k}y = {}^{C}D^{\alpha_k}_{0+}y$ положительного порядка $\alpha > 0$. Такие прозводные определяются равенством

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x), \tag{1.8}$$

где $n = [\alpha] + 1$ при $\alpha \notin \mathbf{N}$ и $n = \alpha$ при $\alpha \in \mathbf{N}$.

Если $\alpha \notin \mathbf{N}_0$, то для дифференцируемых функций y справедлива формула

$$({}^{C}D^{\alpha}_{0+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \;\; n = [\alpha]+1. \tag{1.9}$$

При $0 < \alpha < 1$ и $a = 0$ производная ${}^C D_{0+}^{\alpha} y$ принимает вид

$$({}^C D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad (x > 0,\ 0 < \alpha < 1). \tag{1.9'}$$

Эта конструкция была введена итальянским механиком М.Капуто в 1967 году в работе

14. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent - II. *Geophys. J. Astronom. Soc.* 1967. Vol. 13. P.529-539.

и представлена в его монографии

15. Caputo M. *Elasticita e Dissipazione.* Bologna: Zanichelli. 1969.

Поэтому за границей (1.8)-(1.9) называют дробной производной Капуто.

На наш взгляд, это не совсем верно. Правильнее их называть дробными производными Герасимова-Капуто, так как в 1948 году советский механик А.Н. Герасимов ввел частную производную вида $(1.9')$ относительно t на всей оси:

$$({}^C D^{\alpha}_{-,t} u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{u_y(x,y)dy}{(t-y)^{\alpha}} \qquad (1.9''),$$

$$(t > 0,\ x \in \mathbf{R};\ 0 < \alpha < 1).$$

в своей работе

16. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения. *АН СССР. Прикладная математика и механика.* 1948. Т. 12. С.529-539.

В этой же работе А.Н.Герасимов изучил две новые задачи теории пластичности и свел их решение к двум дифференциальны уравнениям с частной дробной призводной $(1.9'')$:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left({}^C D^{\alpha}_{-,t} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right)(x,t) \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\rho x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x} (C D^{\alpha}_{-,t} u)(x,t) \right)(x,t) \quad (0 < \alpha < 1).$$

Отметим, что А.Н.Герасимов был первым ученым, рассмотревш дифференциальные уравнения с частными дробными производны

В нынешнем стлетии началось исследование одномерных дифференциальных уравнений (1.2) с дробными производными Адамара $D^{\alpha_k}y = ^H D^{\alpha_k}_{0+}y$ порядка $\alpha > 0$. Такие конструкции определяются на полуоси $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ формулой

$$({}^H D^{\alpha}_{0+}y)(x) = \delta^n \left(\mathcal{J}^{n-\alpha}_{0+}y\right)(x) \quad (x > a;\ n = [\alpha] + 1). \quad (1.10)$$

Здесь $\delta = xD$, $D = d/dx$ - так называемая дельта производная, а $\mathcal{J}^{\alpha}_{0+}y$ - дробный интерал Адамара порядка $\alpha > 0$:

$$(\mathcal{J}^{\alpha}_{0+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{y(t)dt}{t} \ (x > 0). \quad (1.11)$$

Заметим, что дробное интегрирование Адамара есть обобщениии операции интегрирования с переменным верхним пределом вида $\int_{a+}^{x} \frac{1}{x}$, примененного n раз:

$$\int_a^x \frac{dt}{t} \int_a^t \frac{dt_1}{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-2}} y(t_{n-1}) \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}}$$
$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-1} \frac{y(t)dt}{t}; \qquad (1.12)$$

сравните с (1.5).

Если $\alpha = n \in \mathbf{N}$, то

$$({}^H D_{a+}^n y)(x) \equiv (\delta^n y)(x)$$

есть δ производная порядка n.

В ряде работ рассмативались многомерные дифференциальные уравнения (1.2) с дробными производными Рисса $D^{\alpha_k}y = \mathbf{D}^{\alpha_k}y$ положительного порядка $\alpha > 0$. Такие производные определяются как положительные степени $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}, \tag{1.13}$$

и могут быть представлены в терминах прямого $\mathcal{F}$ и обратного $\mathcal{F}^{-1}$ преобразований Фурье:

$$\begin{gathered}(\mathbf{D}^{\alpha}y)(x) \equiv \Big((-\Delta)^{\alpha/2}y\Big)(x) = \\ = \big(\mathcal{F}^{-1}|x|^{\alpha}\mathcal{F}y\big)\,x), \\ x = (x_1, \cdots, x_l) \in \mathbf{R}^l.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Начиная с 80-х годов XX-го столетия началось изучение дифференциальных уравнений с частными дробными производным Такие частные производные Римана-Лиувилля и Капуто-Герасимова положительного порядка $\alpha > 0$ относительно $t > 0$ и фиксированного $x \in \mathbf{R}^l$, $(l \in \mathbf{N})$ имеют соответственно вид:

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{1.15}$$

и

$$({}^C D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial \tau^n} \frac{\partial \tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \tag{1.16}$$

где $n = [\alpha]+1$. Среди них наиболее употребляются производные порядка $0 < \alpha < 1$:

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau, \qquad (1.15'),$$

$$({}^C D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{(t-\tau)^{\alpha}}. \qquad (1.16')$$

Отметим, что приведенные выше производные положительного порядка $\alpha > 0$ могут быть распространены на комплексные $\alpha \in \mathbf{C}$. Например, дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, $\alpha \neq 0$, определяется следующей формулой:

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \quad (x > a;\ n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1), \tag{1.17}$$

где $I_{a+}^{\alpha} y$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$:

$$(I_{a+}^{\alpha} y)(x) \equiv (D_{a+}^{-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \ (x > a). \tag{1.18}$$

§2. Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля

Приведем некоторые сведения из теории дробных интегралов и производных Римана-Лиувилля I_{a+}^{α} и $D_{a+}^{\alpha}y$, определенных соответственно в (1.4) и (1.3).

Непосредственно проверяется, что дробное интегрирование и дифференцирование степенной функции $(x-a)^{\beta-1}$ дает степенную функцию того же вида.

Свойство 2.1. *Если* $\alpha \in \mathbf{C}$ *и* $\beta \in \mathbf{C}$ $(\mathrm{Re}(\beta) > 0)$, *то*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0), \tag{2.1}$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0). \tag{2.2}$$

В частности, если $\beta = 1$ *и* $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, *то дробная производная Римана-Лиувилля постоянной, вообще говоря, не равна нулю:*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}1\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \quad (\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0,\ \alpha \neq 0). \tag{2.3}$$

С другой стороны, для $j = 1, 2, \cdots, [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ из (2.2) вытекает формула

$$\left(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j}\right)(x) = 0. \tag{2.4}$$

Отсюда получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть* $\alpha \in \mathbf{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ *и* $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$. *Равенство*

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = 0 \tag{2.5}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j}, \tag{2.6}$$

где $c_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, \cdots, n)$ *- произвольные действительные постоянные.*

Формула (2.6) дает все решения простейшего дифференциально уравнения дробного порядка (2.5). В частности, если $0 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq 1$, равенство (2.5) справедливо тогда и только тогда, когда

$$y(x) = c(x-a)^{\alpha-1} \tag{2.6'}$$

с произвольной постоянной $c \in \mathbf{R}$.

Дробный интеграл (1.4) существует на измеримых по Лебегу функциях $y \in L_p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$:

$$L_p(a,b) = \left\{ y: \ \|y\|_p = \left(\int_a^b |y(x)|^p dx \right)^{1/p} \right\}, \tag{2.7}$$

и на функциях y из весового пространства непрерывных функций $C_\gamma[a,b]$ $(0 \le \gamma < 1)$:

$$C_\gamma[a,b] = \left\{ y(x): \ (x-a)^\gamma y(x) \in C[a,b] \right\}. \tag{2.8}$$

Имеют место следующие утверждения.

Свойство 2.2.1. *Оператор дробного интерирования I^α_{a+} порядка $\alpha > 0$ ограничен в пространстве $L_p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$:*

$$\|I^\alpha_{a+} f\|_p \le K \|f\|_p, \quad K = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.9}$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < 1/\alpha$, то оператор I^α_{a+} ограничен из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, где $q = p/(1-\alpha p)$.

Свойство 2.2.2. *Пусть* $\alpha > 0$ *and* $0 \leq \gamma < 1$.

(а) Если $\gamma > \alpha$, *то оператор* I^{α}_{a+} *ограничен из* $C_{\gamma}[a, b]$ *в* $C_{\gamma-\alpha}[a, b]$*:*

$$\|I^{\alpha}_{a+} f\|_{C_{\gamma-\alpha}} \leq k_1 \|f\|_{C_{\gamma}}, \tag{2.10}$$

$$k_1 = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma[1+\alpha-\gamma)]}.$$

В частности, оператор I^{α}_{a+} *ограничен в* $C_{\gamma}[a, b]$.

(б) Если $\gamma \leq \alpha$, *то оператор* I^{α}_{a+} *ограничен из* $C_{\gamma}[a, b]$ *в* $C[a, b]$*:*

$$\|I^{\alpha}_{a+} f\|_{C} \leq k_2 \|f\|_{C_{\gamma}}, \tag{2.11}$$

$$k_2 = (b-a)^{\alpha-\gamma} \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}.$$

В частности, оператор I^{α}_{a+} *ограничен в* $C[a, b]$.

Дробная производная (1.3) существует для функций $y(x)$ из пространств $AC^n[a,b]$ и $C^n_\gamma[a,b]$ непрерывно дифференциру на $[a,b]$ функций $g(x)$ до порядка $n-1$, таких что соответственно $g^{(n-1)}(x)$ есть абсолютно непрерывная функция на $[a,b]$ (для функций из $AC^n[a,b]$) и производная порядка n $g^{(n)}(x)$ принадлежит классу $C_\gamma[a,b]$: $g^{(n)}(x) \in C_\gamma[a,b]$ $(0 \le \gamma < 1)$ (для функций из $C^n_\gamma[a,b]$).

Имеют место следующие утверждения.

Свойство 2.3.1. *Пусть $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$. Если $y(x) \in AC^n[a,b]$, то дробная производная $D^\alpha_{a+}y$ существует почти всюду на $[a,b]$ и представима в виде*

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \tag{2.12}$$

В частности, если $0 < \alpha < 1$ и $y(x) \in AC[a,b]$, то

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{y(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^\alpha}\right]. \tag{2.13}$$

Свойство 2.3.2. *Если $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ и $y(x) \in C^n_\gamma[a,b]$ $(0 \le \gamma < 1)$, то дробная производная $D^\alpha_{a+}y$ существует на $(a,b]$ и представима в виде (2.12).*

В частности, если $0 < \alpha < 1$ и $y(x) \in C_\gamma[a,b]$, то $D^\alpha_{a+}y$ представима в виде (2.13).

Для операторов дробного интегрирования справедливо так называемое полугрупповое свойство:

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} y)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} y)(x) \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{2.14}$$

Свойство 2.4. *(а) Если* $y(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$, *то равенство (2.14) выполняется для почти всех точек* $x \in [a,b]$. *Если* $\alpha+\beta > 1$, *то (2.14) справедливо для любой точки отрезка* $[a,b]$.

(б) Если $y(x) \in C_{\gamma}[a,b]$ $(0 \le \gamma < 1)$, *то формула (2.14) верна для любой точки* $x \in (a,b]$. *Если* $y(x) \in C[a,b]$, *то (2.14) выполняется в любой точке* x *отрезка* $[a,b]$.

Как уже указывалось в формуле (1.6), оператор дробного дифференцирования D_{a+}^{α} обратен оператору дробного интегриров I_{a+}^{α} слева:

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) \quad (\alpha > 0) \tag{2.15}$$

Свойство 2.5. *(а) Если* $y(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p < \infty)$, *то равенство (2.15) справедливо почти всюду на* $[a,b]$.

(б) Если $y(x) \in C_\gamma[a,b]$ $(0 \leq \gamma < 1)$, *то формула (2.15) выполняется для любых* $x \in (a,b]$. *В частности, при* $y(x) \in C[a,b]$ *она справедлива для любой точки* x *отрезка* $[a,b]$.

Имеют место следующая формула композиции оператора дробного диффренцирования D_{a+}^{β} и оператора дробного интегрирования I_{a+}^{α} большего порядка $\beta > \alpha > 0$:

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} y)(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} y(x) \ (0 < \beta < \alpha), \tag{2.16}$$

и в частности при $\beta = k \in \mathbf{N}$ и $\alpha > k$,

$$(D^k I_{a+}^{\alpha} y)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} y(x) \tag{2.17}$$

$$\left(D = \frac{d}{dx};\ k \in \mathbf{N},\ k < \alpha\right).$$

Свойство 2.6. *(а) Если $\alpha > \beta > 0$ и $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \le p < \infty)$, то равенства (2.16) и (2.17) выполняются для почти всех точек $x \in [a,b]$.*

(б) Если $y(x) \in C_\gamma[a,b]$ $(0 \le \gamma < 1)$, то формулы (2.16) и (2.17) выполняются для любых $x \in (a,b]$. В частности, при $y(x) \in C[a,b]$ они справедливы для любой точки x отрезка $[a,b]$.

Следующее равенство дает формулу композиции оператора дробного интегрирования I_{a+}^{α} и оператора дробного дифференциро D_{a+}^{α}:

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j}, \quad (2.18)$$

где

$$y_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x) \quad (2.19)$$

есть дробный интеграл (1.4) порядка $n - \alpha$.

Эта формула имеет важное значение при исследовании дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля.

Свойство 2.7. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $n = [\alpha] + 1$.

(a) Если $y(x) \in L_1(a,b)$ *and* $y_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a,b]$, *то формула (2.18) выполняется для почти всех точек* $x \in [a,b]$.

(б) Если $y(x) \in C_{\gamma}[a,b]$ $(0 \leq \gamma < 1)$ *и* $y_{n-\alpha}(x) \in C_{\gamma}^{n}[a,b]$, *то соотношение (2.18) справедливо для любых* $x \in (a,b]$.

При $0 < \alpha < 1$ формула (2.18) принимает вид

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}, \tag{2.20}$$

где $y_{1-\alpha}(x) = (I_{a+}^{1-\alpha} y)(x)$,

Следствие 2.2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$.

(а) *Если* $y(x) \in L_1(a,b)$ *и* $y_{1-\alpha}(x) \in AC[a,b]$, *то (2.20) выполняется для почти всех точек* $x \in [a,b]$.

(б) Если $y(x) \in C_\gamma[a,b]$ $(0 \le \gamma < 1)$ *и* $y_{1-\alpha}(x) \in C_\gamma^1[a,b]$, *то соотношение (2.20) справедливо для любых* $x \in (a,b]$.

Заметим, что при $\alpha = n \in \mathbf{N}$ формула (2.18) принимает вид

$$(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}, \tag{2.21}$$

Последнее выражение есть известная формула из анализа, представляющая разложение функции $y(x)$ по формуле Тейлора, правая часть которой дает представление для ее остаточного члена.

Лекция 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка, теоремы существованимя и единственности

§3. Задача типа Коши для нелинейного "модельного"уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля

Большинство исследований в этой области были посвящены теоремам существованипя и единственности решений дифференци уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$, оперделенными для $\alpha > 0$ формулой (1.3). "Модельное"нелинейное дифференциальное уравнение порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ имет вид

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)] \quad (\alpha > 0;\ x > a), \tag{3.1}$$

с начальными условиями

$$(D^{\alpha-k}_{a+}y)(a+) = b_k,\ b_k \in \mathbf{R}\ (k = 1, 2, \cdots, n = -[-\alpha]). \tag{3.2}$$

Условие $n = -[-\alpha]$ означает, что $n = [\alpha] + 1$ для $\alpha \notin \mathbf{N}$ и $\alpha = n$ для $\alpha \in \mathbf{N}$.

Обозначение $(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)$ означает, что предел берется в точках правосторонней окрестности $(a, a+\epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ точки a

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = \lim_{x\to a+0}(D_{a+}^{\alpha-k}y)(x) \quad (1 \le k \le n-1), \quad (3.3)$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+) = \lim_{x\to a+0}(I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \ (\alpha \ne n);$$

$$(D_{a+}^{0}y)(a+) = y(a) \ (\alpha = n), \quad (3.4)$$

где $I_{a+}^{n-\alpha}$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $n-\alpha$, определенный в (1.4).

В частности, если $\alpha = n \in \mathbf{N}$, тогда согласно (1.7$'$), задача (3.1)-(3.2) сводится к обычной *задаче Коши* для обыкновенного дифференциального уравнения порядка $n \in \mathbf{N}$:

$$y^{(n)}(x) = f[x, y(x)],$$
$$y^{(n-k)}(a) = b_k,\ \ b_k \in \mathbf{R}\ (k = 1, 2, \cdots, n). \qquad (3.5)$$

Поэтому по аналогии задачу (3.1)-(3.2) называют *задачей типа Коши*; см., например, книгу Самко, Килбас, Маричев [2, § 42].

При $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ задача (3.1)-(3.2) имеет вид

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)], \quad (I^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b, \quad b \in \mathbf{R} \qquad (3.6)$$

и эта проблема может быть переписана также как весовая задача типа Коши:

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = f[x, y(x)],$$
$$\lim_{x \to a+0} (x-a)^{1-\alpha} y(x) = c, \quad c \in \mathbf{R}. \qquad (3.7)$$

Работы многих ученых были посвящены изучению задачи типа Коши (3.1)-(3.2). Они базировались на сведении этой задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x - t)^{1-\alpha}} \quad (x > a), \tag{3.8}$$

с последующим применением известных методов для исследования этого уравнения: теорема Банаха (принцип неподвижной точки), метод последовательных приближений и др.

При этом основную роль при сведении задачи (3.1)-(3.2) к уравнению Вольтерра (3.8) играла формула (2.18) композиции дробного интеграла I_{a+}^{α} и дробной производной D_{a+}^{α} :

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) =$$
$$= y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{[(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x)]^{(n-j)}|_{x=a}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j}. \qquad (3.9)$$

В силу непосредственно проверяемого равенства

$$[(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x)]^{(n-j)} = \left(D_{a+}^{\alpha - j} y \right)(x) \quad (j = 1, \cdots, n), \qquad (3.10)$$

(3.9) равносильна следующей формуле:

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) =$$

$$= y(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(D^{\alpha-j}_{a+}y)(a+)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}. \tag{3.11}$$

В частности, если $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, то

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) =$$

$$= y(x) - \frac{D^{\alpha-1}_{a+}(a+)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1},$$

или

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}y)(x) =$$

$$= y(x) - \frac{I^{1-\alpha}_{a+}(a+)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{3.12}$$

Тем не менее многие авторы формально сводили задачу (3.1)- (3.2) к уравнению Вольтерра второго рода (3.8), не доказывая их равносильность. Равносильность этих конструкций в пространствах интегрируемых и непрерывных функций была доказана в серии совместных работ лектора с отечественными и зарубежными математиками и представлена в главе 3 монографии [12].

Приведем здесь одно из утверждений, дающих равносильность задачи типа Коши (3.1)-(3.2) и уравнения Вольтерра (3.8) в весовом пространстве $C_\gamma[a,b]$ $(0 \leq \gamma < 1)$:

$$C_\gamma[a,b] = \{y(x): \ (x-a)^\gamma y(x) \in C[a,b]\}\,. \qquad (3.13)$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *и пусть* $f(x,y)$: $(a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ - *такая функция, что* $f[x,y] \in C_{n-\alpha}[a,b]$ *для любого* $y \in \mathbf{R}$.

Схема доказательства. Для доказательства необходимости применяется оператор дробного интегрирования I^α_{a+} к обеим частям уравнения (3.1), используется свойство 2.7 и на основании формулы (3.11) получается соотношение

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(D^{\alpha-j}_{a+}y)(a+)}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t,y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \ \ (x > a),$$

что в силу начальных условий (3.2) приводит к уравнению (3.8).

Доказательство достаточности основывается на свойствах 2.1-2.6 дробных интегралов и производных Римана-Лиувилля.

Для доказательства существования единственного решения задачи (3.1)-(3.2) к условиям теоремы 3.1 добавляется условие Липшица: для любых $y_1,\ y_2 \in \mathbf{R}$

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2 | \leq A \mid y_1 - y_2 |, \tag{3.14}$$

где $A > 0$ не зависит от $x \in [a, b]$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *и пусть* $f[x, y]$: $[a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ - *такая функция, что* $f[x, y] \in C_{n-\alpha}[a, b]$ *для любого* $y \in \mathbf{R}$ *и выполняется условие Липшица (3.14).*

Тогда существует единственное решение $y(x)$ *задачи типа Коши (3.2.4)-(3.2.5) в пространстве* $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha}[a, b]$*:*

$$\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha}[a, b] =$$

$$= \left\{ y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] :\ \left(D^{\alpha}_{a+} y\right)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] \right\}. \tag{3.15}$$

Доказательство. На основании теоремы 3.1 решение задачи (3.1)-(3.2) в пространстве $C_{n-\alpha}[a,b]$ равносильно решению уравнения Вольтерра (3.8). Это уравнение имеет смысл на любом интервале $[a,x_1] \in [a,b]$ $(a < x_1 < b)$. Выберем x_1 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$A(x_1-a)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(2\alpha-n+1)} < 1, \tag{3.16}$$

где A- постоянная Липшица в (3.14), и докажем существование единственного решения $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$ уравнения (3.8) на отрезке $[a,x_1]$. Для этого мы используем теорему Банаха о неподвижной точке в пространстве $C_{n-\alpha}[a,x_1]$, которое является полным метрическим пространством с расстоянием

$$d(y_1,y_2) = \|y_1-y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \equiv$$

$$\equiv \max_{x\in[a,x_1]} |(x-a)^{n-\alpha}[y_1(x)-y_2(x)]|. \tag{3.17}$$

Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$y(x) = (Ty)(x), \tag{3.18}$$

где

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} \tag{3.19}$$

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a). \tag{3.20}$$

Используя свойство 2.2.2 и условие Липшица (3.14), доказывается следующее: 1) если $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, то $(Ty)(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, 2) для любых $y_1, y_2 \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ выполняется оценка

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]},$$

$$\omega = A(x_1 - a)^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)}.$$

Тогда, в силу условия (3.16), по теореме Банаха о неподвижной точке в пространстве $C_{n-\alpha}[a,x_1]$ существует единственное решение $y^*(x) = y_0^*(x) \in C_{n-\alpha}[a,x_1]$ уравнения (3.8) на отрезке $[a,x_1]$. Это решение $y_0^*(x)$ есть предел последовательности $y_m(x) \equiv (T^m y_0)(x)$:

$$\lim_{m\to\infty} \|y_m(x) - y_0^*(x)\|_{C_{n-\alpha}[a,x_1]} = 0, \tag{3.21}$$

где $y_0(x)$ дается (3.19),

$$y_m(x) \equiv (T^m y_0)(x) =$$

$$= y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{3.22}$$

Далее расмотрим отрезок $[x_1, x_2]$, где $x_2 = x_1 + h_1$ и $h_1 > 0$ - такие, что $x_2 < b$. Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{3.23}$$

$$y_{01}(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x_1} \frac{f[t, y(t)]dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{3.24}$$

где $y_{01}(x)$ - известная функция.

Проводя такие же рассуждения, как и выше, мы докажем существование единтсвенного решения $y_1^*(x) \in C_{n-\alpha}[x_1, x_2]$ уравнения (3.8) на отрезке $[x_1, x_2]$. Выбирая следующий отрезок $[x_2, x_3]$, где $x_3 = x_2 + h_2$ и $h_2 > 0$ такие что $x_3 < b$, и повторяя этот процесс, получим единственное решение $y(x)$ уравнения (3.8) такое что $y(x) = y_k^*(x) \in C_{n-\alpha}[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, L)$, where $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_L = b$. Отсюда вытекает существование единственного решения $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ уравнения (3.8) на всем отрезке $[a, b]$ на основании следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $\gamma \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, $g \in C_\gamma[a, c]$ и $g \in C_\gamma[c, b]$. Тогда $g \in C_\gamma[a, b]$ и имеет место неравенство*

$$\|g\|_{C_\gamma[a,b]} \leq \max\left[\|g\|_{C_\gamma[a,c]}, \|g\|_{C_\gamma[c,b]}\right].$$

Таким образом, доказано существование единственного решения $y(x) = y^*(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ интегрального уравнения Вольтерра (3.8) и следовательно задачи типа Коши (3.2)-(3.3).

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что такое единственное решение $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ принадлежит пространству $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha}[a,b]$. Согласно определения (3.15), для этого достаточно доказать, что $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$. В силу вышеприведенных рассуждений, решение $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ есть предел последовательности $y_m(x) \equiv (T^m y_0)(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} = 0, \qquad (3.25)$$

с выбором определенных y_m на отрезках $[a, x_1], \cdots, [x_{L-1}, b]$. На основании (3.1) и (3.25) доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} \|D^{\alpha}_{a+}y_m - D^{\alpha}_{a+}y\|_{C_{n-\alpha}[a,b]} = 0.$$

Следовательно $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$, и теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.1. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$, *b пусть* $f[x,y] : [a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ - *такая функция, что* $f[x,y] \in C_{1-\alpha}[a,b]$ *для любого* $y \in \mathbf{R}$ *и выполняется условие Липшица (3.14).*

Тогда существует единственное решение $y(x)$ *задачи типа Коши*

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x)] \quad (0 < \alpha \leq 1;\ x > a), \tag{3.1}$$

$$(D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) \equiv (I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \tag{3.26}$$

в пространстве $\mathbf{C}_{1-\alpha}^{\alpha}[a,b]$*:*

$$\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a,b] = \left\{ y(x) \in C_{1-\alpha}[a,b] :\ \left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) \in C_{1-\alpha}[a,b] \right\}.$$

§4. Задача типа Коши для линейного "модельного"уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля

Рассмотрим задачу типа Коши для линейного "модельного" дифференциального уравнения

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad (a < x \leq b;\ \alpha > 0;\ \lambda \in \mathbf{R}), \tag{4.1}$$

с дробной производной Римана-Лиувилля $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ порядка $\alpha > 0$ с начальным условием (3.2):

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k, \tag{4.2}$$

$$b_k \in \mathbf{R}\ (k = 1, 2, \cdots, n = -[-\alpha])$$

в пространстве $\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a, b]$ $(n = -[-\alpha],\ 0 \leq \gamma < 1)$, определенном в (3.15).

Дадим явное решение этой задачи в предположении, что $f(x) \in C_{\gamma}[a, b]$ $(0 \leq \gamma < 1)$.

Согласно теореме 3.1, решение задачи типа Коши (4.1)-(4.2) равносильно решению в пространстве $C_{n-\alpha}[a, b]$ интегральног уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j} +$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{4.3}$$

Мы применим метод последовательных приближений для решения уравнения (4.3). Согласно (3.22), положим

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha-j}, \tag{4.4}$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y_{m-1}(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m \in \mathbf{N}). \tag{4.5}$$

Используя (1.4), (4.4) и учитывая (2.1), мы выводим выражение для $y_1(x)$

$$y_1(x) = y_0(x) + \lambda \left(I_{a+}^{\alpha} y_0\right)(x) + \left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j} +$$

$$+\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} \left(I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\alpha-j}\right)(x) + \left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j} +$$

$$+\lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(2\alpha - j + 1)} (x-a)^{2\alpha-j} + \left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x),$$

и следовательно

$$y_1(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda^{i-1} (x-a)^{\alpha i - j}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \tag{4.6}$$

Аналогично, применяя (2.1) и (4.4)-(4.6), находим выражение для $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0(x) + \lambda \left(I^{\alpha}_{a+} y_1 \right)(x) + \left(I^{\alpha}_{a+} f \right)(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} +$$

$$+\lambda \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} \left(I^{\alpha}_{a+} (t-a)^{\alpha i - j} \right)(x) +$$

$$+ \left(I^{\alpha}_{a+} f \right)(x) + \left(I^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f \right)(x).$$

Применяя формулу (2.14) и учитывая (1.4), получаем

$$y_2(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda^{i-1} (x-a)^{\alpha i - j}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} +$$

$$+ \int_a^x \left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} (x-t)^{\alpha i - 1} \right] f(t) dt. \tag{4.7}$$

Продолжая этот процесс, выводим формулу для $y_m(x)$ $(m \in \mathbf{N})$:

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i - j}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} +$$

$$+ \int_a^x \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} (x-t)^{\alpha i - 1} \right] f(t) dt. \tag{4.8}$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем явное решение $y(x)$ интегрального уравнения Вольтерра (4.3)

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i - j}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} +$$

$$+ \int_a^x \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} (x-t)^{\alpha i - 1} \right] f(t) dt,$$

или, заменяя индекс суммирования i на $i-1$,

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i (x-a)^{\alpha i + \alpha - j}}{\Gamma(\alpha i + \alpha - j + 1)} +$$

$$+ \int_a^x \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} (x-t)^{\alpha i + \alpha - 1} \right] f(t) dt. \qquad (4.9)$$

Это решение можно выразить в терминах специальной функции $E_{\alpha,\beta}(z)$, определяемой для комплексных параметров $\alpha,\ \beta \in \mathbf{C};\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ формулой

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in \mathbf{C}). \qquad (4.10)$$

Эта специальная функция, известная как функция Миттаг-Леффлера, является целой функцией от z. Показательная функци, а также тригонометрические и гиперболические косинус и синус через нее выражаются:

$$e^z = E_{1,1}(z), \quad ch(z) = E_{2,1}(z), \quad cos(z) = E_{2,1}(iz), \quad (4.11)$$

$$sh(z) = zE_{2,2}(z^2), \quad sin(z) = -zE_{2,2}(iz^2). \qquad (4.12)$$

Свойства функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ можно найти в справочнике [17, § 18.1] и монографиях [18]-[19]

17. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Том 3. *Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье* . М.: Наука. 1967.

18. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука. 1968.

19. Dzhrbashyan M.M. *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain.* Operator theory: Advances and Applications, Vol. 65. Dfsel: Birkh*ä*user Verlag. 1993.

Согласно (4.10), решение (4.9) перепишется в терминах функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ в виде:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j (x-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right] +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right] f(t)dt. \qquad (4.13)$$

Эта формула дает явное решение интегрального уравнения Вольтерра (4.3) и следовательно задачи типа Коши (4.1)-(4.2).

Ясно, что $f[x,y] = \lambda y + f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (3.14), и поэтому в силу свойства 2.2.2 и теоремы 3.2 существует единственное решение задачи типа Коши (4.1)-(4.2) в пространстве $\mathbf{C}^{\alpha}_{n-\alpha}[a,b]$, и формула (4.13) дает это решение. Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *и* γ $(0 \leq \gamma < 1)$ *- такие, что* $\gamma \geq n - \alpha$, *и пусть* $\lambda \in \mathbf{R}$. *Если* $f \in C_\gamma[a, b]$, *то задача типа Коши (4.1)-(4.2) имеет единственное решение* $y(x) \in \mathbf{C}^\alpha_{n-\alpha}[a, b]$ *и это решение дается формулой (4.13).*

В частности, если $f(x) = 0$, *то задача типа Коши для однородного уравнения (4.1):*

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) - \lambda y(x) = 0 \quad (a < x \leq b;\ \alpha > 0;\ \lambda \in \mathbf{R}), \quad (4.14)$$

с начальными условиями (4.2) имеет единственное решение $y(x)$ *в пространстве* $\mathbf{C}^\alpha_{n-\alpha}[a, b]$ *вида*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j (x - a)^{\alpha - j} E_{\alpha, \alpha - j + 1}\left[\lambda (x - a)^\alpha\right]. \qquad (4.15)$$

Пример 4.1. Решение задачи типа Коши

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (D^{\alpha-1}_{a+}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \qquad (4.16)$$

с $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ дается формулой

$$y(x) = b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right] +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right] f(t)dt, \qquad (4.17)$$

а решение задачи

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (D^{\alpha-1}_{a+}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \qquad (4.18)$$

имеет вид

$$y(x) = b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]. \qquad (4.19)$$

В частности, задача типа Коши

$$(D_{a+}^{1/2}y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (D_{a+}^{-1/2}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \tag{4.20}$$

имеет решение

$$y(x) = b(x-a)^{-1/2}E_{1/2,1/2}\left[\lambda(x-a)^{1/2}\right] +$$

$$+ \int_a^x (x-t)^{-1/2}E_{1/2,1/2}\left[\lambda(x-t)^{1/2}\right] f(t)dt, \tag{4.21}$$

а решение задачи

$$(D_{a+}^{1/2}y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (D_{a+}^{-1/2}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \tag{4.22}$$

дается формулой

$$y(x) = b(x-a)^{-1/2}E_{1/2,1/2}\left[\lambda(x-a)^{1/2}\right]. \tag{4.23}$$

Пример 4.2. Решение задачи типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = f(x),$$

$$(D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) = b \in \mathbf{R}, \quad (D_{a+}^{\alpha-2}y)(a+) = d \in \mathbf{R} \tag{4.24}$$

с $1 < \alpha < 2$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ имеет вид

$$y(x) = b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]+$$

$$+d(x-a)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]+$$

$$+\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)dt. \tag{4.25}$$

В частности, решение задачи

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x)-\lambda y(x)=0\ (1<\alpha<2),$$

$$(D^{\alpha-1}_{a+}y)(a+)=b\in\mathbf{R},\quad (D^{\alpha-2}_{a+}y)(a+)=d\in\mathbf{R} \tag{4.26}$$

дается формулой

$$y(x)=b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]+$$

$$+d(x-a)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]. \tag{4.27}$$

Лекция 3. Методы точного решения дифференциальных уравнений дробного порядка

§5. Уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля и постоянными коэффициентами: Метод интегральных преобразований Лапласа

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых задач для них известны следующие методы: метод сведения к интегральным уравнениям, метод интегральных преобразований и операционный метод. Такие же методы могут быть примененены для получения явных решений дифференциальных уравнений с дробными производными, а также так называемый композиционный метод. В связи с этим см. главы 4 и 5 монографии [12].

В §4 мы представили метод явного решения краевой задачи типа Коши (4.1)-(4.2), основанный на сведении рассматриваемой задачи к равносильному интегральному уравнению Вольтерра (4.3).

Здесь мы представим метод для нахождения явных решений уравнений (1.2) с постоянными коэффициентами с дробными производными Римана-Лиувилля на положительной полуоси $\mathbf{R}_+$, основаный на прямом и обратном преобразованиях Лапласа $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{-1}$:

$$(\mathfrak{L}\varphi)(p) = \int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt, \tag{5.1}$$

$$(\mathfrak{L}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} e^{px}g(p)dp \quad (\gamma = \mathrm{Re}(p) > \sigma,\ \sigma \in \mathbf{R}). \tag{5.2}$$

Теорию таких пребразований можно, например, найти в следующих монографиях:

20. Титчмарш Е.С. *Введение в теорию интегралов Фурье.* М.-Л.: Гостехиздат. 1948. Перевод из *Introduction to the Theory of Fourier Transforms.* New York: Chelsea. 1986; первое издание: Oxford: Oxford Univ. Press. 1937.

21. Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление.* М.: Наука. 1974.

В частности, преобразования $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{-1}$ взаимно обратны для "достаточно хороших"функций φ, g:

$$\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}\varphi = \varphi, \quad \mathfrak{L}\mathfrak{L}^{-1}g = g. \tag{5.3}$$

Рассмотрим неоднородное уравнение (1.2) с дробными производными Римана-Лиувилля $D^{\alpha_k}y = D_{0+}^{\alpha_k}y$ и постоянными коэффициентами $A_k \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k \left(D_{0+}^{\alpha_k}y\right)(x) + A_0 y(x) = f(x) \quad (x > 0). \tag{5.4}$$

Известно, что для "достаточно хороших"функций y преобразовани Лапласа $D_{0+}^{\alpha}y$ дается формулой

$$(\mathcal{L}D_{0+}^{\alpha}y)(p) = p^{\alpha}(\mathcal{L}y)(p). \tag{5.5}$$

Применяя преобразование Лапласа (5.1) к обеим сторонам уравнения (5.4) и учитывая (5.5), имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{m} A_k p^{\alpha_k} + A_0\right](\mathcal{L}y)(p) = (\mathcal{L}f)(p). \tag{5.6}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа (5.2), мы получим частное решение уравнения (5.4):

$$y(x) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\mathcal{L}f)(p)}{\sum_{k=1}^{m} A_k p^{\alpha_k} + A_0}\right]\right)(x). \tag{5.7}$$

Заметим, что Э.Хилле (Hille) и Я. Тамаркин (Tamarkin) в 1930 году

22. Hille E., Tamarkin J.D. On the theory of linear integral equations. *Ann. Math.*. 1930. Vol. 31. P. 479-528.

впервые применили метод преобразования Лапласа для решения интегрального уравнения Абеля второго рода

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \quad (x > 0, \ \alpha > 0) \tag{5.8}$$

и получили явное решение в виде

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha \left[\lambda(x-t)^\alpha\right] f(t)dt. \tag{5.9}$$

Здесь $E_\alpha(z) \equiv E_{\alpha,1}(z)$ - частный случай функции Миттаг-Леффлера (4.10), известный также как функция Миттаг-Леффлера:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0, \ z \in \mathbf{C}). \tag{5.10}$$

Испанский математик Д. Маравалл (Maravall) в работе

23. Maravall D. Linear differential equations of non-integer order and fractional oscilations (Spanish). *Rev. Ac. Ci. Madrid.* 1971. Vol. 65. P.245-258.

возможно первым применил формальный подход, основанный на преобразовании Лапласа, для получения явных решений проостейших уравнений вида (5.4). Однако его работа, опубликованная на испанском языке, было пратически неизвестна до появления обзора [13].

Многие авторы применяли преобразование Лапласа для получения явных решений специальных случаев уравнения (5.4); в связи с этим см. Kilbas, Srivastava and Trujillo [12, Section 5.1].

К.Миллер (Miller) и Б.Росс (Ross) [3] применили преобразование Лапласа для решения задачи Коши для частного случая уравнения (5.4) с производными порядка $\alpha_k = k\alpha$ и $1/\alpha = q = 1, 2, \cdots$:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k (D_{0+}^{k\alpha} y)(x) + A_0 y(x) = f(x), \tag{5.11}$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots y^{(m-1)}(0) = 0. \tag{5.12}$$

Они ввели *дробный аналог фунции Грина* $G_\alpha(x)$ определяемый в терминах обратного преобразования Лапласа (5.2):

$$G_\alpha(x) = \left(\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{P(t^\alpha)}\right]\right)(x), \quad P(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k x^k + A_0, \tag{5.13}$$

и доказали, что единственое решение $y(x)$ задачи (5.11)-(5.12) предстваляется в виде свертки Лапласа $G_\alpha(x)$ и $f(x)$:

$$y(x) = \int_0^x G_\alpha(x-t) f(t) dt. \tag{5.14}$$

Эти исследования продолжил И.Подлюбный (Podlubny) [6, Chapter 5]. Он определил дробный аналог функции Грина $G_\alpha(x,t)$ для более общего, чем (5.4), дифференциального уравнения дробного порядка и показал, что частное решение задачи типа Коши для рассматриваемого уравнения выражается через $G_\alpha(x,t)$. В частности, для уравнения (5.4) И.Подлюбный [6, Section 5.6] построил явную форму $G_\alpha(x,t)$ в виде кратного ряда, содержащего обобщенную функцию Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$, определенную в (4.10):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in \mathbf{C}). \tag{4.10}$$

В книгах К.Миллера (Miller) и Б.Росса (Ross) [3, Chapters V and VI] и И.Подлюбного (Podlubny) [6, Sections 4.1.1 and 4.2.1] можно найти примеры уравнений дробного порядка вида (5.4) и (5.11), решенных применением преобразовани Лапласа и дробного аналога функции Грина.

Используя формулу для преобразования Лапласа свертки

$$\left(\mathfrak{L}\left(\int_0^x k(x-t)f(t)dt\right)\right)(p) = (\mathfrak{L}k)(p)(\mathfrak{L}f)(p), \quad (5.15)$$

по аналогии с (5.13) введем более общий *дробный аналог функции Грина*:

$$G_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m}(x) = \left(\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{P_\alpha(x)}\right]\right)(x),$$

$$P_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k x^{\alpha_k} + A_0. \quad (5.16)$$

Тогда решение (5.7) дифференциального уравнения (5.4) имеет форму свертки Лапласа $G_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m}(x)$ и $f(x)$:

$$y(x) = \int_0^x G_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m}(x-t)f(t)dt. \quad (5.17)$$

Вышеприведенные исследования были в основном посвящены построению частных решений (5.7), (5.17) неоднородного уравнения (5.4). Рассмотрим соответствующее (5.4) однородное уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} A_k (D_{0+}^{\alpha_k} y)(x) + A_0 y(x) = 0 \quad (x > 0) \tag{5.18}$$

$$(m \geq 1;\ 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m;\ A_0, A_1, \cdots, A_m \in \mathbf{R}). \tag{5.19}$$

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями это уравнение имеет нетривиальные решения. В связи с этим мы отметим, что К.Миллер (Miller) и Б.Росс (Ross) [3, Section V.6] фактически нашли линейно независимые решения соответствующего (5.11) однородного уравнения ($f(x) = 0$):

$$\sum_{k=1}^{m} A_k (D_{0+}^{k\alpha} y)(x) + A_0 y(x) = 0. \tag{5.20}$$

А.А.Килбас (Kilbas), Г.Сривастава (Srivastava), Х.Трухилло (Trujillo) [12, Sections 5.21-5.2.2] применили преобразовние Лапласа для получения общих решений однородного уравнения (5.18) и соответствующего неоднородного уравнения (5.4). Примененный метод основывался на более общей, чем (5.5), формуле преобразования Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля на полуоси:

$$\left(\mathcal{L} D_{0+}^{\alpha} y\right)(s) =$$

$$= s^{\alpha}\left(\mathcal{L} y\right)(s) - \sum_{j=1}^{l} d_j s^{j-1} \quad (l-1 < \alpha \leq l, \quad l \in \mathbf{N}), \quad (5.21)$$

где

$$d_j = \left(D_{0+}^{\alpha-j} y\right)(0+) :=$$

$$= \lim_{x \to 0+} \left(D_{0+}^{\alpha-j} y\right)(x) \; (j = 1, \cdots, l). \qquad (5.22)$$

Сначала построим явные решения простейшего уравнения (5.18) с $m = 1$

$$\left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(x) - \lambda y(x) = 0 \ \ (x > 0;\ \ l-1 < \alpha \leqq l;\ \ l \in \mathbf{N};\ \lambda \in \mathbf{R}). \tag{5.23}$$

в терминах фунции Миттаг-Леффлера (4.10).

Предварительно введем понятие дробного Вронскиана $W_\alpha(x)$:

$$W_\alpha(x) = det\left(\left(D_{0+}^{\alpha-k} y_j\right)(x)\right)_{k,j=1}^{l}. \tag{5.24}$$

По аналогии с обыкновенными уравнениями доказывается, что решения $y_j(x)$ $(j = 1, \cdots, l)$ уравнения (5.23) образуют фундаментальную систему решений, если $W_\alpha(x_0) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \geq 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть $l - 1 < \alpha \leqq l$ $(l \in \mathbf{N})$ и $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда функции*

$$y_j(x) = x^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^\alpha\right) \quad (j = 1, \cdots, l) \tag{5.25}$$

где $E_{\alpha,\alpha+1-j}(z)$ -функции Миттаг-Леффлера (4.10), образуют фундаментальную систему решений уравнения (5.23).

Доказательство. Применяя преобразование Лапласа (5.1) к уравнению (5.23) и учитывая (5.21), имеем

$$(\mathcal{L}y)(s) = \sum_{j=1}^{l} d_j \frac{s^{j-1}}{s^{\alpha} - \lambda}, \tag{5.26}$$

где d_j $(j = 1, \cdots, l)$ даются (5.22). Справедлива следующая формула

$$\left(\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right]\right)(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (\mid \ \lambda s^{-\alpha} \mid < 1. \tag{5.27}$$

Эта формула с $\beta = \alpha + 1 - j$ принимает вид

$$\mathcal{L}\left[t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s) = \frac{s^{j-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad \left(|s^{-\alpha}\lambda| < 1\right). \tag{5.28}$$

Поэтому из (5.26) мы выводим следующее решение уравнения (5.23):

$$y(x) = \sum_{j=1}^{l} d_j y_j(x), \quad y_j(x) = x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right). \tag{5.29}$$

Непосредственно проверяется, что $y_j(x)$ являются решениями уравнения (5.23):

$$\left(D_{0+}^{\alpha}\left[t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right]\right)(x)=\lambda x^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha+1-j}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \tag{5.30}$$

при $j=1,\cdots,l$ и справедливы равенства

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k}y_j\right)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n+k+1-j)}x^{\alpha n+k-j} \tag{5.31}$$

при $k=1,\cdots,l$.

Из (5.31) получаем сотношения

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k}y_j\right)(0+)=0 \quad (k,j=1,\cdots,l;\ k>j),$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k}y_k\right)(0+)=1\ (k=1,\cdots,l). \tag{5.32}$$

Далее, если $k < j$, то

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k} y_j\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n + k + 1 - j)} x^{\alpha n + k - j} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(\alpha n + \alpha + k + 1 - j)} x^{\alpha n + \alpha + k - j}. \tag{5.33}$$

Следовательно, так как $\alpha + k - j \geqq \alpha + 1 - l > 0$ для $k, j = 1, \cdots, l$, верны следующие равенства:

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k} y_j\right)(0+) = 0 \quad (k, j = 1, \cdots, l;\ k < j). \tag{5.34}$$

Из (5.32) и (5.34) получаем значение дробного вронскиана $W_\alpha(x)$, определенного (5.24), в точке $x = 0$: $W_\alpha(0) = 1$. Поэтому решения $y_j(x)$ в (5.25) образуют фундаментальную систему решений уравнения (5.23). Это завершает доказательство теоремы 5.1.

Явные решения дифференциальных уравнений (5.18) и (5.4) в случае $m \geq 2$ выражаются в терминах специальных случаев обобщенной гипергеометрической функции Райта ${}_p\Psi_q(z)$, определенной для $z \in \mathbf{C}$, комплексных $a_i, b_j \in \mathbf{C}$, и действительных α_i, $\beta_j \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \cdots p;\ j = 1, 2, \cdots, q)$ рядом

$$ {}_p\Psi_q(z) \equiv_p \Psi_q \left[\begin{array}{c} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{array} \mid z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}. \tag{5.35} $$

Она является целой функцей от z при выполнении условия

$$ \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i > -1. $$

В связи с этой функцией см. справочник [24, Глава 1.4]

24. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Том 1. *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра.* М.: Наука. 1966.

и статью

25. Kilbas A.A., Saigo M., Trujillo, J.J. On the generalized Wright function. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2002. Vol. 5, no. 4. P. 437-460.

Именно, решения уравнений (5.18) и (5.4) выражаются в терминах обобщенной функции Райта (5.35) с $p = q = 1$:

$$
{}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ \\ (\alpha n+\beta,\alpha) \end{array} \Big| \, z \right] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+i+1)}{\Gamma(\alpha n+\beta+\alpha i)} \frac{z^i}{i!}
$$

$$
= \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n E_{\alpha,\beta}(z) \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{5.36}
$$

Результаты, полученные в [12, Sections 5.2.1-5.2.2] применены для получения явных решений задачи типа Коши для уравнений (5.18) и (5.4) с положительными $\alpha_k > 0$ (порядка $\alpha = \max_{1\le i\le m}(-[-\alpha_i])$) и с начальными условиями

$$
\left(D_{0+}^{\alpha-k} y \right)(0+) = b_k \in \mathbf{R} \;\; (k = 1, \cdots, l;\; l-1 < \alpha \le l,\; l \in \mathbf{N}). \tag{5.37}
$$

В частности, при $\alpha_k = k$ $(k = 1, \cdots, m)$, в [12, Section 5.2.4] соответствующие утверждения были установлены для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (5.18) и (5.4) с $D_{0+}^{\alpha_k} y = y^{(k)}$:

$$\sum_{k=1}^{m} A_k y^{(k)}(x) + A_0 y(x) = 0 \ \ (x > 0), \tag{5.38}$$

$$\sum_{k=1}^{m} A_k y^{(k)}(x) + A_0 y(x) = f(x) \ \ (x > 0), \tag{5.39}$$

с приложениями к нахождению явных решений задачи Коши для уравнений (5.38) и (5.39) с начальными условиями

$$y^{(m-k)}(0) = b_k \in \mathbf{R} \ \ (k = 1, \cdots, m). \tag{5.40}$$

Мы представим два результата из [12, Sections 5.2.1-5.2.2] дающих общие решения уравнений (5.18) и (5.4) с $m = 2$ вида:

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x) - \lambda\left(D_{0+}^{\beta}y\right)(x) - \mu y(x) = 0 \quad (0 < \beta < \alpha) \tag{5.41}$$

$$(x > 0; \quad 0 < \beta < \alpha),$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x) - \lambda\left(D_{0+}^{\beta}y\right)(x) - \mu y(x) = f(x) \tag{5.42}$$

$$(x > 0; \quad 0 < \beta < \alpha),$$

с $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, в терминах обобщенной функции Райта (5.36).

Теорема 5.2. *Пусть* $l-1<\alpha \leqq l$ $(l \in \mathbf{N})$, $0<\beta<\alpha$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. *Тогда функции*

$$y_j(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n+\alpha-j} \ {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ \\ (\alpha n+\alpha+1-j, \alpha-\beta) \end{array} \middle| \ \lambda x^{\alpha-\beta} \right] \tag{5.43}$$

$$(j=1, \cdots, l)$$

являются решениями уравнения (5.41), при условии, что ряды в (5.43) сходятся.

Если $\alpha - l + 1 \geqq \beta$, *то* $y_j(x)$ *- линейно независимые решения уравнения (5.41).*

В частности, при $\alpha l + 1 > \beta$ *они образуют фундаментальную систему решений:*

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k} y_j\right)(0+) = 0 \quad (k, j = 1, \cdots, l; \ k \neq j),$$

$$\left(D_{0+}^{\alpha-k} y_k\right)(0+) = 1 \quad (k = 1, \cdots, l). \tag{5.44}$$

Теорема 5.3. *Пусть* $l-1<\alpha \leqq l$ $(l\in \mathbf{N})$, $0<\beta<\alpha$ *- такие, что* $\alpha-l+1 \geqq \beta$, *let* $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ *и пусть* $f(x)$ *- заданная действительная функция на* $\mathbf{R}_+$. *Тогда уравнение (5.42):*

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x)-\lambda\left(D_{0+}^{\beta}y\right)(x)-\mu y(x)=f(x) \tag{5.42}$$

$$(x>0;\quad 0<\beta<\alpha)$$

разрешимо и его общее решение дается формулой

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{l}c_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^n}{n!}x^{\alpha n+\alpha-j}\ {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c|c} (n+1,1) & \\ & \lambda x^{\alpha-\beta} \\ (\alpha n+\alpha+1-j,\alpha-\beta) & \end{array}\right], \tag{5.45}$$

где

$$G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^n}{n!}z^{\alpha n}\ {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c|c} (n+1,1) & \\ & \lambda z^{\alpha-\beta} \\ (\alpha n+\alpha,\alpha-\beta) & \end{array}\right], \tag{5.46}$$

c_j $(j=1,\cdots,l)$ *- произвольные действительные постоянные.*

§6. Уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля и переменными коэффициентами: Метод интегральных преобразований Лапласа и Меллина

Представим метод для нахождения явных решений уравнений (1.2) с переменными коэффициентами с дробными производными Римана-Лиувилля на положительной полуоси $\mathbf{R}_+$, основаный на прямом и обратном преобразованиях Лапласа (5.1) и (5.2) и прямом и обратном преобразованиях Меллина $\mathcal{M}$ and $\mathcal{M}^{-1}$:

$$(\mathcal{M}\varphi)(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)dt \quad (s \in \mathbf{C}), \tag{6.1}$$

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} x^{-s}g(s)ds \quad (\gamma = \mathrm{Re}(p)). \tag{6.2}$$

Теорию таких пребразований можно, например, найти в монографии [21]. В частности, преобразования $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{-1}$ взаимно обратны для "достаточно хороших"функций φ, g:

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}g = g. \tag{6.3}$$

Мы дадим приложения преобразований Лапласа и Меллина к построению явных решений двух классов линейных дифференци уравнений (1.3), содержащих дробные производные Лиувилля $D_{0+}^{\alpha_k}y$ и $D_{-}^{\alpha_k}y$, определенные для $x > 0$ соответственно формулой (1.3) с $a = 0$:

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}y)(x) \quad (x > 0;\ n = [\alpha] + 1), \tag{1.3$'$}$$

$$(I_{0+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \ (x > 0;\ \alpha > 0), \tag{1.4$'$}$$

и

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha}y)(x) \quad (n = [\alpha] + 1); \tag{6.4}$$

$$(I_{-}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{y(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \ (\alpha > 0). \tag{6.5}$$

В монографии К.Миллера (Miller) и Б.Росса (Ross) [3, Глава VI.3] было указано, что преобразование Лапласа (5.1) может быть применено для решения однородного дифференциального уравнения (1.2) вида

$$\sum_{k=1}^{m} A_k(x)(D_{0+}^{k\alpha}y)(x) + A_0 y(x) = 0 \quad \left(\frac{1}{\alpha} = 1, 2, \cdots\right), \quad (6.6)$$

с полиномиальным коэффициентом $A_k(x)$, и такой подход был проиллюстрирован для получения явного решения уравнения

$$(D_{0+}^{1/2}y)(x) = \frac{y}{x} \quad (x > 0). \quad (6.7)$$

Следует отметить, что уравнение (6.7) было первым диффереціальным уравнением дробного порядка, рассмотренным в работах

26. O'Shaughnessy L. Problem ♯ 433, *Amer. Math. Month.*, **25** (1918), 172-173.

27. Post E.L. Discussion of the solution of $(d/dx)^{1/2}y = y/x$ (♯ problem 433), *Amer. Math. Month.*, **26** (1919), 37-39.

В связи с этим см. [2, §42.1] and [12, глава 5.1].

Вышеуказанная идея К.Миллера (Miller) и Б.Росса (Ross) была развита в монографии А.А.Килбаса (Kilbas), Г.Сривастава (Srivastava) и Х.Трухилло (Trujillo) [12, Глава 5.2.3]. Используя преобразование Лапласа (5.1) и соотношение (5.21), было получено явное решение диференциального уравнения, обобщающ уравнение (6.7):

$$\left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(x) = \frac{\lambda y(x)}{x} \quad (x > 0; \quad \alpha > 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}) \tag{6.8}$$

где $l - 1 < \alpha \leq l$ $(l \in \mathbf{N},\ l \neq 2)$ в терминах обобщенной гипергеометрической функции Райта (5.35) с $p = 0$, $q = 1$:

$${}_0\Psi_1(z(\equiv\ {}_0\Psi_1 \left[\begin{matrix} --- \\ \\ (b, \beta) \end{matrix} \ \Bigg|\ z \right] \quad (b \in \mathbf{C}; \quad \beta \in \mathbf{R}), \tag{6.9}$$

и с $p = 1$, $q = 2$:

$${}_1\Psi_2 \equiv_1 \Psi_2 \left[\begin{matrix} (a, \alpha) \\ \\ (b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2) \end{matrix} \ \Bigg|\ z \right] \tag{6.10}$$

$$(a, b_1, b_2 \in \mathbf{C}; \quad \alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}).$$

Приведем утверждение для уравнения (6.8) с $0 < \alpha < 1$.

Теорема 6.1. *Дифференциальное уравнение (6.8) с* $0 < \alpha < 1$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$ *разрешимо, и его решение дается формулой*

$$y(x) = cy_1(x) =$$

$$= cx^{\alpha-1} \,{}_0\Psi_1 \left[\begin{matrix} \\ (\alpha, \alpha-1) \end{matrix} \middle| \, -\frac{\lambda}{1-\alpha} x^{\alpha-1} \right], \tag{6.11}$$

где c - произвольная действительная постоянная.

В частности, решение уравнения (6.7) имеет вид

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-1/x}. \tag{6.12}$$

В монографии [6, Глава 6.1] было указано, что преобразование Меллина (6.1) может быть применено для решения задачи типа Коши для дифференциального уравнения

$$x^{\alpha+1}\left(D^{\alpha+1}y\right)(x)+x^{\alpha}\left(D^{\alpha}y\right)(x)=f(x)\quad(x>0)\tag{6.13}$$

с дробной производной Лиувилля $D^{\alpha+k}y = D_{0+}^{\alpha+k}y$ или с производной Герасимова-Капуто $D^{\alpha+k}y = {}^{C}D_{0+}^{\alpha+k}y$ $(k = 0,1)$ с $0<\alpha<1$, определяемыми соответственно $(1.3')$ и $(1.9')$.

Метод, основанный на преобразованиях Меллина, был применен в [12, глава 5.4] для получения частных решенеий дифференциальных уравнений дробного порядка с переменными коэффициентами, обобщающих уравнение (6.13), в виде

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} \left(D_{0+}^{\alpha+k} y\right)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad \alpha > 0) \qquad (6.14)$$

и

$$\sum_{k=0}^{m} B_k x^{\alpha+k} \left(D_{-}^{\alpha+k} y\right)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad \alpha > 0). \qquad (6.15)$$

Здесь $D_{0+}^{\alpha+k} y$ и $D_{-}^{\alpha+k} y$ - левосторонние и правосторонние дробные производные Лиувилля порядка $\alpha+k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$, определяемые соответственно $(1.3')$ и (6.4).

Если $\alpha = 0$, то $D_{0+}^{\alpha+k} y = y^{(k)}$, $D_{-}^{\alpha+k} y = (-1)^k y^{(k)}$, и уравнения (6.9) и (6.10) принимают соответственно вид

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^k y^{(k)}(x) = f(x) \quad (x > 0) \tag{6.9'}$$

и

$$\sum_{k=0}^{m} B_k (-1)^k x^k y^{(k)}(x) = f(x) \quad (x > 0), \qquad (6.10').$$

Такие обыкновенные дифференциальные уравнения известны как уравнения Эйлера, и поэтому мы называем (6.14) и (6.15) уравнениями эйлерова типа.

Представим результаты для уравнения (6.14) с $m = 1$:

$$x^{\alpha+1}\left(D_{0+}^{\alpha+1}y\right)(x) + \lambda x^{\alpha}\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x) = f(x) \qquad (6.16)$$

$$(x > 0; \quad \alpha > 0; \quad \lambda \in \mathbf{R}).$$

Частные решения этого уравнения различны в случаях $\lambda \neq n+1$ и $\lambda = n+1$ with $n \in \mathbf{N}_0$. В первом случае частное решение уравнения (6.16) выражается в терминах обобщенной гипергеометрической функции Райта (5.35) с $p = 1$ и $q = 2$ вида

$${}_1\Psi_2\left[\begin{array}{c|c} (a,1) & \\ & z \\ (b,-1),(c,1) & \end{array}\right] \quad (a,b,c,z \in \mathbf{C}). \qquad (6.17)$$

Теорема 6.2. *Если* $\alpha > 0$ *и* $\lambda \in \mathbf{R}$ $(\lambda \neq n+1;\ n \in \mathbf{N}_0)$, *то уравнение (6.16) разрешимо и его частное решение дается формулой*

$$y(x) = \int_0^1 G^1_{\alpha,\lambda}(t) f(xt)dt, \tag{6.18}$$

где

$$G^1_{\alpha,\lambda}(x)$$
$$= x^{-\alpha}\left\{\frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha+1-\lambda)}x^{\lambda-1} - \ {}_1\Psi_2\left[\begin{array}{c|c} (1-\lambda,1) & \\ & -x \\ (\alpha,-1),(2-\lambda,1) & \end{array}\right]\right\}. \tag{6.19}$$

Далее мы представим частное решение уравнения (6.16) в случае $\lambda = n+1$ ($n \in \mathbf{N}_0$):

$$x^{\alpha+1}\left(D_{0+}^{\alpha+1}y\right)(x) + (n+1)x^{\alpha}\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x) = f(x) \tag{6.20}$$

$$(x > 0; \quad \alpha > 0; \quad n \in \mathbf{N}_0),$$

в терминах пси-функции $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ и постоянной Эйлера $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1)$. Результат оказывается различным в случаях $n \in \mathbf{N}$ и $n = 0$.

Теорема 6.3. *(a) Если $\alpha > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ такие, что $\alpha \neq 1, \cdots, n$, то дифференциальное уравнение (6.20) разрешимо и его частное решение имеет вид:*

$$y(x) = \int_0^1 G^1_{\alpha,n+1}(t) f(xt) dt, \tag{6.21}$$

где

$$G^1_{\alpha,n+1}(x)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} x^{n-\alpha}}{n!\Gamma(\alpha - n)} \left[\log(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j-n} + \psi(\alpha - n) + \gamma \right] +$$

$$+ \sum_{k=0 \ (k \neq n)}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-\alpha}}{k!(n-k)\Gamma(\alpha - k)}. \tag{6.22}$$

(b) Если $n = 0$, то дифференциальное уравнение

$$x^{\alpha+1} \left(D^{\alpha+1}_{0+} y \right)(x) + x^{\alpha} \left(D^{\alpha}_{0+} y \right)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad \alpha > 0) \tag{6.23}$$

разрешимо и его частное решение дается формулой

$$y(x) = \int_0^1 G^1_{\alpha,1}(t) f(xt) dt, \tag{6.24}$$

$$G^1_{\alpha,1}(x) = -\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left[\log(x) + \psi(\alpha) + \gamma \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-\alpha}}{k! k \Gamma(\alpha - k)}. \tag{6.25}$$

Соответствующий результат для уравнения (6.14) с $n = 2$ доказан в статье

28. Kilbas A.A., Zhukovskaya N.V. Solution of Euler type nonhomogeneous differential equations with three fractional derivatives, in *Analytic Methods f Analysis and Differential Equations* (Editors A.A.Kilibas and S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers 2008, 11-137.

Прямое и обратное преобразования Меллина (6.1) и (6.2) могут быть также применены для нахождения явного решения соответствующего (6.14) однородного дифференциальног уравнения дробного порядка

$$\sum_{k=0}^{m} A_k x^{\alpha+k} \left(D_{0+}^{\alpha+k} y\right)(x) = 0 \quad (x > 0; \quad \alpha > 0). \qquad (6.26)$$

Представим простейший случай для уравнения (6.26), установленный в статье

29. Килбас А.А., Жуковская Н.В. Однородные дифференц уравнения эйлерова типа с дробными производными, *Труды Института Математики, Минск* 2010, No 1.

Теорема 6.4. *Пусть* $n, m \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots\}$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что* $n - 1 < \alpha \leq n$, *let* $A_0,\ A_1, \cdots, A_m \in \mathbf{R}$ $(A_m \neq 0)$, *и пусть* $s_1, \cdots, s_m$ *- корни многочлена*

$$P_m(s) = \sum_{k=0}^{m} A_k (s - \alpha - k) \cdots (s - \alpha - 1) = A_m (s - s_1) \cdots (s - s_m),$$

такие, что $s_i \neq s_j$ $(i, j = 1, \cdots, m;\ i \neq j)$, $s_j > 0$ *и, кроме того,* $s_j \neq \alpha - k$ *для* $j = 1, \cdots m$ *и любого* $k \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$*ю Тогда уравнение (6.26) имеет* $m + n$ *решений*

$$y_j(x) = x^{s_j - 1}\ (j = 1, \cdots, m), \quad y_i(x) = x^{\alpha - i}\ (i = 1, \cdots, n). \tag{6.27}$$

Лекция 4. Приложения теории дробного дифференцирования и и интегрирования в естественных науках

§7. Задача типа Коши для двумерного диффузионно-волнового уравнения дробного порядка. Метод интегральных преобразований

Для получения явных решений уравнений с частным дробными производными может быть также применен метод основанный на интегральных преобразованиях Лапласа (5.1)-(5.2) и Меллина (6.1)-(6.2), а также на многомерных интегральных преобразованиях Фурье: прямом

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}^l} e^{ix\cdot t}\varphi(t)dt \quad \left(x \in \mathbf{R}^l\right), \tag{7.1}$$

и обратном

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{R}^l} e^{-ix\cdot t}g(t)dt \quad \left(x \in \mathbf{R}^l\right), \tag{7.2}$$

где $x\cdot t = \sum_{k=1}^{l} x_k t_k$. Теорию таких пребразований можно, например, найти в монографиях

30. Stein E.M.; Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton: Princeton Univ. Press, N.J. 1971.

31. Никольский С.М. *Аппроксимация функций нескольких переменных и теоремы вложения.* Москва: Наука. 1977.

В частности, преобразования $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ взаимно обратны для "достаточно хороших"функций φ, g:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g. \tag{7.3}$$

Исторические сведения и обзор результатов в области применения интегральных преобразований Лапласа, Фурье и Меллина для решения уравнений с частными дробными производными представлен в монографии [12, главы 6.1.1-6.1.2]. Мы покажем применение метода интегральных преобразова для решения уравнения

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0;\ \lambda > 0), \quad (7.3)$$

с частной дробной производной Римана-Лиувилля $(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t)$ порядка $\alpha > 0$ относительно $t > 0$, определенной при любом $\alpha > 0$ формулой (1.15):

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \int\limits_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-l+1}} d\tau, \quad (7.4)$$

где $l = -[-\alpha]$.

Приведенные ниже результаты получены в статье

32. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача типа Коши для диффузтонно-волнового уравнения с частной производной Римана-Лиувилля. *Доклады академии наук, Российская академия наук* **406** (2006), *no. 1*, 12-16.

и представлены в монографии А.А.Килбаса (Kilbas), Г.Сривастава (Srivastava) и Х.Трухилло (Trujillo) [12, Глава 6.2.1].

Если $\alpha = 1$, то уравнение (7.3) является уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (\lambda > 0), \tag{7.5}$$

которое также называют уравнением диффузии, а при $\alpha = 2$ уравнение (7.3) является волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (\lambda > 0). \tag{7.6}$$

Поэтому (7.3) называют диффузионно-волновым уравнением.

Рассмотрим уравнение (7.3) порядка $0 < \alpha < 2$

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0;\ \lambda > 0), \quad (7.7)$$

с начальными условиями типа Коши

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,0+) = f_k(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \qquad (7.8)$$

где

$$k = 1 \quad (0 < \alpha \leqq 1);\ k = 2 \quad (1 < \alpha < 2). \qquad (7.9)$$

Для решения задачи типа Коши (7.7)-(7.8) применим преобразование Лапласа относительно t:

$$(\mathfrak{L}_t u)(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-st} dt \quad (x \in \mathbf{R};\ s > 0) \qquad (7.10)$$

и преобразовпание Фурье относительно $x \in \mathbf{R}$:

$$(\mathfrak{F}_x u)(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{ix\sigma} dx \quad (\sigma \in \mathbf{R};\ t > 0). \qquad (7.11)$$

Применяя преобразование Лапласа (7.10) к обеим частям равенства (7.7) и учитывая формулу преобразования Лапласа дробной производной (1.15):

$$\left(\mathfrak{L}_t D_{0+,t}^{\alpha} u\right)(x,s) =$$

$$= s^{\alpha}\left(\mathfrak{L}u\right)(x,s) - \sum_{j=1}^{l} s^{j-1}\left(D_{0+,t}^{\alpha-j} u\right)(x,0+) \qquad (7.12)$$

$$(x \in \mathbf{R};\ l-1 < \alpha \leqq l;\ l \in \mathbf{N})$$

с $l = 1$ и $l = 2$ в соответствующих случаях $0 < \alpha \leqq 1$ и $1 < \alpha < 2$, и учитывая начальные условия в (7.8), имеем

$$s^{\alpha}\left(\mathfrak{L}_t u\right)(x,s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathfrak{L}_t u\right)(x,s) \quad (l = 1, 2).$$

Применяя преобразование Фурье (7.11) к этому равенству и используя формулу

$$\left(\mathcal{F}_x\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]\right)(\sigma,t) = -|\sigma|^2\left(\mathcal{F}_x u\right)(\sigma,t),$$

получим следующее равенство:

$$\left(\mathcal{F}_x\mathcal{L}_t u\right)(\sigma,s) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}\frac{s^{k-1}}{s^\alpha+\lambda^2|\sigma|^2}\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\sigma) \quad (\sigma\in\mathbf{R};\ t>0;\ l=1,2). \tag{7.13}$$

Отсюда найдем решение $u(x,t)$ посредством применения обратного преобразования Фурье относительно σ:

$$\left(\mathcal{F}_\sigma^{-1}u\right)(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(\sigma,t)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (\sigma\in\mathbf{R};\ t>0) \tag{7.14}$$

и обратного преобразования Лапласа относительно s:

$$\left(\mathcal{L}_s^{-1}u\right)(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}u(x,s)ds \quad (x\in\mathbf{R} \tag{7.15}$$

$$\gamma = \Re(s) > \sigma_\varphi).$$

Известны следующие формулы из таблиц интегральных преобразований Фурье и Лапласа

$$\left(\mathcal{F}_x e^{-c|x|}\right)(\sigma) = \frac{2c}{c^2+|\sigma|^2} \quad (c>0; \quad \sigma \in \mathbf{R}), \qquad (7.16)$$

$$\left(\mathcal{F} e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right)(\sigma) = \frac{2\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}}{s^\alpha+\lambda^2|\sigma|^2}. \qquad (7.17$$

Согласно (7.16)-(7.17) соотношение (7.13) принимает следующий вид:

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) =$$

$$=; \left(\mathcal{F}_x \left[\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{l} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}\right]\right)(\sigma)\left(\mathcal{F}_x f_k\right)(\sigma) \quad (l=1,2). \qquad (7.18)$$

Учитывая формулу свертки

$$(\mathcal{F}(h * \varphi))(x) = (\mathcal{F}h)(x)(\mathcal{F}\varphi)(x),$$

$$(h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\varphi(t)dt,$$

перепишем (7.18) в виде

$$(\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) =$$

$$= \left(\mathcal{F}_x \left[\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x \ f_k(x)\right]\right)(\sigma) \quad (l = 1, 2).$$

Применяя обратное преобразование Фурье (7.14), выводим отсюда следующее равенство:

$$(\mathcal{L}_t u)(x, s) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x \ f_k(x) \qquad (7.19)$$

$$(x \in \mathbf{R}; \ s > 0; \ l = 1, 2).$$

Применяя к (7.19) обратное преобразование Лапласа (7.15), из (7.19) мы можем получить явное решение задачи типа Коши (7.7)-(7.8). Для этого нам нужно знать обратное преобразование Лапласа от функций $s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}$ $(k = 1, 2)$.

Эти функции выражаются через преобразование Лапласа функции Райта $\phi(\alpha, \beta; z)$ определенной для $z, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ рядом

$$\phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}. \qquad (7.20)$$

Отметим, что при $\alpha > -1$, $\phi(\alpha, \beta; z)$ - целая функция от $z \in \mathbf{C}$.

Именно, функции $s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}$ $(k = 1, 2)$ выражаются через преобразованiе Лапласа функции Райта $\phi(-\alpha/2, b; -z)$. Если $0 < \alpha < 2$, то $\phi(-\alpha/2, b; -z)$ есть целая функция от z. Непосредственно доказывается формула

$$\left(\mathfrak{L}_t \left[t^{\frac{\alpha}{2}-k}\phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\right)\right]\right)(s) =$$

$$= s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (k = 1, 2). \qquad (7.21)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (7.19) и используя формулу (7.21), получим решение задачи типа Коши (7.7)-(7.8):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{l} \int_{-\infty}^{\infty} G_k^{\alpha}(x-\tau, t) f_k(\tau) d\tau \tag{7.22}$$

$$(l = 1 \ for \ 0 < \alpha \leqq 1; \ l = 2 \ for \ 1 < \alpha < 2),$$

где

$$G_k^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad (k = 1, 2). \tag{7.23}$$

Теорема 7.1. *Если* $0 < \alpha < 2$ *и* $\lambda > 0$, *то задача типа Коши (7.7)-(7.8) разрешима и ее решение* $u(x,t)$ *дается формулами (7.22)-(7.23) при условии, что интегралы в правой части (7.23) сходятся.*

Следствие 7.1. *Если* $0 < \alpha \leqq 1$ *и* $\lambda > 0$, *то задача типа Коши*

$$(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}u\right)(x,0+) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0) \tag{7.24}$$

разрешима и е решение имеет вид

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t) f(\tau) d\tau, \tag{7.25}$$

$$G_1^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \tag{7.26}$$

при условии, что интеграл в правой части (7.26) сходится.

Следствие 7.2. *Если* $1 < \alpha < 2$ *и* $\lambda > 0$, *то задача типа Коши*

$$(D_{0+,t}^{\alpha}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0) \tag{7.27}$$

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-1}u\right)(x,0+) = f_1(x),\ \left(D_{0+,t}^{\alpha-2}u\right)(x,0+) = f_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{7.28}$$

разрешима и ее решение дается формулой

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{\alpha}(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} G_2^{\alpha}(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau, \tag{7.29}$$

где $G_1^{\alpha}(x,t)$ *дается (7.26) и*

$$G_2^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-2} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}-1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \tag{7.30}$$

при условии, что интегралы в правой части (7.29) сходятся.

Пример 7.1. Задача типа Коши (7.24) с $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$(D^{1/2}_{0+,t}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\left(I^{1/2}_{0+,t}u\right)(x,0+) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0) \tag{7.31}$$

имеет решение

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^{1/2}_1(x-\tau,t) f(\tau) d\tau, \tag{7.32}$$

где $G^{1/2}_1(x,t)$ дается формулой (7.26) с $\alpha = 1/2$.

Пример 7.2. Задача типа Коши (7.27)-(7.28) с $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$(D_{0+,t}^{3/2}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0) \tag{7.33}$$

$$\left(D_{0+,t}^{1/2}u\right)(x,0+) = f_1(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\left(I_{0+,t}^{1/2}u\right)(x,0+) = f_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{7.34}$$

имеет решение

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{3/2}(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} G_2^{3/2}(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau, \tag{7.35}$$

где $G_1^{3/2}(x,t)$ и $G_2^{3/2}(x,t)$ даются равенствами (7.26) и (7.30) с $\alpha = \frac{3}{2}$.

Пример 7.3. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (7.5)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$u(x,0) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R};\ t > 0) \tag{7.36}$$

дается формулой

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\tau,t) f(\tau) d\tau,$$

$$G(x,t) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}. \tag{7.37}$$

Этот хорошо известный результат следует из следствия 7.1 в силу следующего соотношения:

$$\phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}, \tag{7.38}$$

которое непосредственно проверяется на основании определения функции Райта (7.20).

§8. Приложения теории дробного дифференцирования и интегрирования в естественных науках. Дробная модель супердиффузионных процессов

Начиная с середины 1980-х годов начались исследования, посвященныые представлению вычислительных моделей дробного порядка для кинетики аномальных процессов естествознания в комплексных системах, характеризуемых долгой памятью и нелокальными свойствами соответствующих динамик. Особое внимание было уделено аномальным диффузион процессам, описывающим так называемые сверх-медленные (sub-) и сверх-быстрые (super-) диффузионные процессы.

Р.Р. Нигматуллин впервые в работах

33. Nigmatullin R.R. To the theoretical explanation of the "universal"response. *Phys. Sta. Sol. (b).* **123** (1984), *no. 2*, 739-745.

34. Nigmatullin, R.R. On the theory relaxation with "remnant"memory. *Phys. Status Solidi (b).* **124** (1984), *no. 1*, 389-393.

рассмотрел следующее "диффузионное уравнение с памятью"

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \int_a^t K(t-\tau)\Delta U_x(x,\tau)d\tau \quad (x \in \mathbf{R}^m,\ t>0)\,, \tag{8.1}$$

где Δ_x есть оператор Лапласа (1.13) по переменной x:

$$(\Delta_x u)(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_m^2}. \tag{1.13$'$}$$

В частности, если $K(t) = \rho^2\delta(t-a)$, где $\delta(t-a)$ - дельта-функция Дирака, равенство (8.1) представляет классическое уравнение теплопроводности (диффузии):

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \rho^2 \Delta U(x,t) \quad (x \in \mathbf{R}^m,\ t>0)\,. \tag{8.2}$$

Существует много вычислительных моделей дробного порядка для сверх-медленных диффузионных (sub-diffusion) процессов без воздействия или с воздействием поля внешних сил (an external force field) такие как *уравнение диффузии дробного порядка (Fractional Diffusion Equation)* и *адвекционно диффузионное уравнение (Advection-Diffusion Equation)* или *уравнение Фокка-Планка (Fokker-Planck Equation)* сответственно. Все эти модели содержат дробные производные Римана-Лиувилля $(D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t)$ или Герасимова-Капуто $({}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}u)(x,t)$ по временной переменной $t > 0$ и дробные производные Лиувилля $(D^{\alpha}_{\pm,x}u)(x,t)$ или Рисса $(\mathbf{D}^{\alpha}_{x}u)(x,t)$ по пространственной переменной $x \in \mathbf{R}^m$ $(m \in \mathbf{N})$.

Сверх-быстрые диффузионных (super-diffusion) процессы изучены меньше. Кроме того, только в нескольких работах были рассмотрены вычислительный модели дробного порядка с дробной производной Рисса $(\mathbf{D}_x^\alpha u)(x,t)$ по пространственной переменной, опеределяемой формулой (1.14):

$$(\mathbf{D}_x^\alpha u)(x,t) \equiv (-\Delta_x)^{\alpha/2} u)(x,t) = \left(\mathcal{F}_x^{-1}|x|^\alpha(\mathcal{F}_x u)\right)(x,t) \tag{8.3}$$
$$x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbf{R}^m, \quad t > 0.$$

в терминах прямого и обратного преобразований Фурье $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$, определяемых (7.1) и (7.2).

В [12, глава 8.2] была предложена *новая* вычислительная модель сверх-быстрых диффузионных процессов с оператором обобщенного дробного дифференцирования Лиувилля $D^{\alpha}_{-;g}$ по временной переменой $t > 0$. Для функции $g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ соответствующая одномерная дробная производная $D^{\alpha}_{-;g}f$ от функции f по функции g порядка $\alpha > 0$ для $x > a \geqq -\infty$ определяется формулой [2, п. 18.2]

$$(D^{\alpha}_{-;g}f)(x) =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \right)^{n} \int_{x}^{\infty} \frac{g'(t) f(t) dt}{[g(t) - g(x)]^{\alpha - n + 1}} \qquad (8.4)$$
$$(n = -[-\alpha]).$$

В частности, если $a = 0$ и $g(x) = x^\sigma$ $(\sigma > 0)$, (8.4) есть обобщенная дробная производная порядка $\alpha > 0$ по функции x^σ:

$$(D^\alpha_{-;x^\sigma} f)(x) = \frac{\sigma^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-x^{1-\sigma} \frac{d}{dx} \right)^n \int_x^\infty \frac{t^{\sigma-1} f(t) dt}{(t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-n+1}} \tag{8.5}$$

$$(x > 0;\ n = -[-\alpha]).$$

Предложенная нами модель позволяет осуществлять строгий контроль над обоими сверх-медленными и сверх-быстрыми диффузионными процессами. Она также дает большую гибкость для свободной функции g, и имеет многие другие преимущества с чисто технической точки зрения в том смысле, что мы можем использовать те же самые методы, что и в обыкновенном случае (то есть методы, основанные на интегральных преобразованиях и разделении переменных) для решения краевых задач, связанных с моделями дробного порядка.

Сначала мы рассмотрим нашу модель дробного порядка в одномерном случае. Напомним схему решения классической задачи, связанной с одномерным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t) \quad (\rho > 0;\ 0 < x < l,\ t > 0), \quad (8.6)$$

с краевыми условиями

$$U(0,t) = U(l,t) = 0 \quad (t > 0) \qquad (8.7)$$

и начальным условием

$$U(x,0) = f(x) \quad (0 < x < l), \qquad (8.8)$$

где f - "достаточно гладкая"функция на отрезке $[0, l]$.

Заметим, что параметр ρ^2 может характеризовать температурны

(или диффузионный) коэффициент среды.

Применяя метод разделения переменых, будем искать решение задачи (8.6)-(8.7) в виде $U(t,x) = T(t)X(x)$. Тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\rho^2 T(t)} = -\lambda. \tag{8.9}$$

Следовательно, $X(x)$ есть решение задачи Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{8.10}$$

для которой собственные значения и собственные функции даются формулами

$$\lambda_n = \mathbf{a}^2;\ X_n(x) = \sin(\mathbf{a}x);\ \mathbf{a} = \frac{n\pi}{l} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{8.11}$$

С другой стороны, $T(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$T'(t) + (\mathbf{a}\rho)^2 T(t) = 0, \tag{8.12}$$

даваемое равенством

$$T_n(t) = \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^2 t\right] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{8.13}$$

Наконец, решение задачи, моделированной уравнениями (8.6)-(8.8), получается как решение в виде ряда, чьи коэффициенты c_n находятся из разложения функции f в ряд Фурье с учетом начального условия (8.8):

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t), \tag{8.14}$$

где

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(\mathbf{a}x) f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{8.15}$$

где $X_n(x)$ и $T_n(t)$ даются соответственно формулами (8.11) и (8.13).

Поэтому нам нужно только доказать сходимость на $[0,l]\times[0,\infty)$ двойного ряда для $U(x,t)$ в (8.14) и рядов для $U_{xx}(x,t)$ и $U_t(x,t)$, получаемых почленным дифференцированием ряда (8.14) соответственно по x и по t.

Теперь мы видим что сверх-диффузионный процесс, связанный с рассмотренной выше проблемой (8.6)-(8.8), может быть получен заменой множителя $T_n(t)$ в решении (8.14) некоторой функцией $T_n(t,\alpha)$, зависящей от времени t и нового параметра α. Такой новый параметр дает нам возможность сонтролировать убывани е процесса по временной переменной; наприменр, мы возьмем

$$T_n(t,\alpha) = \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t,\alpha)\right] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{8.16}$$

В этом случае (8.14) заменяется более общим решением вида

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t,\alpha), \tag{8.17}$$

где $X_n(t)$ и $T_n(t,\alpha)$ даются соответственно (8.11) и (8.16).

Таким образом сверх-медленные и сверх-быстрые диффузионнь процессы могут контролироваться функцией $g(t,\alpha)$.

Например, если $g(t, \alpha) = t^\alpha$, то мы имеем сверх-медленную кинетику при $0 < \alpha < 1$ и сверх-быструю кинетику при $\alpha > 1$. Это находится в согласии с так называемым методом "непрерывных случайных блужданий (continuous time random walk (CTRW))".

На этом пути посредством выбора функции $g(t, \alpha)$ мы можем получать подходящие решения нашей задачи для того, чтобы контролировать очень сильные сверх-быстрые диффузионные процессы. Например, если мы возьмем $g(t, \alpha) = \exp(t^\alpha)$ с $\alpha > 1$, то возможно (8.17) даст новую модель для динамических свойств сверх-проводимости некоторых материалов при определеных граничных условиях.

Теперь мы можем построить соответствующую дробную модель с решением (8.17). Задача заключается в нахождении некоторого "дробного"оператора $\mathbf{D}^\alpha$ (дробного порядка, особого с памятью или др.) порядка $\alpha > 0$ со следующим свойством:

$$\mathbf{D}^\alpha T(t,\alpha) = (\mathbf{a}\rho)^2 T(t,\alpha), \tag{8.18}$$

где

$$T(t,\alpha) \equiv T_n(t,\alpha) = \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t,\alpha)\right] \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{8.19}$$

Такая задача решается взятием $\mathbf{D}^\alpha = D^\alpha_{-,g(t,\alpha)}$, где $D^\alpha_{-;g(t,\alpha)} f$, как функция от t, есть дробная производная порядка $\alpha > 0$ от функции f по функции $g(t,\alpha)$, определенная для $x \in \mathbf{R}$ и $t > 0$ равенством

$$\left(D^\alpha_{-;g(t,\alpha)} U\right)(x,t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{1}{g'(t,\alpha)} \frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty \frac{g'(\tau,\alpha) U(x,\tau) d\tau}{[g(\tau,\alpha) - g(t,\alpha)]^{\alpha-n+1}}, \tag{8.20}$$

с $n = -[-\alpha]$.

Действительно, если мы предположим, что $g(t,\alpha)$ (для любого фиксированного $\alpha > 0$) - монотонно возрастаюшая функция от $t \in \mathbf{R}_+ = (0,\infty)$, имеющая непрерывную производную $\frac{\partial}{\partial t} g(t,\alpha) \neq 0$, тогда в соответствии со свойством

$$\left(D^{\alpha}_{-,g} e^{-\lambda g(t)}\right)(x) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda g(x)}, \tag{8.21}$$

(см. [12, формула (8.1.10)], мы имеем

$$\left(D^{\alpha}_{-;g(t,\alpha)} \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(\tau,\alpha)\right]\right)(t) =$$

$$= (\mathbf{a}\rho)^2 \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t,\alpha)\right], \tag{8.22}$$

и следовательно (8.18) справедливо для $\mathbf{D}^{\alpha} = D^{\alpha}_{-;g(t,\alpha)}$.

Поэтому новая диффузионная модель дробного порядка может быть представлена следующим дифференциальныи уравнением дробного порядка

$$D^{\alpha}_{-;g(t,\alpha)} U(x,t) = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t) \quad (\alpha > 0;\ t > 0;\ x \in \mathbf{R}) \tag{8.23}$$

с частной дробной производной (8.20).

Если дополнительно предположить, что $\lim_{t\to 0+} g(t,\alpha) = k(\alpha) \in \mathbf{R}$ для любого $\alpha > 0$, то явное решение задачи, моделируемой равенствами (9.23), (9.7) и (9.8), имеет вид (8.17):

$$U(x,t) = \frac{1}{k(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\mathbf{a}x) \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t,\alpha)\right], \quad (8.24)$$

при условии, что $g(t,\alpha)$ выбрана так, что $U(x,t)$, $D^{\alpha}_{-;g(t,\alpha)}U(x,t)$, и $U_{xx}(x,t)$ - сходящиеся двойные ряды на $[0,l] \times [0,\infty)$, а c_n дается формулой (8.15).

Например, при $g(t,\alpha) = t^\alpha$ $(\alpha > 0)$ мы можем доказать сходимость указанный выше рядов так же как и в случае $\alpha = 1$. В этом случае $D^\alpha_{-;g(t,\alpha)} = D^\alpha_{-;t^\alpha}$ есть частная производная дробного порядка вида (8.5), определенная для $x \in \mathbf{R}$ и $t > 0$ равенством

$$\left(D^\alpha_{-;t^\alpha} U\right)(x,t) =$$

$$= \frac{\alpha^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty \frac{\tau^{\alpha-1}U(x,\tau)d\tau}{(\tau^\alpha - t^\alpha)^{\alpha-n+1}} \ \ (n = -[-\alpha]). \tag{8.25}$$

Тогда уравнение (8.23) принимает вид

$$D^\alpha_{-;t^\alpha} U(x,t) = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t) \ \ (\alpha > 0;\ t > 0;\ x \in \mathbf{R}), \tag{8.26}$$

и явное решение задачи, моделируемой равенствами (8.26), (8.7) и (8.8), представимо формулой

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin(\mathbf{a}x) \exp\left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} t^\alpha\right]. \tag{8.27}$$

Аналогичным образом можно рассмативать случай, когда $g(t,\alpha) = \exp(t^\alpha)$.

Модель (8.26) может быть распространена на пространственную переменную $x \in \mathbf{R}^m$, если мы заменим частную производную $\partial^2/\partial x^2$ оператором Лапласа (1.13) относительно x:

$$D^{\alpha}_{-;g(t,\alpha)}U(x,t) = \rho^2 \Delta_x U(x,t) \quad (\alpha > 0;\ t > 0;\ x \in \mathbf{R}^m). \tag{8.28}$$

В частности, модель (8.26) примет вид

$$D^{\alpha}_{-;t^\alpha}U(x,t) = \rho^2 \Delta_x U(x,t) \quad (\alpha > 0;\ t > 0;\ x \in \mathbf{R}^m). \tag{8.29}$$

Аналогично (8.24) и (8.27) явные решения этих уравнений также могут быть выведены при соответствующих граничных и начальных условиях.

Представляется, что указанный нами подход, основанный на использовании обобщенных частных производных дробного порядка (8.20), может быть также примене для построения соответствующих моделей обобщенного дробного порядка для уравнения Фоккера-Планка (Fokker-Planck) и адвекционно-диффузионного (advection-diffusion) уравнения. Мы предполагаем что такие модели будут согласованы с моделями для соответствую обобщений, включая например оператор дробного дифференциров $\mathbf{D}^{\alpha}$, определенный (8.3) по пространсвенной переменной.

В заключение отметим, что существует много возможностей для контроля убывания экспоненциального типа фундаментельны решений обобщенных уравнений дробной диффузии, и на этом пути та же самая математическая техника может быть иаспользована для изучения новых моделей дробного порядка для контроля аномальных диффузионных процессов.