

Методологическая школа-конференция
"Математическая физика и нанотехнологии"
посвященная 40-летию возрождения
Самарского государственного университета
(Самара, 4-9 октября 2009 года)

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДРОБНОГО ПОРЯДКА

(КУРС ЛЕКЦИЙ)

Анатолий Александрович Килбас

*Механико-математический факультет,
Белорусский государственный университет,
220030 Минск, Беларусь*

E-mail: anatolykilbas@gmail.com

Лекция 1. Дробные интегралы и дробные производные

§1. Введение

В последние годы возрос интерес к исследованию так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки. В связи с этим мы приведем список монографий и обзорных статей по этой тематике:

1. Oldham K.B., Spanier, J. *The Fractional Calculus*. New York-London: Academic Press. 1974.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника. 1987.

Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. New York: Gordon and Breach. 1993. (Расширенное и дополненное русское издание).

3. Miller K.S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons. 1993.

4. Carpintery A., Mainardi F. (Eds.) *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. CIAM Courses and Lectures. Vol. 376. Wien: Springer. 1997.

5. **Gorenflo R., Mainardi F.** Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996)*. CISM Courses and Lectures. 1997. Vol. 378. P. 223-276.
6. **Podlubny I.** *Fractional Differential Equations*. San-Diego: Academic Press. 1999.
7. **Hilfer R.** (Ed.) *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: WSPC. 2000.
8. **Metzler R., Klafter J.** The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Reports*. 2000. Vol. 339. P. 1-77.
9. **Нахушев А.М.** *Элементы дробного исчисления и их приложения*. Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН. 2000.
10. **Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J.** (Eds.) *Fractional Differentiation and its Applications*. Bordeaux: Bordeaux Univ. 2005.
11. **Псху А.В.** *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука. 2005.
12. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Amsterdam, etc.: Elsevier. 2006.

В вышеуказанных монографиях и статьях можно найти различные приложения дифференциальных уравнений дробного порядка в физике, механике, химии, инженерии и других областях науки и естествознания с библиографией работ в этих отраслях.

Дифференциальные уравнения дробного порядка имеют следующий общий вид

$$F[x, y(x), D^{\alpha_1}y(x), D^{\alpha_2}y(x), \dots, D^{\alpha_m}y(x)] = f(x). \quad (1.1)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_l)$ - точка l -мерного Евклидова пространства \mathbf{R}^l ($l \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$), $F[x, y_1, y_2, \dots, y_l]$ и $f(x)$ - заданные функции, а D^{α_k} - операторы дробного дифференцирования действительного порядка $\alpha_k > 0$ или комплексного порядка $\alpha_k \in \mathbf{C}$ ($\text{Re}(\alpha_k) \geq 0$) ($k = 1, 2, \dots, m$). Соответствующие линейные уравнения с заданными функциями $A_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) и $f(x)$ даются формулой

$$A_0y(x) + \sum_{k=1}^m A_k(x) (D^{\alpha_k}y)(x) = f(x). \quad (1.2)$$

Дифференциальные операторы дробного порядка в (1.1)-(1.2) могут иметь различные формы. Обзор методов и результатов в теории дифференциальных уравнений дробного порядка был дан в двух обзорных статьях

13. Kilbas A.A., Trujillo J.J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems - I. *Appl. Anal.* 2001. Vol. 78. P. 153-192; II. *Appl. Anal.* 2002. Vol. 81. P.435-494.

и его расширенный вариант представлен в монографии [12].

Среди одномерных линейных дифференциальных уравнений (1.2) уравнения наиболее изучены уравнения, содержащие дробные производные Римана-Лиувилля $D^\alpha y = D_{a+}^\alpha y$, $a \in \mathbf{R}$. Такие дробные производные положительного порядка $\alpha > 0$ определяются формулой

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \quad (x > a; n = [\alpha] + 1), \quad (1.3)$$

где $I_{a+}^\alpha y$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha > 0$:

$$(I_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a), \quad (1.4)$$

$\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера.

Отметим, что подход Римана-Лиувилля (1.4) к определению дробного интегрирования есть обобщение интегрирования с переменным верхним пределом \int_{a+}^x , взятого n раз:

$$\begin{aligned} \int_a^x dt \int_a^t dt_1 \cdots \int_a^{t_{n-2}} y(t_{n-1}) dt_{n-1} &= \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t) dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

Действительно, если мы используем формулу $(n-1)! = \Gamma(n)$ и заменим натуральное n на $\alpha > 0$, то (1.5) дает (1.4).

Оператор дробного дифференцирования D_{a+}^α обратен оператору дробного интегрирования (1.4) слева:

$$(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) \quad (\alpha > 0) \quad (1.6)$$

для "достаточно хороших" функций $y(x)$. В частности, если $0 < \alpha < 1$, то

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \quad (1.7)$$

а при $\alpha = n \in \mathbf{N}$

$$(D_{a+}^n y)(x) \equiv (D^n y)(x) \quad (D = d/dx) \quad (1.7')$$

есть обычная производная порядка n .

С 80-х годов XX-го века началось исследование одномерных дифференциальных уравнений (1.2) с модифицированными дробными производными Римана-Лиувилля (1.3) $D^{\alpha_k}y = {}^C D_{0+}^{\alpha_k}y$ положительного порядка $\alpha > 0$. Такие производные определяются равенством

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(D_{a+}^{\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x), \quad (1.8)$$

где $n = [\alpha] + 1$ при $\alpha \notin \mathbf{N}$ и $n = \alpha$ при $\alpha \in \mathbf{N}$.

Если $\alpha \notin \mathbf{N}_0$, то для дифференцируемых функций y справедлива формула

$$({}^C D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad n = [\alpha]+1. \quad (1.9)$$

При $0 < \alpha < 1$ и $a = 0$ производная ${}^C D_{0+}^\alpha y$ принимает вид

$$({}^C D_{0+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{y'(t) dt}{(x - t)^\alpha} \quad (x > 0, 0 < \alpha < 1). \quad (1.9')$$

Эта конструкция была введена итальянским механиком М.Капуто в 1967 году в работе

14. Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. *Geophys. J. Astronom. Soc.* 1967. Vol. 13. P.529-539.

и представлена в его монографии

15. Caputo M. *Elasticita e Dissipazione*. Bologna: Zanichelli. 1969.

Поэтому за границей (1.8)-(1.9) называют дробной производной Капуто.

На наш взгляд, это не совсем верно. Правильнее их называть дробными производными Герасимова-Капуто, так как в 1948 году советский механик А.Н. Герасимов ввел частную производную вида (1.9') относительно t на всей оси:

$$({}^C D_{-,t}^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{u_y(x, y) dy}{(t - y)^\alpha} \quad (1.9''),$$

$$(t > 0, x \in \mathbf{R}; 0 < \alpha < 1).$$

в своей работе

16. Герасимов А.Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения. *АН СССР. Прикладная математика и механика*. 1948. Т. 12. С.529-539.

В этой же работе А.Н.Герасимов изучил две новые задачи теории пластичности и свел их решение к двум дифференциальным уравнениям с частной дробной производной (1.9'')

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left({}^C D_{-,t}^\alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right) (x, t) \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\rho x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 \frac{\partial}{\partial x} ({}^C D_{-,t}^\alpha u)(x, t) \right) (x, t) \quad (0 < \alpha < 1).$$

Отметим, что А.Н.Герасимов был первым ученым, рассмотревшим дифференциальные уравнения с частными дробными производными

В нынешнем столетии началось исследование одномерных дифференциальных уравнений (1.2) с дробными производными Адамара $D^{\alpha_k} y = {}^H D_{0+}^{\alpha_k} y$ порядка $\alpha > 0$. Такие конструкции определяются на полуоси $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ формулой

$$({}^H D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \delta^n (\mathcal{J}_{0+}^{n-\alpha} y)(x) \quad (x > a; n = [\alpha] + 1). \quad (1.10)$$

Здесь $\delta = xD$, $D = d/dx$ - так называемая дельта производная, а $\mathcal{J}_{0+}^{\alpha} y$ - дробный интеграл Адамара порядка $\alpha > 0$:

$$(\mathcal{J}_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{y(t) dt}{t} \quad (x > 0). \quad (1.11)$$

Заметим, что дробное интегрирование Адамара есть обобщении операции интегрирования с переменным верхним пределом вида $\int_{a+}^x \frac{1}{x}$, примененного n раз:

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{dt}{t} \int_a^t \frac{dt_1}{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-2}} y(t_{n-1}) \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-1} \frac{y(t) dt}{t}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

сравните с (1.5).

Если $\alpha = n \in \mathbf{N}$, то

$$({}^H D_{a+}^n y)(x) \equiv (\delta^n y)(x)$$

есть δ производная порядка n .

В ряде работ рассматривались многомерные дифференциальные уравнения (1.2) с дробными производными Рисса $D^{\alpha_k} y = \mathbf{D}^{\alpha_k} y$ положительного порядка $\alpha > 0$. Такие производные определяются как положительные степени $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}, \quad (1.13)$$

и могут быть представлены в терминах прямого \mathcal{F} и обратного \mathcal{F}^{-1} преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^{\alpha} y)(x) &\equiv \left((-\Delta)^{\alpha/2} y \right) (x) = \\ &= (\mathcal{F}^{-1} |x|^{\alpha} \mathcal{F} y) (x), \\ x &= (x_1, \cdots, x_l) \in \mathbf{R}^l. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Начиная с 80-х годов XX-го столетия началось изучение дифференциальных уравнений с частными дробными производными. Такие частные производные Римана-Лиувилля и Капуто-Герасимова положительного порядка $\alpha > 0$ относительно $t > 0$ и фиксированного $x \in \mathbf{R}^l$, ($l \in \mathbf{N}$) имеют соответственно вид:

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (1.15)$$

и

$$({}^C D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} \frac{\partial \tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} \quad (1.16)$$

где $n = [\alpha] + 1$. Среди них наиболее употребляются производные порядка $0 < \alpha < 1$:

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau, \quad (1.15')$$

$$({}^C D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{(t - \tau)^\alpha}. \quad (1.16')$$

Отметим, что приведенные выше производные положительного порядка $\alpha > 0$ могут быть распространены на комплексные $\alpha \in \mathbf{C}$. Например, дробная производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, $\alpha \neq 0$, определяется следующей формулой:

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \quad (x > a; n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1), \quad (1.17)$$

где $I_{a+}^{\alpha}y$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$:

$$(I_{a+}^{\alpha}y)(x) \equiv (D_{a+}^{-\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a). \quad (1.18)$$

§2. Дробные интегралы и производные Римана-Лиувилля

Приведем некоторые сведения из теории дробных интегралов и производных Римана-Лиувилля I_{a+}^{α} и $D_{a+}^{\alpha}y$, определенных соответственно в (1.4) и (1.3).

Непосредственно проверяется, что дробное интегрирование и дифференцирование степенной функции $(x-a)^{\beta-1}$ дает степенную функцию того же вида.

Свойство 2.1. *Если $\alpha \in \mathbf{C}$ и $\beta \in \mathbf{C}$ ($\operatorname{Re}(\beta) > 0$), то*

$$(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0), \quad (2.1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0). \quad (2.2)$$

В частности, если $\beta = 1$ и $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, то дробная производная Римана-Лиувилля постоянной, вообще говоря, не равна нулю:

$$(D_{a+}^{\alpha}1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \quad (\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0, \alpha \neq 0). \quad (2.3)$$

С другой стороны, для $j = 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$ из (2.2) вытекает формула

$$(D_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\alpha-j})(x) = 0. \quad (2.4)$$

Отсюда получаем следующий результат.

Следствие 2.1. Пусть $\alpha \in \mathbf{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) и $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$. Равенство

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = 0 \quad (2.5)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$y(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x - a)^{\alpha-j}, \quad (2.6)$$

где $c_j \in \mathbf{R}$ ($j = 1, \dots, n$) - произвольные действительные постоянные.

Формула (2.6) дает все решения простейшего дифференциального уравнения дробного порядка (2.5). В частности, если $0 < \operatorname{Re}(\alpha) \leq 1$, равенство (2.5) справедливо тогда и только тогда, когда

$$y(x) = c(x - a)^{\alpha-1} \quad (2.6')$$

с произвольной постоянной $c \in \mathbf{R}$.

Дробный интеграл (1.4) существует на измеримых по Лебегу функциях $y \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$):

$$L_p(a, b) = \left\{ y : \|y\|_p = \left(\int_a^b |y(x)|^p dx \right)^{1/p} \right\}, \quad (2.7)$$

и на функциях y из весового пространства непрерывных функций $C_\gamma[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$):

$$C_\gamma[a, b] = \{y(x) : (x - a)^\gamma y(x) \in C[a, b]\}. \quad (2.8)$$

Имеют место следующие утверждения.

Свойство 2.2.1. *Оператор дробного интегрирования I_{a+}^α порядка $\alpha > 0$ ограничен в пространстве $L_p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$):*

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_p \leq K \|f\|_p, \quad K = \frac{(b - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (2.9)$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < 1/\alpha$, то оператор I_{a+}^α ограничен из $L_p(a, b)$ в $L_q(a, b)$, где $q = p/(1 - \alpha p)$.

Свойство 2.2.2. Пусть $\alpha > 0$ and $0 \leq \gamma < 1$.

(а) Если $\gamma > \alpha$, то оператор I_{a+}^α ограничен из $C_\gamma[a, b]$ в $C_{\gamma-\alpha}[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_{C_{\gamma-\alpha}} \leq k_1 \|f\|_{C_\gamma}, \quad (2.10)$$

$$k_1 = \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma[1 + \alpha - \gamma]}.$$

В частности, оператор I_{a+}^α ограничен в $C_\gamma[a, b]$.

(б) Если $\gamma \leq \alpha$, то оператор I_{a+}^α ограничен из $C_\gamma[a, b]$ в $C[a, b]$:

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_C \leq k_2 \|f\|_{C_\gamma}, \quad (2.11)$$

$$k_2 = (b - a)^{\alpha-\gamma} \frac{\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 + \alpha - \gamma)}.$$

В частности, оператор I_{a+}^α ограничен в $C[a, b]$.

Дробная производная (1.3) существует для функций $y(x)$ из пространств $AC^n[a, b]$ и $C_\gamma^n[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $g(x)$ до порядка $n-1$, таких что соответственно $g^{(n-1)}(x)$ есть абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$ (для функций из $AC^n[a, b]$) и производная порядка n $g^{(n)}(x)$ принадлежит классу $C_\gamma[a, b]$: $g^{(n)}(x) \in C_\gamma[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$) (для функций из $C_\gamma^n[a, b]$).

Имеют место следующие утверждения.

Свойство 2.3.1. Пусть $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Если $y(x) \in AC^n[a, b]$, то дробная производная $D_{a+}^\alpha y$ существует почти всюду на $[a, b]$ и представима в виде

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (2.12)$$

В частности, если $0 < \alpha < 1$ и $y(x) \in AC[a, b]$, то

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{y'(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right]. \quad (2.13)$$

Свойство 2.3.2. Если $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ и $y(x) \in C_\gamma^n[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$), то дробная производная $D_{a+}^\alpha y$ существует на $(a, b]$ и представима в виде (2.12).

В частности, если $0 < \alpha < 1$ и $y(x) \in C_\gamma[a, b]$, то $D_{a+}^\alpha y$ представима в виде (2.13).

Для операторов дробного интегрирования справедливо так называемое полугрупповое свойство:

$$(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} y)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} y)(x) \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \quad (2.14)$$

Свойство 2.4. (а) Если $y(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$), то равенство (2.14) выполняется для почти всех точек $x \in [a, b]$. Если $\alpha + \beta > 1$, то (2.14) справедливо для любой точки отрезка $[a, b]$.

(б) Если $y(x) \in C_{\gamma}[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$), то формула (2.14) верна для любой точки $x \in (a, b)$. Если $y(x) \in C[a, b]$, то (2.14) выполняется в любой точке x отрезка $[a, b]$.

Как уже указывалось в формуле (1.6), оператор дробного дифференцирования D_{a+}^α обратен оператору дробного интегрирования I_{a+}^α слева:

$$(D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) \quad (\alpha > 0) \quad (2.15)$$

Свойство 2.5. (а) Если $y(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$), то равенство (2.15) справедливо почти всюду на $[a, b]$.

(б) Если $y(x) \in C_\gamma[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$), то формула (2.15) выполняется для любых $x \in (a, b]$. В частности, при $y(x) \in C[a, b]$ она справедлива для любой точки x отрезка $[a, b]$.

Имеют место следующая формула композиции оператора дробного дифференцирования D_{a+}^β и оператора дробного интегрирования I_{a+}^α большего порядка $\beta > \alpha > 0$:

$$(D_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha y)(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} y(x) \quad (0 < \beta < \alpha), \quad (2.16)$$

и в частности при $\beta = k \in \mathbf{N}$ и $\alpha > k$,

$$(D^k I_{a+}^\alpha y)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} y(x) \quad (2.17)$$

$$\left(D = \frac{d}{dx}; \quad k \in \mathbf{N}, \quad k < \alpha \right).$$

Свойство 2.6. (а) Если $\alpha > \beta > 0$ и $f(x) \in L_p(a, b)$ ($1 \leq p < \infty$), то равенства (2.16) и (2.17) выполняются для почти всех точек $x \in [a, b]$.

(б) Если $y(x) \in C_\gamma[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$), то формулы (2.16) и (2.17) выполняются для любых $x \in (a, b]$. В частности, при $y(x) \in C[a, b]$ они справедливы для любой точки x отрезка $[a, b]$.

Следующее равенство дает формулу композиции оператора дробного интегрирования I_{a+}^α и оператора дробного дифференцирования D_{a+}^α :

$$(I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha y)(x) = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{y_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}, \quad (2.18)$$

где

$$y_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) \quad (2.19)$$

есть дробный интеграл (1.4) порядка $n - \alpha$.

Эта формула имеет важное значение при исследовании дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля.

Свойство 2.7. Пусть $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$.

(а) Если $y(x) \in L_1(a, b)$ and $y_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a, b]$, то формула (2.18) выполняется для почти всех точек $x \in [a, b]$.

(б) Если $y(x) \in C_\gamma[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$) и $y_{n-\alpha}(x) \in C_\gamma^n[a, b]$, то соотношение (2.18) справедливо для любых $x \in (a, b)$.

При $0 < \alpha < 1$ формула (2.18) принимает вид

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1}, \quad (2.20)$$

где $y_{1-\alpha}(x) = (I_{a+}^{1-\alpha} y)(x)$,

Следствие 2.2. Пусть $0 < \alpha < 1$.

(а) Если $y(x) \in L_1(a, b)$ и $y_{1-\alpha}(x) \in AC[a, b]$, то (2.20) выполняется для почти всех точек $x \in [a, b]$.

(б) Если $y(x) \in C_{\gamma}[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$) и $y_{1-\alpha}(x) \in C_{\gamma}^1[a, b]$, то соотношение (2.20) справедливо для любых $x \in (a, b]$.

Заметим, что при $\alpha = n \in \mathbf{N}$ формула (2.18) принимает вид

$$(I_{a+}^n D_{a+}^n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k, \quad (2.21)$$

Последнее выражение есть известная формула из анализа, представляющая разложение функции $y(x)$ по формуле Тейлора, правая часть которой дает представление для ее остаточного члена.

Лекция 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка, теоремы существования и единственности

§3. Задача типа Коши для нелинейного "модельного" уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля

Большинство исследований в этой области были посвящены теоремам существования и единственности решений дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)$, определенными для $\alpha > 0$ формулой (1.3). "Модельное" нелинейное дифференциальное уравнение порядка $\alpha > 0$ на конечном отрезке $[a, b]$ действительной оси $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ имеет вид

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x)] \quad (\alpha > 0; x > a), \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbf{R} \quad (k = 1, 2, \dots, n = -[-\alpha]). \quad (3.2)$$

Условие $n = -[-\alpha]$ означает, что $n = [\alpha] + 1$ для $\alpha \notin \mathbf{N}$ и $\alpha = n$ для $\alpha \in \mathbf{N}$.

Обозначение $(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+)$ означает, что предел берется в точках правосторонней окрестности $(a, a + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) точки a

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+0} (D_{a+}^{\alpha-k}y)(x) \quad (1 \leq k \leq n-1), \quad (3.3)$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n}y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+0} (I_{a+}^{n-\alpha}y)(x) \quad (\alpha \neq n);$$

$$(D_{a+}^0y)(a+) = y(a) \quad (\alpha = n), \quad (3.4)$$

где $I_{a+}^{n-\alpha}$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $n - \alpha$, определенный в (1.4).

В частности, если $\alpha = n \in \mathbf{N}$, тогда согласно (1.7'), задача (3.1)-(3.2) сводится к обычной задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения порядка $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f[x, y(x)], \\ y^{(n-k)}(a) &= b_k, \quad b_k \in \mathbf{R} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поэтому по аналогии задачу (3.1)-(3.2) называют *задачей типа Коши*; см., например, книгу Самко, Килбас, Маричев [2, § 42].

При $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ задача (3.1)-(3.2) имеет вид

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f[x, y(x)], \quad (I_{a+}^{1-\alpha} y)(a+) = b, \quad b \in \mathbf{R} \quad (3.6)$$

и эта проблема может быть переписана также как весовая задача типа Коши:

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} y)(x) &= f[x, y(x)], \\ \lim_{x \rightarrow a+0} (x - a)^{1-\alpha} y(x) &= c, \quad c \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Работы многих ученых были посвящены изучению задачи типа Коши (3.1)-(3.2). Они базировались на сведениях этой задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x - t)^{1 - \alpha}} \quad (x > a), \quad (3.8)$$

с последующим применением известных методов для исследования этого уравнения: теорема Банаха (принцип неподвижной точки), метод последовательных приближений и др.

При этом основную роль при сведении задачи (3.1)-(3.2) к уравнению Вольтерра (3.8) играла формула (2.18) композиции дробного интеграла I_{a+}^α и дробной производной D_{a+}^α :

$$\begin{aligned} & (I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha y)(x) = \\ & = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{[(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x)]^{(n-j)}|_{x=a}}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В силу непосредственно проверяемого равенства

$$[(I_{a+}^{n-\alpha} y)(x)]^{(n-j)} = (D_{a+}^{\alpha-j} y)(x) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3.10)$$

(3.9) равносильна следующей формуле:

$$\begin{aligned}
& (I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \\
& = y(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(D_{a+}^{\alpha-j} y)(a+)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

В частности, если $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$, то

$$\begin{aligned}
& (I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \\
& = y(x) - \frac{D_{a+}^{\alpha-1}(a+)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1},
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
& (I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} y)(x) = \\
& = y(x) - \frac{I_{a+}^{1-\alpha}(a+)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1}. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Тем не менее многие авторы формально сводили задачу (3.1)- (3.2) к уравнению Вольтерра второго рода (3.8), не доказывая их равносильность. Равносильность этих конструкций в пространствах интегрируемых и непрерывных функций была доказана в серии совместных работ лектора с отечественными и зарубежными математиками и представлена в главе 3 монографии [12].

Приведем здесь одно из утверждений, дающих равносильность задачи типа Коши (3.1)-(3.2) и уравнения Вольтерра (3.8) в весовом пространстве $C_\gamma[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$):

$$C_\gamma[a, b] = \{y(x) : (x - a)^\gamma y(x) \in C[a, b]\}. \quad (3.13)$$

Теорема 3.1. Пусть $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ и пусть $f(x, y) : (a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ - такая функция, что $f[x, y] \in C_{n-\alpha}[a, b]$ для любого $y \in \mathbf{R}$.

Схема доказательства. Для доказательства необходимости применяется оператор дробного интегрирования I_{a+}^α к обеим частям уравнения (3.1), используется свойство 2.7 и на основании формулы (3.11) получается соотношение

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{(D_{a+}^{\alpha-j} y)(a+)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x - t)^{1-\alpha}} \quad (x > a),$$

что в силу начальных условий (3.2) приводит к уравнению (3.8).

Доказательство достаточности основывается на свойствах 2.1-2.6 дробных интегралов и производных Римана-Лиувилля.

Для доказательства существования единственного решения задачи (3.1)-(3.2) к условиям теоремы 3.1 добавляется условие Липшица: для любых $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leq A | y_1 - y_2 |, \quad (3.14)$$

где $A > 0$ не зависит от $x \in [a, b]$.

Теорема 3.2. Пусть $\alpha > 0, n = -[-\alpha]$ и пусть $f[x, y] : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ - такая функция, что $f[x, y] \in C_{n-\alpha}[a, b]$ для любого $y \in \mathbf{R}$ и выполняется условие Липшица (3.14).

Тогда существует единственное решение $y(x)$ задачи типа Коши (3.2.4)-(3.2.5) в пространстве $\mathbf{C}_{n-\alpha}^\alpha[a, b]$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_{n-\alpha}^\alpha[a, b] = \\ & = \{y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] : (D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Доказательство. На основании теоремы 3.1 решение задачи (3.1)-(3.2) в пространстве $C_{n-\alpha}[a, b]$ равносильно решению уравнения Вольтерра (3.8). Это уравнение имеет смысл на любом интервале $[a, x_1] \in [a, b]$ ($a < x_1 < b$). Выберем x_1 таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$A(x_1 - a)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)} < 1, \quad (3.16)$$

где A - постоянная Липшица в (3.14), и докажем существование единственного решения $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ уравнения (3.8) на отрезке $[a, x_1]$. Для этого мы используем теорему Банаха о неподвижной точке в пространстве $C_{n-\alpha}[a, x_1]$, которое является полным метрическим пространством с расстоянием

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &= \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a, x_1]} \equiv \\ &\equiv \max_{x \in [a, x_1]} |(x - a)^{n-\alpha} [y_1(x) - y_2(x)]|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$y(x) = (Ty)(x), \quad (3.18)$$

где

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} \quad (3.19)$$

$$(Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x - t)^{1 - \alpha}} \quad (x > a). \quad (3.20)$$

Используя свойство 2.2.2 и условие Липшица (3.14), доказывается следующее: 1) если $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, то $(Ty)(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$, 2) для любых $y_1, y_2 \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ выполняется оценка

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{n-\alpha}[a, x_1]} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{C_{n-\alpha}[a, x_1]},$$

$$\omega = A(x_1 - a)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(2\alpha - n + 1)}.$$

Тогда, в силу условия (3.16), по теореме Банаха о неподвижной точке в пространстве $C_{n-\alpha}[a, x_1]$ существует единственное решение $y^*(x) = y_0^*(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$ уравнения (3.8) на отрезке $[a, x_1]$. Это решение $y_0^*(x)$ есть предел последовательности $y_m(x) \equiv (T^m y_0)(x)$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_m(x) - y_0^*(x)\|_{C_{n-\alpha}[a, x_1]} = 0, \quad (3.21)$$

где $y_0(x)$ дается (3.19),

$$\begin{aligned} y_m(x) &\equiv (T^m y_0)(x) = \\ &= y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f[t, y_{m-1}(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$, где $x_2 = x_1 + h_1$ и $h_1 > 0$ - такие, что $x_2 < b$. Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$y(x) = y_{01}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^x \frac{f[t, y(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (3.23)$$

$$y_{01}(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x_1} \frac{f[t, y(t)] dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (3.24)$$

где $y_{01}(x)$ - известная функция.

Проводя такие же рассуждения, как и выше, мы докажем существование единственного решения $y_1^*(x) \in C_{n-\alpha}[x_1, x_2]$ уравнения (3.8) на отрезке $[x_1, x_2]$. Выбирая следующий отрезок $[x_2, x_3]$, где $x_3 = x_2 + h_2$ и $h_2 > 0$ такие что $x_3 < b$, и повторяя этот процесс, получим единственное решение $y(x)$ уравнения (3.8) такое что $y(x) = y_k^*(x) \in C_{n-\alpha}[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, \dots, L$), where $a = x_1 < x_2 < \dots < x_L = b$. Отсюда вытекает существование единственного решения $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ уравнения (3.8) на всем отрезке $[a, b]$ на основании следующей леммы.

Лемма 3.1. Пусть $\gamma \in \mathbf{R}$, $a < c < b$, $g \in C_\gamma[a, c]$ и $g \in C_\gamma[c, b]$. Тогда $g \in C_\gamma[a, b]$ и имеет место неравенство

$$\|g\|_{C_\gamma[a,b]} \leq \max [\|g\|_{C_\gamma[a,c]}, \|g\|_{C_\gamma[c,b]}].$$

Таким образом, доказано существование единственного решения $y(x) = y^*(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ интегрального уравнения Вольтерра (3.8) и следовательно задачи типа Коши (3.2)-(3.3).

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что такое единственное решение $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ принадлежит пространству $\mathbf{C}_{n-\alpha}^\alpha[a, b]$. Согласно определения (3.15), для этого достаточно доказать, что $(D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$. В силу вышеприведенных рассуждений, решение $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$ есть предел последовательности $y_m(x) \equiv (T^m y_0)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_m - y\|_{C_{n-\alpha}[a, b]} = 0, \quad (3.25)$$

с выбором определенных y_m на отрезках $[a, x_1], \dots, [x_{L-1}, b]$. На основании (3.1) и (3.25) доказываем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_{a+}^\alpha y_m - D_{a+}^\alpha y\|_{C_{n-\alpha}[a, b]} = 0.$$

Следовательно $(D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$, и теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$, пусть $f[x, y] : [a, b] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ - такая функция, что $f[x, y] \in C_{1-\alpha}[a, b]$ для любого $y \in \mathbf{R}$ и выполняется условие Липшица (3.14).

Тогда существует единственное решение $y(x)$ задачи типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x)] \quad (0 < \alpha \leq 1; x > a), \quad (3.1)$$

$$(D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) \equiv (I_{a+}^{1-\alpha}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \quad (3.26)$$

в пространстве $\mathbf{C}_{1-\alpha}^{\alpha}[a, b]$:

$$\mathbf{C}_{1-\alpha}^{\alpha}[a, b] = \{y(x) \in C_{1-\alpha}[a, b] : (D_{a+}^{\alpha}y)(x) \in C_{1-\alpha}[a, b]\}.$$

**§4. Задача типа Коши для линейного
"модельного" уравнения с дробной производной
Римана-Лиувилля**

Рассмотрим задачу типа Коши для линейного "модельного" дифференциального уравнения

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = f(x) \quad (a < x \leq b; \alpha > 0; \lambda \in \mathbf{R}), \quad (4.1)$$

с дробной производной Римана-Лиувилля $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ порядка $\alpha > 0$ с начальным условием (3.2):

$$(D_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k, \quad (4.2)$$

$$b_k \in \mathbf{R} \quad (k = 1, 2, \dots, n = -[-\alpha])$$

в пространстве $\mathbf{C}_{n-\alpha}^{\alpha}[a, b]$ ($n = -[-\alpha]$, $0 \leq \gamma < 1$), определенном в (3.15).

Дадим явное решение этой задачи в предположении, что $f(x) \in C_{\gamma}[a, b]$ ($0 \leq \gamma < 1$).

Согласно теореме 3.1, решение задачи типа Коши (4.1)- (4.2) равносильно решению в пространстве $C_{n-\alpha}[a, b]$ интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (4.3)$$

Мы применим метод последовательных приближений для решения уравнения (4.3). Согласно (3.22), положим

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j}, \quad (4.4)$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y_{m-1}(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (m \in \mathbf{N}). \quad (4.5)$$

Используя (1.4), (4.4) и учитывая (2.1), мы выводим выражение для $y_1(x)$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0(x) + \lambda (I_{a+}^\alpha y_0)(x) + (I_{a+}^\alpha f)(x) = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} + \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (I_{a+}^\alpha (t - a)^{\alpha-j})(x) + (I_{a+}^\alpha f)(x) = \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha-j} + \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(2\alpha - j + 1)} (x - a)^{2\alpha-j} + (I_{a+}^\alpha f)(x),
\end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned}
&y_1(x) = \\
&= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda^{i-1} (x - a)^{\alpha i - j}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Аналогично, применяя (2.1) и (4.4)-(4.6), находим выражение для $y_2(x)$:

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= y_0(x) + \lambda (I_{a+}^\alpha y_1)(x) + (I_{a+}^\alpha f)(x) = \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x - a)^{\alpha - j} + \\
 &+ \lambda \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} (I_{a+}^\alpha (t - a)^{\alpha i - j})(x) + \\
 &\quad + (I_{a+}^\alpha f)(x) + (I_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f)(x).
 \end{aligned}$$

Применяя формулу (2.14) и учитывая (1.4), получаем

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda^{i-1} (x - a)^{\alpha i - j}}{\Gamma(\alpha i - j + 1)} + \\
 &+ \int_a^x \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} (x - t)^{\alpha i - 1} \right] f(t) dt. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, выводим формулу для $y_m(x)$ ($m \in \mathbf{N}$):

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i-j}}{\Gamma(\alpha i-j+1)} + \int_a^x \left[\sum_{i=1}^m \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} (x-t)^{\alpha i-1} \right] f(t) dt. \quad (4.8)$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем явное решение $y(x)$ интегрального уравнения Вольтерра (4.3)

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}(x-a)^{\alpha i-j}}{\Gamma(\alpha i-j+1)} + \int_a^x \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{\Gamma(\alpha i)} (x-t)^{\alpha i-1} \right] f(t) dt,$$

или, заменяя индекс суммирования i на $i-1$,

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i (x-a)^{\alpha i + \alpha - j}}{\Gamma(\alpha i + \alpha - j + 1)} + \int_a^x \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} (x-t)^{\alpha i + \alpha - 1} \right] f(t) dt. \quad (4.9)$$

Это решение можно выразить в терминах специальной функции $E_{\alpha, \beta}(z)$, определяемой для комплексных параметров $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$; $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ формулой

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (4.10)$$

Эта специальная функция, известная как функция Миттаг-Леффлера, является целой функцией от z . Показательная функция, а также тригонометрические и гиперболические косинус и синус через нее выражаются:

$$e^z = E_{1,1}(z), \quad ch(z) = E_{2,1}(z), \quad cos(z) = E_{2,1}(iz), \quad (4.11)$$

$$sh(z) = zE_{2,2}(z^2), \quad sin(z) = -zE_{2,2}(iz^2). \quad (4.12)$$

Свойства функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ можно найти в справочнике [17, § 18.1] и монографиях [18]-[19]

17. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Том 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матъе*. М.: Наука. 1967.

18. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*. М.: Наука. 1968.

19. Dzhrbashyan M.M. *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain. Operator theory: Advances and Applications, Vol. 65*. Dfsel: Birkhäuser Verlag. 1993.

Согласно (4.10), решение (4.9) переписется в терминах функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ в виде:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j (x-a)^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha-j+1} [\lambda(x-a)^\alpha] + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} [\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt. \quad (4.13)$$

Эта формула дает явное решение интегрального уравнения Вольтерра (4.3) и следовательно задачи типа Коши (4.1)-(4.2).

Ясно, что $f[x, y] = \lambda y + f(x)$ удовлетворяет условию Липшица (3.14), и поэтому в силу свойства 2.2.2 и теоремы 3.2 существует единственное решение задачи типа Коши (4.1)-(4.2) в пространстве $\mathbf{C}_{n-\alpha}^\alpha[a, b]$, и формула (4.13) дает это решение. Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ и γ ($0 \leq \gamma < 1$) - такие, что $\gamma \geq n - \alpha$, и пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Если $f \in C_\gamma[a, b]$, то задача типа Коши (4.1)-(4.2) имеет единственное решение $y(x) \in \mathbf{C}_{n-\alpha}^\alpha[a, b]$ и это решение дается формулой (4.13).

В частности, если $f(x) = 0$, то задача типа Коши для однородного уравнения (4.1):

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = 0 \quad (a < x \leq b; \alpha > 0; \lambda \in \mathbf{R}), \quad (4.14)$$

с начальными условиями (4.2) имеет единственное решение $y(x)$ в пространстве $\mathbf{C}_{n-\alpha}^\alpha[a, b]$ вида

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j (x - a)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} [\lambda(x - a)^\alpha]. \quad (4.15)$$

Пример 4.1. Решение задачи типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \quad (4.16)$$

с $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ дается формулой

$$y(x) = b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}] + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}] f(t)dt, \quad (4.17)$$

а решение задачи

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \quad (4.18)$$

имеет вид

$$y(x) = b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}]. \quad (4.19)$$

В частности, задача типа Коши

$$(D_{a+}^{1/2}y)(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad (D_{a+}^{-1/2}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \quad (4.20)$$

имеет решение

$$y(x) = b(x - a)^{-1/2} E_{1/2, 1/2} \left[\lambda(x - a)^{1/2} \right] + \\ + \int_a^x (x - t)^{-1/2} E_{1/2, 1/2} \left[\lambda(x - t)^{1/2} \right] f(t) dt, \quad (4.21)$$

а решение задачи

$$(D_{a+}^{1/2}y)(x) - \lambda y(x) = 0, \quad (D_{a+}^{-1/2}y)(a+) = b \in \mathbf{R} \quad (4.22)$$

дается формулой

$$y(x) = b(x - a)^{-1/2} E_{1/2, 1/2} \left[\lambda(x - a)^{1/2} \right]. \quad (4.23)$$

Пример 4.2. Решение задачи типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = f(x),$$

$$(D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) = b \in \mathbf{R}, \quad (D_{a+}^{\alpha-2}y)(a+) = d \in \mathbf{R} \quad (4.24)$$

с $1 < \alpha < 2$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) = & b(x-a)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}] + \\ & + d(x-a)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}[\lambda(x-a)^{\alpha}] + \\ & + \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}] f(t)dt. \end{aligned} \quad (4.25)$$

В частности, решение задачи

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) &= 0 \quad (1 < \alpha < 2), \\ (D_{a+}^{\alpha-1}y)(a+) &= b \in \mathbf{R}, \quad (D_{a+}^{\alpha-2}y)(a+) = d \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.26)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} y(x) &= b(x-a)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} [\lambda(x-a)^{\alpha}] + \\ &+ d(x-a)^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1} [\lambda(x-a)^{\alpha}]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Лекция 3. Методы точного решения дифференциальных уравнений дробного порядка

§5. Уравнения с дробными производными Римана-Лиувилля и постоянными коэффициентами: Метод интегральных преобразований Лапласа

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и краевых задач для них известны следующие методы: метод сведения к интегральным уравнениям, метод интегральных преобразований и операционный метод. Такие же методы могут быть применены для получения явных решений дифференциальных уравнений с дробными производными, а также так называемый композиционный метод. В связи с этим см. главы 4 и 5 монографии [12].

В §4 мы представили метод явного решения краевой задачи типа Коши (4.1)-(4.2), основанный на сведении рассматриваемой задачи к равносильному интегральному уравнению Вольтерра (4.3).

Здесь мы представим метод для нахождения явных решений уравнений (1.2) с постоянными коэффициентами с дробными производными Римана-Лиувилля на положительной полуоси \mathbf{R}_+ , основанный на прямом и обратном преобразованиях Лапласа \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} :

$$(\mathcal{L}\varphi)(p) = \int_0^{\infty} \varphi(t)e^{-pt} dt, \quad (5.1)$$

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} e^{px} g(p) dp \quad (\gamma = \operatorname{Re}(p) > \sigma, \sigma \in \mathbf{R}). \quad (5.2)$$

Теорию таких преобразований можно, например, найти в следующих монографиях:

20. Титчмарш Е.С. *Введение в теорию интегралов Фурье*. М.-Л.: Гостехиздат. 1948. Перевод из *Introduction to the Theory of Fourier Transforms*. New York: Chelsea. 1986; первое издание: Oxford: Oxford Univ. Press. 1937.

21. Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. М.: Наука. 1974.

В частности, преобразования \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} взаимно обратны для "достаточно хороших" функций φ, g :

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}g = g. \quad (5.3)$$

Рассмотрим неоднородное уравнение (1.2) с дробными производными Римана-Лиувилля $D^{\alpha_k}y = D_{0+}^{\alpha_k}y$ и постоянными коэффициентами $A_k \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{k=1}^m A_k (D_{0+}^{\alpha_k}y)(x) + A_0 y(x) = f(x) \quad (x > 0). \quad (5.4)$$

Известно, что для "достаточно хороших" функций y преобразование Лапласа $D_{0+}^{\alpha}y$ дается формулой

$$(\mathcal{L}D_{0+}^{\alpha}y)(p) = p^{\alpha}(\mathcal{L}y)(p). \quad (5.5)$$

Применяя преобразование Лапласа (5.1) к обеим сторонам уравнения (5.4) и учитывая (5.5), имеем

$$\left[\sum_{k=1}^m A_k p^{\alpha_k} + A_0 \right] (\mathcal{L}y)(p) = (\mathcal{L}f)(p). \quad (5.6)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа (5.2), мы получим частное решение уравнения (5.4):

$$y(x) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(\mathcal{L}f)(p)}{\sum_{k=1}^m A_k p^{\alpha_k} + A_0} \right] \right) (x). \quad (5.7)$$

Заметим, что Э.Хилле (Hille) и Я. Тамаркин (Tamarkin) в 1930 году

22. Hille E., Tamarkin J.D. On the theory of linear integral equations. *Ann. Math.*. 1930. Vol. 31. P. 479-528.

впервые применили метод преобразования Лапласа для решения интегрального уравнения Абеля второго рода

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \quad (x > 0, \alpha > 0) \quad (5.8)$$

и получили явное решение в виде

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha [\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt. \quad (5.9)$$

Здесь $E_\alpha(z) \equiv E_{\alpha,1}(z)$ - частный случай функции Миттаг-Леффлера (4.10), известный также как функция Миттаг-Леффлера:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0, z \in \mathbf{C}). \quad (5.10)$$

Испанский математик Д. Маравалл (Maravall) в работе **23. Maravall D.** Linear differential equations of non-integer order and fractional oscillations (Spanish). *Rev. Ac. Ci. Madrid.* 1971. Vol. 65. P.245-258.

возможно первым применил формальный подход, основанный на преобразовании Лапласа, для получения явных решений простейших уравнений вида (5.4). Однако его работа, опубликованная на испанском языке, было практически неизвестна до появления обзора [13].

Многие авторы применяли преобразование Лапласа для получения явных решений специальных случаев уравнения (5.4); в связи с этим см. Kilbas, Srivastava and Trujillo [12, Section 5.1].

К.Миллер (Miller) и Б.Росс (Ross) [3] применили преобразование Лапласа для решения задачи Коши для частного случая уравнения (5.4) с производными порядка $\alpha_k = k\alpha$ и $1/\alpha = q = 1, 2, \dots$:

$$\sum_{k=1}^m A_k (D_{0+}^{k\alpha} y)(x) + A_0 y(x) = f(x), \quad (5.11)$$

$$y(0) = y'(0) = \dots y^{(m-1)}(0) = 0. \quad (5.12)$$

Они ввели *дробный аналог функции Грина* $G_\alpha(x)$ определяемый в терминах обратного преобразования Лапласа (5.2):

$$G_\alpha(x) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P(t^\alpha)} \right] \right) (x), \quad P(x) = \sum_{k=1}^m A_k x^k + A_0, \quad (5.13)$$

и доказали, что единственное решение $y(x)$ задачи (5.11)-(5.12) предствляется в виде свертки Лапласа $G_\alpha(x)$ и $f(x)$:

$$y(x) = \int_0^x G_\alpha(x-t) f(t) dt. \quad (5.14)$$

Эти исследования продолжил И.Подлюбный (Podlubny) [6, Chapter 5]. Он определил дробный аналог функции Грина $G_\alpha(x, t)$ для более общего, чем (5.4), дифференциального уравнения дробного порядка и показал, что частное решение задачи типа Коши для рассматриваемого уравнения выражается через $G_\alpha(x, t)$. В частности, для уравнения (5.4) И.Подлюбный [6, Section 5.6] построил явную форму $G_\alpha(x, t)$ в виде кратного ряда, содержащего обобщенную функцию Миттаг-Леффлера $E_{\alpha, \beta}(z)$, определенную в (4.10):

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (4.10)$$

В книгах К.Миллера (Miller) и Б.Росса (Ross) [3, Chapters V and VI] и И.Подлюбного (Podlubny) [6, Sections 4.1.1 and 4.2.1] можно найти примеры уравнений дробного порядка вида (5.4) и (5.11), решенных применением преобразования Лапласа и дробного аналога функции Грина.

Используя формулу для преобразования Лапласа свертки

$$\left(\mathcal{L} \left(\int_0^x k(x-t)f(t)dt \right) \right) (p) = (\mathcal{L}k)(p)(\mathcal{L}f)(p), \quad (5.15)$$

по аналогии с (5.13) введем более общий *дробный аналог функции Грина*:

$$G_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x) = \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{P_\alpha(x)} \right] \right) (x),$$

$$P_\alpha(x) = \sum_{k=1}^m A_k x^{\alpha_k} + A_0. \quad (5.16)$$

Тогда решение (5.7) дифференциального уравнения (5.4) имеет форму свертки Лапласа $G_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x)$ и $f(x)$:

$$y(x) = \int_0^x G_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x-t)f(t)dt. \quad (5.17)$$

Вышеприведенные исследования были в основном посвящены построению частных решений (5.7), (5.17) неоднородного уравнения (5.4). Рассмотрим соответствующее (5.4) однородное уравнение

$$\sum_{k=1}^m A_k (D_{0+}^{\alpha_k} y)(x) + A_0 y(x) = 0 \quad (x > 0) \quad (5.18)$$

$$(m \geq 1; 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m; A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbf{R}). \quad (5.19)$$

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями это уравнение имеет нетривиальные решения. В связи с этим мы отметим, что К.Миллер (Miller) и Б.Росс (Ross) [3, Section V.6] фактически нашли линейно независимые решения соответствующего (5.11) однородного уравнения ($f(x) = 0$):

$$\sum_{k=1}^m A_k (D_{0+}^{k\alpha} y)(x) + A_0 y(x) = 0. \quad (5.20)$$

А.А.Килбас (Kilbas), Г.Сривастава (Srivastava), Х.Трухилло (Trujillo) [12, Sections 5.21-5.2.2] применили преобразование Лапласа для получения общих решений однородного уравнения (5.18) и соответствующего неоднородного уравнения (5.4). Примененный метод основывался на более общей, чем (5.5), формуле преобразования Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля на полуоси:

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{L} D_{0+}^{\alpha} y)(s) = \\
 & = s^{\alpha} (\mathcal{L} y)(s) - \sum_{j=1}^l d_j s^{j-1} \quad (l-1 < \alpha \leq l, \quad l \in \mathbf{N}), \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & d_j = \left(D_{0+}^{\alpha-j} y \right) (0+) := \\
 & = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(D_{0+}^{\alpha-j} y \right) (x) \quad (j = 1, \dots, l). \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Сначала построим явные решения простейшего уравнения (5.18) с $m = 1$

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda y(x) = 0 \quad (x > 0; \quad l-1 < \alpha \leq l; \quad l \in \mathbf{N}; \quad \lambda \in \mathbf{R}). \quad (5.23)$$

в терминах функции Миттаг-Леффлера (4.10).

Предварительно введем понятие дробного Вронскиана $W_{\alpha}(x)$:

$$W_{\alpha}(x) = \det \left((D_{0+}^{\alpha-k} y_j)(x) \right)_{k,j=1}^l. \quad (5.24)$$

По аналогии с обыкновенными уравнениями доказывається, что решения $y_j(x)$ ($j = 1, \dots, l$) уравнения (5.23) образуют фундаментальную систему решений, если $W_{\alpha}(x_0) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \geq 0$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть $l - 1 < \alpha \leq l$ ($l \in \mathbf{N}$) и $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда функции

$$y_j(x) = x^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha+1-j}(\lambda x^{\alpha}) \quad (j = 1, \dots, l) \quad (5.25)$$

где $E_{\alpha, \alpha+1-j}(z)$ - функции Миттаг-Леффлера (4.10), образуют фундаментальную систему решений уравнения (5.23).

Доказательство. Применяя преобразование Лапласа (5.1) к уравнению (5.23) и учитывая (5.21), имеем

$$(\mathcal{L}y)(s) = \sum_{j=1}^l d_j \frac{s^{j-1}}{s^\alpha - \lambda}, \quad (5.26)$$

где d_j ($j = 1, \dots, l$) даются (5.22). Справедлива следующая формула

$$(\mathcal{L} [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)])(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda} \quad (| \lambda s^{-\alpha} | < 1). \quad (5.27)$$

Эта формула с $\beta = \alpha + 1 - j$ принимает вид

$$\mathcal{L} [t^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{j-1}}{s^\alpha - \lambda} \quad (|s^{-\alpha} \lambda| < 1). \quad (5.28)$$

Поэтому из (5.26) мы выводим следующее решение уравнения (5.23):

$$y(x) = \sum_{j=1}^l d_j y_j(x), \quad y_j(x) = x^{\alpha-j} E_{\alpha,\alpha+1-j}(\lambda x^\alpha). \quad (5.29)$$

Непосредственно проверяется, что $y_j(x)$ являются решениями уравнения (5.23):

$$(D_{0+}^{\alpha} [t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha+1-j}(\lambda t^{\alpha})]) (x) = \lambda x^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha+1-j}(\lambda x^{\alpha}) \quad (5.30)$$

при $j = 1, \dots, l$ и справедливы равенства

$$(D_{0+}^{\alpha-k} y_j) (x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n + k + 1 - j)} x^{\alpha n + k - j} \quad (5.31)$$

при $k = 1, \dots, l$.

Из (5.31) получаем соотношения

$$\begin{aligned} (D_{0+}^{\alpha-k} y_j) (0+) &= 0 \quad (k, j = 1, \dots, l; k > j), \\ (D_{0+}^{\alpha-k} y_k) (0+) &= 1 \quad (k = 1, \dots, l). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Далее, если $k < j$, то

$$\begin{aligned} (D_{0+}^{\alpha-k} y_j)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(\alpha n + k + 1 - j)} x^{\alpha n + k - j} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(\alpha n + \alpha + k + 1 - j)} x^{\alpha n + \alpha + k - j}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Следовательно, так как $\alpha + k - j \geq \alpha + 1 - l > 0$ для $k, j = 1, \dots, l$, верны следующие равенства:

$$(D_{0+}^{\alpha-k} y_j)(0+) = 0 \quad (k, j = 1, \dots, l; k < j). \quad (5.34)$$

Из (5.32) и (5.34) получаем значение дробного вронскиана $W_\alpha(x)$, определенного (5.24), в точке $x = 0$: $W_\alpha(0) = 1$. Поэтому решения $y_j(x)$ в (5.25) образуют фундаментальную систему решений уравнения (5.23). Это завершает доказательство теоремы 5.1.

Явные решения дифференциальных уравнений (5.18) и (5.4) в случае $m \geq 2$ выражаются в терминах специальных случаев обобщенной гипергеометрической функции Райта ${}_p\Psi_q(z)$, определенной для $z \in \mathbf{C}$, комплексных $a_i, b_j \in \mathbf{C}$, и действительных $\alpha_i, \beta_j \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$) рядом

$${}_p\Psi_q(z) \equiv_p \Psi_q \left[\begin{array}{c} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{array} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i k) z^k}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k) k!}. \quad (5.35)$$

Она является целой функцией от z при выполнении условия

$$\sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i > -1.$$

В связи с этой функцией см. справочник [24, Глава 1.4]

24. Бейтмен Г, Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Том 1. *Гипергеометрическая функция.*

Функции Лежандра. М.: Наука. 1966.

и статью

25. Kilbas A.A., Saigo M., Trujillo, J.J. On the generalized Wright function. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2002. Vol. 5, no. 4. P. 437-460.

Именно, решения уравнений (5.18) и (5.4) выражаются в терминах обобщенной функции Райта (5.35) с $p = q = 1$:

$$\begin{aligned} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \beta, \alpha) \end{array} \middle| z \right] &:= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+i+1)}{\Gamma(\alpha n + \beta + \alpha i)} \frac{z^i}{i!} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^n E_{\alpha, \beta}(z) \quad (n \in \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Результаты, полученные в [12, Sections 5.2.1-5.2.2] применены для получения явных решений задачи типа Коши для уравнений (5.18) и (5.4) с положительными $\alpha_k > 0$ (порядка $\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} (-[-\alpha_i])$) и с начальными условиями

$$(D_{0+}^{\alpha-k} y)(0+) = b_k \in \mathbf{R} \quad (k = 1, \dots, l; l-1 < \alpha \leq l, l \in \mathbf{N}). \quad (5.37)$$

В частности, при $\alpha_k = k$ ($k = 1, \dots, m$), в [12, Section 5.2.4] соответствующие утверждения были установлены для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (5.18) и (5.4) с $D_{0+}^{\alpha_k} y = y^{(k)}$:

$$\sum_{k=1}^m A_k y^{(k)}(x) + A_0 y(x) = 0 \quad (x > 0), \quad (5.38)$$

$$\sum_{k=1}^m A_k y^{(k)}(x) + A_0 y(x) = f(x) \quad (x > 0), \quad (5.39)$$

с приложениями к нахождению явных решений задачи Коши для уравнений (5.38) и (5.39) с начальными условиями

$$y^{(m-k)}(0) = b_k \in \mathbf{R} \quad (k = 1, \dots, m). \quad (5.40)$$

Мы представим два результата из [12, Sections 5.2.1-5.2.2] дающих общие решения уравнений (5.18) и (5.4) с $m = 2$ вида:

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda (D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = 0 \quad (0 < \beta < \alpha) \quad (5.41)$$

$$(x > 0; \quad 0 < \beta < \alpha),$$

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) - \lambda (D_{0+}^{\beta} y)(x) - \mu y(x) = f(x) \quad (5.42)$$

$$(x > 0; \quad 0 < \beta < \alpha),$$

с $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, в терминах обобщенной функции Райта (5.36).

Теорема 5.2. Пусть $l - 1 < \alpha \leq l$ ($l \in \mathbf{N}$), $0 < \beta < \alpha$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Тогда функции

$$y_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + \alpha - j} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha + 1 - j, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right] \quad (5.43)$$

$(j = 1, \dots, l)$

являются решениями уравнения (5.41), при условии, что ряды в (5.43) сходятся.

Если $\alpha - l + 1 \geq \beta$, то $y_j(x)$ - линейно независимые решения уравнения (5.41).

В частности, при $\alpha l + 1 > \beta$ они образуют фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} (D_{0+}^{\alpha-k} y_j)(0+) &= 0 \quad (k, j = 1, \dots, l; k \neq j), \\ (D_{0+}^{\alpha-k} y_k)(0+) &= 1 \quad (k = 1, \dots, l). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Теорема 5.3. Пусть $l - 1 < \alpha \leq l$ ($l \in \mathbf{N}$), $0 < \beta < \alpha$ - такие, что $\alpha - l + 1 \geq \beta$, let $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ и пусть $f(x)$ - заданная действительная функция на \mathbf{R}_+ . Тогда уравнение (5.42):

$$(D_{0+}^\alpha y)(x) - \lambda (D_{0+}^\beta y)(x) - \mu y(x) = f(x) \quad (5.42)$$

$$(x > 0; \quad 0 < \beta < \alpha)$$

разрешимо и его общее решение дается формулой

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(x-t) f(t) dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^l c_j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} x^{\alpha n + \alpha - j} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha + 1 - j, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda x^{\alpha - \beta} \right], \quad (5.45)$$

где

$$G_{\alpha,\beta;\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} z^{\alpha n} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\alpha n + \alpha, \alpha - \beta) \end{matrix} \middle| \lambda z^{\alpha - \beta} \right], \quad (5.46)$$

c_j ($j = 1, \dots, l$) - произвольные действительные постоянные.

**§6. Уравнения с дробными производными
Римана-Лиувилля и переменными коэффициентами:
Метод интегральных преобразований Лапласа и Меллина**

Представим метод для нахождения явных решений уравнений (1.2) с переменными коэффициентами с дробными производными Римана-Лиувилля на положительной полуоси \mathbf{R}_+ , основанный на прямом и обратном преобразованиях Лапласа (5.1) и (5.2) и прямом и обратном преобразованиях Меллина \mathcal{M} and \mathcal{M}^{-1} :

$$(\mathcal{M}\varphi)(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\varphi(t)dt \quad (s \in \mathbf{C}), \quad (6.1)$$

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-\infty}^{\gamma+\infty} x^{-s}g(s)ds \quad (\gamma = \text{Re}(p)). \quad (6.2)$$

Теорию таких преобразований можно, например, найти в монографии [21]. В частности, преобразования \mathcal{M} и \mathcal{M}^{-1} взаимно обратны для "достаточно хороших" функций φ, g :

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}g = g. \quad (6.3)$$

Мы дадим приложения преобразований Лапласа и Меллина к построению явных решений двух классов линейных дифференциальных уравнений (1.3), содержащих дробные производные Лиувилля $D_{0+}^{\alpha}y$ и $D_{-}^{\alpha}y$, определенные для $x > 0$ соответственно формулой (1.3) с $a = 0$:

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha}y)(x) \quad (x > 0; n = [\alpha] + 1), \quad (1.3')$$

$$(I_{0+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > 0; \alpha > 0), \quad (1.4')$$

и

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha}y)(x) \quad (n = [\alpha] + 1); \quad (6.4)$$

$$(I_{-}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (\alpha > 0). \quad (6.5)$$

В монографии К.Миллера (Miller) и Б.Росса (Ross) [3, Глава VI.3] было указано, что преобразование Лапласа (5.1) может быть применено для решения однородного дифференциального уравнения (1.2) вида

$$\sum_{k=1}^m A_k(x)(D_{0+}^{k\alpha}y)(x) + A_0y(x) = 0 \quad \left(\frac{1}{\alpha} = 1, 2, \dots\right), \quad (6.6)$$

с полиномиальным коэффициентом $A_k(x)$, и такой подход был проиллюстрирован для получения явного решения уравнения

$$(D_{0+}^{1/2}y)(x) = \frac{y}{x} \quad (x > 0). \quad (6.7)$$

Следует отметить, что уравнение (6.7) было первым дифференциальным уравнением дробного порядка, рассмотренным в работах

26. O'Shaughnessy L. Problem # 433, *Amer. Math. Month.*, **25** (1918), 172-173.

27. Post E.L. Discussion of the solution of $(d/dx)^{1/2}y = y/x$ (# problem 433), *Amer. Math. Month.*, **26** (1919), 37-39.

В связи с этим см. [2, §42.1] and [12, глава 5.1].

Вышеуказанная идея К.Миллера (Miller) и Б.Росса (Ross) была развита в монографии А.А.Килбаса (Kilbas), Г.Сривастава (Srivastava) и Х.Трухилло (Trujillo) [12, Глава 5.2.3]. Используя преобразование Лапласа (5.1) и соотношение (5.21), было получено явное решение дифференциального уравнения, обобщающего уравнение (6.7):

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{\lambda y(x)}{x} \quad (x > 0; \quad \alpha > 0, \quad \lambda \in \mathbf{R}) \quad (6.8)$$

где $l - 1 < \alpha \leq l$ ($l \in \mathbf{N}$, $l \neq 2$) в терминах обобщенной гипергеометрической функции Райта (5.35) с $p = 0$, $q = 1$:

$${}_0\Psi_1(z) (\equiv {}_0\Psi_1 \left[\begin{array}{c} - - - \\ (b, \beta) \end{array} \middle| z \right]) \quad (b \in \mathbf{C}; \quad \beta \in \mathbf{R}), \quad (6.9)$$

и с $p = 1$, $q = 2$:

$${}_1\Psi_2 (\equiv {}_1\Psi_2 \left[\begin{array}{c} (a, \alpha) \\ (b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2) \end{array} \middle| z \right]) \quad (6.10)$$

$$(a, b_1, b_2 \in \mathbf{C}; \quad \alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}).$$

Приведем утверждение для уравнения (6.8) с $0 < \alpha < 1$.

Теорема 6.1. *Дифференциальное уравнение (6.8) с $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ разрешимо, и его решение дается формулой*

$$\begin{aligned} y(x) &= cy_1(x) = \\ &= cx^{\alpha-1} {}_0\Psi_1 \left[(\alpha, \alpha - 1) \mid -\frac{\lambda}{1-\alpha}x^{\alpha-1} \right], \end{aligned} \quad (6.11)$$

где c - произвольная действительная постоянная.

В частности, решение уравнения (6.7) имеет вид

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt{x}} e^{-1/x}. \quad (6.12)$$

В монографии [6, Глава 6.1] было указано, что преобразование Меллина (6.1) может быть применено для решения задачи типа Коши для дифференциального уравнения

$$x^{\alpha+1} (D^{\alpha+1}y)(x) + x^{\alpha} (D^{\alpha}y)(x) = f(x) \quad (x > 0) \quad (6.13)$$

с дробной производной Лиувилля $D^{\alpha+k}y = D_{0+}^{\alpha+k}y$ или с производной Герасимова-Капуто $D^{\alpha+k}y = {}^C D_{0+}^{\alpha+k}y$ ($k = 0, 1$) с $0 < \alpha < 1$, определяемыми соответственно (1.3') и (1.9').

Метод, основанный на преобразованиях Меллина, был применен в [12, глава 5.4] для получения частных решений дифференциальных уравнений дробного порядка с переменными коэффициентами, обобщающих уравнение (6.13), в виде

$$\sum_{k=0}^m A_k x^{\alpha+k} (D_{0+}^{\alpha+k} y)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad \alpha > 0) \quad (6.14)$$

и

$$\sum_{k=0}^m B_k x^{\alpha+k} (D_-^{\alpha+k} y)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad \alpha > 0). \quad (6.15)$$

Здесь $D_{0+}^{\alpha+k} y$ и $D_-^{\alpha+k} y$ - левосторонние и правосторонние дробные производные Лиувилля порядка $\alpha+k$ ($k = 1, 2, \dots, m$), определяемые соответственно (1.3') и (6.4).

Если $\alpha = 0$, то $D_{0+}^{\alpha+k}y = y^{(k)}$, $D_-^{\alpha+k}y = (-1)^k y^{(k)}$, и уравнения (6.9) и (6.10) принимают соответственно вид

$$\sum_{k=0}^m A_k x^k y^{(k)}(x) = f(x) \quad (x > 0) \quad (6.9')$$

и

$$\sum_{k=0}^m B_k (-1)^k x^k y^{(k)}(x) = f(x) \quad (x > 0), \quad (6.10').$$

Такие обыкновенные дифференциальные уравнения известны как уравнения Эйлера, и поэтому мы называем (6.14) и (6.15) уравнениями эйлера типа.

Представим результаты для уравнения (6.14) с $m = 1$:

$$x^{\alpha+1} (D_{0+}^{\alpha+1} y)(x) + \lambda x^\alpha (D_{0+}^\alpha y)(x) = f(x) \quad (6.16)$$

$$(x > 0; \quad \alpha > 0; \quad \lambda \in \mathbf{R}).$$

Частные решения этого уравнения различны в случаях $\lambda \neq n + 1$ и $\lambda = n + 1$ with $n \in \mathbf{N}_0$. В первом случае частное решение уравнения (6.16) выражается в терминах обобщенной гипергеометрической функции Райта (5.35) с $p = 1$ и $q = 2$ вида

$${}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (a, 1) \\ (b, -1), (c, 1) \end{matrix} \middle| z \right] \quad (a, b, c, z \in \mathbf{C}). \quad (6.17)$$

Теорема 6.2. Если $\alpha > 0$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ ($\lambda \neq n+1$; $n \in \mathbf{N}_0$), то уравнение (6.16) разрешимо и его частное решение дается формулой

$$y(x) = \int_0^1 G_{\alpha,\lambda}^1(t) f(xt) dt, \quad (6.18)$$

где

$$G_{\alpha,\lambda}^1(x) = x^{-\alpha} \left\{ \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(\alpha+1-\lambda)} x^{\lambda-1} - {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1-\lambda, 1) \\ (\alpha, -1), (2-\lambda, 1) \end{matrix} \middle| -x \right] \right\}. \quad (6.19)$$

Далее мы представим частное решение уравнения (6.16) в случае $\lambda = n + 1$ ($n \in \mathbf{N}_0$):

$$x^{\alpha+1} (D_{0+}^{\alpha+1} y)(x) + (n+1)x^\alpha (D_{0+}^\alpha y)(x) = f(x) \quad (6.20)$$
$$(x > 0; \quad \alpha > 0; \quad n \in \mathbf{N}_0),$$

в терминах пси-функции $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ и постоянной Эйлера $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1)$. Результат оказывается различным в случаях $n \in \mathbf{N}$ и $n = 0$.

Теорема 6.3. (а) Если $\alpha > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ такие, что $\alpha \neq 1, \dots, n$, то дифференциальное уравнение (6.20) разрешимо и его частное решение имеет вид:

$$y(x) = \int_0^1 G_{\alpha, n+1}^1(t) f(xt) dt, \quad (6.21)$$

где

$$\begin{aligned} & G_{\alpha, n+1}^1(x) \\ &= \frac{(-1)^{n-1} x^{n-\alpha}}{n! \Gamma(\alpha - n)} \left[\log(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j - n} + \psi(\alpha - n) + \gamma \right] + \\ &+ \sum_{k=0 \atop (k \neq n)}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-\alpha}}{k! (n - k) \Gamma(\alpha - k)}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

(б) Если $n = 0$, то дифференциальное уравнение

$$x^{\alpha+1} (D_{0+}^{\alpha+1} y)(x) + x^{\alpha} (D_{0+}^{\alpha} y)(x) = f(x) \quad (x > 0; \quad \alpha > 0) \quad (6.23)$$

разрешимо и его частное решение дается формулой

$$y(x) = \int_0^1 G_{\alpha, 1}^1(t) f(xt) dt, \quad (6.24)$$

$$G_{\alpha, 1}^1(x) = -\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} [\log(x) + \psi(\alpha) + \gamma] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-\alpha}}{k! k \Gamma(\alpha - k)}. \quad (6.25)$$

Соответствующий результат для уравнения (6.14) с $n = 2$ доказан в статье

28. Kilbas A.A., Zhukovskaya N.V. Solution of Euler type nonhomogeneous differential equations with three fractional derivatives, in *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations* (Editors A.A.Kilbas and S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers 2008, 11-137.

Прямое и обратное преобразования Меллина (6.1) и (6.2) могут быть также применены для нахождения явного решения соответствующего (6.14) однородного дифференциального уравнения дробного порядка

$$\sum_{k=0}^m A_k x^{\alpha+k} (D_{0+}^{\alpha+k} y)(x) = 0 \quad (x > 0; \quad \alpha > 0). \quad (6.26)$$

Представим простейший случай для уравнения (6.26), установленный в статье

29. Килбас А.А., Жуковская Н.В. Однородные дифференциальные уравнения эйлера типа с дробными производными, *Труды Института Математики, Минск* 2010, No 1.

Теорема 6.4. Пусть $n, m \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ и $\alpha > 0$ такие, что $n - 1 < \alpha \leq n$, let $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbf{R}$ ($A_m \neq 0$), и пусть s_1, \dots, s_m - корни многочлена

$$P_m(s) = \sum_{k=0}^m A_k (s - \alpha - k) \cdots (s - \alpha - 1) = A_m (s - s_1) \cdots (s - s_m),$$

такие, что $s_i \neq s_j$ ($i, j = 1, \dots, m; i \neq j$), $s_j > 0$ и, кроме того, $s_j \neq \alpha - k$ для $j = 1, \dots, m$ и любого $k \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ ю Тогда уравнение (6.26) имеет $m + n$ решений

$$y_j(x) = x^{s_j - 1} \quad (j = 1, \dots, m), \quad y_i(x) = x^{\alpha - i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.27)$$

Лекция 4. Приложения теории дробного дифференцирования и интегрирования в естественных науках

§7. Задача типа Коши для двумерного диффузионно-волнового уравнения дробного порядка. Метод интегральных преобразований

Для получения явных решений уравнений с частными дробными производными может быть также применен метод основанный на интегральных преобразованиях Лапласа (5.1)-(5.2) и Меллина (6.1)-(6.2), а также на многомерных интегральных преобразованиях Фурье: прямом

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}^l} e^{ix \cdot t} \varphi(t) dt \quad (x \in \mathbf{R}^l), \quad (7.1)$$

и обратном

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^l} e^{-ix \cdot t} g(t) dt \quad (x \in \mathbf{R}^l), \quad (7.2)$$

где $x \cdot t = \sum_{k=1}^l x_k t_k$. Теорию таких преобразований можно, например, найти в монографиях

30. Stein E.M.; Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton Mathematical Series, No. 32. Princeton: Princeton Univ. Press, N.J. 1971.

31. Никольский С.М. *Аппроксимация функций нескольких переменных и теоремы вложения*. Москва: Наука. 1977.

В частности, преобразования \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} взаимно обратны для "достаточно хороших" функций φ, g :

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi, \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g. \quad (7.3)$$

Исторические сведения и обзор результатов в области применения интегральных преобразований Лапласа, Фурье и Меллина для решения уравнений с частными дробными производными представлен в монографии [12, главы 6.1.1-6.1.2]. Мы покажем применение метода интегральных преобразований для решения уравнения

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0; \lambda > 0), \quad (7.3)$$

с частной дробной производной Римана-Лиувилля $(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t)$ порядка $\alpha > 0$ относительно $t > 0$, определенной при любом $\alpha > 0$ формулой (1.15):

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(l-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-l+1}} d\tau, \quad (7.4)$$

где $l = -[-\alpha]$.

Приведенные ниже результаты получены в статье

32. Ворошилов А.А., Килбас А.А. Задача типа Коши для диффузтонно-волнового уравнения с частной производной Римана-Лиувилля. *Доклады академии наук, Российская академия наук* **406** (2006), *но. 1*, 12-16.

и представлены в монографии А.А.Килбаса (Kilbas), Г.Сривастава (Srivastava) и Х.Трухилло (Trujillo) [12, Глава 6.2.1].

Если $\alpha = 1$, то уравнение (7.3) является уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\lambda > 0), \quad (7.5)$$

которое также называют уравнением диффузии, а при $\alpha = 2$ уравнение (7.3) является волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\lambda > 0). \quad (7.6)$$

Поэтому (7.3) называют диффузионно-волновым уравнением.

Рассмотрим уравнение (7.3) порядка $0 < \alpha < 2$

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0; \lambda > 0), \quad (7.7)$$

с начальными условиями типа Коши

$$(D_{0+,t}^{\alpha-k} u)(x, 0+) = f_k(x) \quad (x \in \mathbf{R}), \quad (7.8)$$

где

$$k = 1 \quad (0 < \alpha \leq 1); \quad k = 2 \quad (1 < \alpha < 2). \quad (7.9)$$

Для решения задачи типа Коши (7.7)-(7.8) применим преобразование Лапласа относительно t :

$$(\mathcal{L}_t u)(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt \quad (x \in \mathbf{R}; s > 0) \quad (7.10)$$

и преобразование Фурье относительно $x \in \mathbf{R}$:

$$(\mathcal{F}_x u)(\sigma, t) = \int_{-\infty}^\infty u(x, t) e^{ix\sigma} dx \quad (\sigma \in \mathbf{R}; t > 0). \quad (7.11)$$

Применяя преобразование Лапласа (7.10) к обеим частям равенства (7.7) и учитывая формулу преобразования Лапласа дробной производной (1.15):

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{L}_t D_{0+,t}^\alpha u)(x, s) = \\
 & = s^\alpha (\mathcal{L}u)(x, s) - \sum_{j=1}^l s^{j-1} \left(D_{0+,t}^{\alpha-j} u \right)(x, 0+) \quad (7.12) \\
 & (x \in \mathbf{R}; l-1 < \alpha \leq l; l \in \mathbf{N})
 \end{aligned}$$

с $l = 1$ и $l = 2$ в соответствующих случаях $0 < \alpha \leq 1$ и $1 < \alpha < 2$, и учитывая начальные условия в (7.8), имеем

$$\begin{aligned}
 & s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(x, s) = \\
 & = \sum_{k=1}^l s^{k-1} f_k(x) + \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}_t u \right)(x, s) \quad (l = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье (7.11) к этому равенству и используя формулу

$$\left(\mathcal{F}_x \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] \right) (\sigma, t) = -|\sigma|^2 (\mathcal{F}_x u) (\sigma, t),$$

получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u) (\sigma, s) = \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{s^{k-1}}{s^\alpha + \lambda^2 |\sigma|^2} (\mathcal{F}_x f_k) (\sigma) \quad (\sigma \in \mathbf{R}; t > 0; l = 1, 2). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Отсюда найдем решение $u(x, t)$ посредством применения обратного преобразования Фурье относительно σ :

$$(\mathcal{F}_\sigma^{-1} u) (x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\sigma, t) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (\sigma \in \mathbf{R}; t > 0) \quad (7.14)$$

и обратного преобразования Лапласа относительно s :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_s^{-1} u) (x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} u(x, s) ds \quad (x \in \mathbf{R}) \quad (7.15) \\ &\gamma = \Re(s) > \sigma_\varphi. \end{aligned}$$

Известны следующие формулы из таблиц интегральных преобразований Фурье и Лапласа

$$\left(\mathcal{F}_x e^{-c|x|}\right)(\sigma) = \frac{2c}{c^2 + |\sigma|^2} \quad (c > 0; \quad \sigma \in \mathbf{R}), \quad (7.16)$$

$$\left(\mathcal{F} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}}\right)(\sigma) = \frac{2\lambda s^{\frac{\alpha}{2}}}{s^\alpha + \lambda^2 |\sigma|^2}. \quad (7.17)$$

Согласно (7.16)-(7.17) соотношение (7.13) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) = \\ & =; \left(\mathcal{F}_x \left[\frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^l s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \right] \right) (\sigma) (\mathcal{F}_x f_k)(\sigma) \quad (l = 1, 2). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Учитывая формулу свертки

$$(\mathcal{F}(h * \varphi))(x) = (\mathcal{F}h)(x)(\mathcal{F}\varphi)(x),$$

$$(h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)\varphi(t)dt,$$

перепишем (7.18) в виде

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(\sigma, s) = \\ & = \left(\mathcal{F}_x \left[\sum_{k=1}^l \frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x) \right] \right) (\sigma) \quad (l = 1, 2). \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье (7.14), выводим отсюда следующее равенство:

$$(\mathcal{L}_t u)(x, s) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{2\lambda} s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} *_x f_k(x) \quad (7.19)$$

$$(x \in \mathbf{R}; s > 0; l = 1, 2).$$

Применяя к (7.19) обратное преобразование Лапласа (7.15), из (7.19) мы можем получить явное решение задачи типа Коши (7.7)-(7.8). Для этого нам нужно знать обратное преобразование Лапласа от функций $s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}$ ($k = 1, 2$).

Эти функции выражаются через преобразование Лапласа функции Райта $\phi(\alpha, \beta; z)$ определенной для $z, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$ рядом

$$\phi(\alpha, \beta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}. \quad (7.20)$$

Отметим, что при $\alpha > -1$, $\phi(\alpha, \beta; z)$ - целая функция от $z \in \mathbf{C}$.

Именно, функции $s^{k-1-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{|x|}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}}$ ($k = 1, 2$) выражаются через преобразование Лапласа функции Райта $\phi(-\alpha/2, b; -z)$. Если $0 < \alpha < 2$, то $\phi(-\alpha/2, b; -z)$ есть целая функция от z . Непосредственно доказывается формула

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{L}_t \left[t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \right] \right) (s) = \\ & = s^{k-1-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{|x|}{\lambda} s^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (7.19) и используя формулу (7.21), получим решение задачи типа Коши (7.7)-(7.8):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^l \int_{-\infty}^{\infty} G_k^\alpha(x - \tau, t) f_k(\tau) d\tau \quad (7.22)$$

($l = 1$ for $0 < \alpha \leq 1$; $l = 2$ for $1 < \alpha < 2$),

где

$$G_k^\alpha(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-k} \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - k + 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (k = 1, 2). \quad (7.23)$$

Теорема 7.1. *Если $0 < \alpha < 2$ и $\lambda > 0$, то задача типа Коши (7.7)-(7.8) разрешима и ее решение $u(x, t)$ дается формулами (7.22)-(7.23) при условии, что интегралы в правой части (7.23) сходятся.*

Следствие 7.1. Если $0 < \alpha \leq 1$ и $\lambda > 0$, то задача типа Коши

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1} u)(x, 0+) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0) \quad (7.24)$$

разрешима и ее решение имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^\alpha(x - \tau, t) f(\tau) d\tau, \quad (7.25)$$

$$G_1^\alpha(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-1} \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right), \quad (7.26)$$

при условии, что интеграл в правой части (7.26) сходится.

Следствие 7.2. Если $1 < \alpha < 2$ и $\lambda > 0$, то задача типа Коши

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0) \quad (7.27)$$

$$(D_{0+,t}^{\alpha-1} u)(x, 0+) = f_1(x), \quad (D_{0+,t}^{\alpha-2} u)(x, 0+) = f_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \quad (7.28)$$

разрешима и ее решение дается формулой

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^\alpha(x - \tau, t) f_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} G_2^\alpha(x - \tau, t) f_2(\tau) d\tau, \quad (7.29)$$

где $G_1^\alpha(x, t)$ дается (7.26) и

$$G_2^\alpha(x, t) = \frac{1}{2\lambda} t^{\frac{\alpha}{2}-2} \phi \left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - 1; -\frac{|x|}{\lambda} t^{-\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (7.30)$$

при условии, что интегралы в правой части (7.29) сходятся.

Пример 7.1. Задача типа Коши (7.24) с $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$(D_{0+,t}^{1/2}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\left(I_{0+,t}^{1/2}u\right)(x,0+) = f(x) \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0) \quad (7.31)$$

имеет решение

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{1/2}(x-\tau,t)f(\tau)d\tau, \quad (7.32)$$

где $G_1^{1/2}(x,t)$ дается формулой (7.26) с $\alpha = 1/2$.

Пример 7.2. Задача типа Коши (7.27)-(7.28) с $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$(D_{0+,t}^{3/2}u)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0) \quad (7.33)$$

$$(D_{0+,t}^{1/2}u)(x,0+) = f_1(x) \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$(I_{0+,t}^{1/2}u)(x,0+) = f_2(x) \quad (x \in \mathbf{R}) \quad (7.34)$$

имеет решение

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \int_{-\infty}^{\infty} G_1^{3/2}(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} G_2^{3/2}(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (7.35)$$

где $G_1^{3/2}(x,t)$ и $G_2^{3/2}(x,t)$ даются равенствами (7.26) и (7.30) с $\alpha = \frac{3}{2}$.

Пример 7.3. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (7.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x) \quad (x \in \mathbf{R}; t > 0) \end{aligned} \quad (7.36)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \tau, t) f(\tau) d\tau, \\ G(x, t) &= \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t}}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Этот хорошо известный результат следует из следствия 7.1 в силу следующего соотношения:

$$\phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; z\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}, \quad (7.38)$$

которое непосредственно проверяется на основании определения функции Райта (7.20).

§8. Приложения теории дробного дифференцирования и интегрирования в естественных науках.

Дробная модель супердиффузионных процессов

Начиная с середины 1980-х годов начались исследования, посвященные представлению вычислительных моделей дробного порядка для кинетики аномальных процессов естествознания в комплексных системах, характеризующихся долгой памятью и нелокальными свойствами соответствующих динамик. Особое внимание было уделено аномальным диффузионным процессам, описываемым так называемые сверх-медленные (sub-) и сверх-быстрые (super-) диффузионные процессы.

Р.Р. Нигматуллин впервые в работах

33. Nigmatullin R.R. To the theoretical explanation of the "universal" response. *Phys. Sta. Sol. (b)*. **123** (1984), no. 2, 739-745.

34. Nigmatullin, R.R. On the theory relaxation with "remnant" memory. *Phys. Status Solidi (b)*. **124** (1984), no. 1, 389-393.

рассмотрел следующее "диффузионное уравнение с памятью"

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \int_a^t K(t - \tau) \Delta U_x(x, \tau) d\tau \quad (x \in \mathbf{R}^m, t > 0), \quad (8.1)$$

где Δ_x есть оператор Лапласа (1.13) по переменной x :

$$(\Delta_x u)(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_m^2}. \quad (1.13')$$

В частности, если $K(t) = \rho^2 \delta(t - a)$, где $\delta(t - a)$ - дельта-функция Дирака, равенство (8.1) представляет классическое уравнение теплопроводности (диффузии):

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \rho^2 \Delta U(x, t) \quad (x \in \mathbf{R}^m, t > 0). \quad (8.2)$$

Существует много вычислительных моделей дробного порядка для сверх-медленных диффузионных (sub-diffusion) процессов без воздействия или с воздействием поля внешних сил (an external force field) такие как *уравнение диффузии дробного порядка (Fractional Diffusion Equation)* и *адвекционно-диффузионное уравнение (Advection-Diffusion Equation)* или *уравнение Фокка-Планка (Fokker-Planck Equation)* соответственно. Все эти модели содержат дробные производные Римана-Лиувилля $(D_{0+,t}^\alpha u)(x, t)$ или Герасимова-Капуто $({}^C D_{0+,t}^\alpha u)(x, t)$ по временной переменной $t > 0$ и дробные производные Лиувилля $(D_{\pm,x}^\alpha u)(x, t)$ или Рисса $(\mathbf{D}_x^\alpha u)(x, t)$ по пространственной переменной $x \in \mathbf{R}^m$ ($m \in \mathbf{N}$).

Сверх-быстрые диффузионных (super-diffusion) процессы изучены меньше. Кроме того, только в нескольких работах были рассмотрены вычислительный модели дробного порядка с дробной производной Рисса $(\mathbf{D}_x^\alpha u)(x, t)$ по пространственной переменной, опеределяемой формулой (1.14):

$$(\mathbf{D}_x^\alpha u)(x, t) \equiv (-\Delta_x)^{\alpha/2} u(x, t) = (\mathcal{F}_x^{-1} |x|^\alpha (\mathcal{F}_x u)) (x, t) \quad (8.3)$$

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m, \quad t > 0.$$

в терминах прямого и обратного преобразований Фурье \mathcal{F} и \mathcal{F}^{-1} , определяемых (7.1) и (7.2).

В [12, глава 8.2] была предложена *новая* вычислительная модель сверх-быстрых диффузионных процессов с оператором обобщенного дробного дифференцирования Лиувилля $D_{-;g}^{\alpha}$ по временной переменной $t > 0$. Для функции $g'(x) \neq 0$ ($a < x < b$) соответствующая одномерная дробная производная $D_{-;g}^{\alpha}f$ от функции f по функции g порядка $\alpha > 0$ для $x > a \geq -\infty$ определяется формулой [2, п. 18.2]

$$\begin{aligned} & (D_{-;g}^{\alpha}f)(x) = \\ & = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \int_x^{\infty} \frac{g'(t)f(t)dt}{[g(t) - g(x)]^{\alpha-n+1}} \quad (8.4) \\ & \quad (n = -[-\alpha]). \end{aligned}$$

В частности, если $a = 0$ и $g(x) = x^\sigma$ ($\sigma > 0$), (8.4) есть обобщенная дробная производная порядка $\alpha > 0$ по функции x^σ :

$$(D_{-;x^\sigma}^\alpha f)(x) = \frac{\sigma^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-x^{1-\sigma} \frac{d}{dx} \right)^n \int_x^\infty \frac{t^{\sigma-1} f(t) dt}{(t^\sigma - x^\sigma)^{\alpha-n+1}} \quad (8.5)$$

$$(x > 0; n = -[-\alpha]).$$

Предложенная нами модель позволяет осуществлять строгий контроль над обоими сверх-медленными и сверх-быстрыми диффузионными процессами. Она также дает большую гибкость для свободной функции g , и имеет многие другие преимущества с чисто технической точки зрения в том смысле, что мы можем использовать те же самые методы, что и в обыкновенном случае (то есть методы, основанные на интегральных преобразованиях и разделении переменных) для решения краевых задач, связанных с моделями дробного порядка.

Сначала мы рассмотрим нашу модель дробного порядка в одномерном случае. Напомним схему решения классической задачи, связанной с одномерным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \quad (\rho > 0; 0 < x < l, t > 0), \quad (8.6)$$

с краевыми условиями

$$U(0, t) = U(l, t) = 0 \quad (t > 0) \quad (8.7)$$

и начальным условием

$$U(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < l), \quad (8.8)$$

где f - "достаточно гладкая" функция на отрезке $[0, l]$.

Заметим, что параметр ρ^2 может характеризовать температурный (или диффузионный) коэффициент среды.

Применяя метод разделения переменных, будем искать решение задачи (8.6)-(8.7) в виде $U(t, x) = T(t)X(x)$. Тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\rho^2 T(t)} = -\lambda. \quad (8.9)$$

Следовательно, $X(x)$ есть решение задачи Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (8.10)$$

для которой собственные значения и собственные функции даются формулами

$$\lambda_n = \mathbf{a}^2; \quad X_n(x) = \sin(\mathbf{a}x); \quad \mathbf{a} = \frac{n\pi}{l} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.11)$$

С другой стороны, $T(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$T'(t) + (\mathbf{a}\rho)^2 T(t) = 0, \quad (8.12)$$

даваемое равенством

$$T_n(t) = \exp [-(\mathbf{a}\rho)^2 t] \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.13)$$

Наконец, решение задачи, моделированной уравнениями (8.6)-(8.8), получается как решение в виде ряда, чьи коэффициенты c_n находятся из разложения функции f в ряд Фурье с учетом начального условия (8.8):

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t), \quad (8.14)$$

где

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin(\mathbf{a}x) f(x) dx \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (8.15)$$

где $X_n(x)$ и $T_n(t)$ даются соответственно формулами (8.11) и (8.13).

Поэтому нам нужно только доказать сходимость на $[0, l] \times [0, \infty)$ двойного ряда для $U(x, t)$ в (8.14) и рядов для $U_{xx}(x, t)$ и $U_t(x, t)$, получаемых почленным дифференцированием ряда (8.14) соответственно по x и по t .

Теперь мы видим что сверх-диффузионный процесс, связанный с рассмотренной выше проблемой (8.6)-(8.8), может быть получен заменой множителя $T_n(t)$ в решении (8.14) некоторой функцией $T_n(t, \alpha)$, зависящей от времени t и нового параметра α . Такой новый параметр дает нам возможность контролировать убывание процесса по временной переменной; например, мы возьмем

$$T_n(t, \alpha) = \exp \left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t, \alpha) \right] \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.16)$$

В этом случае (8.14) заменяется более общим решением вида

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t, \alpha), \quad (8.17)$$

где $X_n(t)$ и $T_n(t, \alpha)$ даются соответственно (8.11) и (8.16).

Таким образом сверх-медленные и сверх-быстрые диффузионные процессы могут контролироваться функцией $g(t, \alpha)$.

Например, если $g(t, \alpha) = t^\alpha$, то мы имеем сверх-медленную кинетику при $0 < \alpha < 1$ и сверх-быструю кинетику при $\alpha > 1$. Это находится в согласии с так называемым методом "непрерывных случайных блужданий (continuous time random walk (CTRW))".

На этом пути посредством выбора функции $g(t, \alpha)$ мы можем получать подходящие решения нашей задачи для того, чтобы контролировать очень сильные сверх-быстрые диффузионные процессы. Например, если мы возьмем $g(t, \alpha) = \exp(t^\alpha)$ с $\alpha > 1$, то возможно (8.17) даст новую модель для динамических свойств сверх-проводимости некоторых материалов при определенных граничных условиях.

Теперь мы можем построить соответствующую дробную модель с решением (8.17). Задача заключается в нахождении некоторого "дробного" оператора \mathbf{D}^α (дробного порядка, особого с памятью или др.) порядка $\alpha > 0$ со следующим свойством:

$$\mathbf{D}^\alpha T(t, \alpha) = (\mathbf{a}\rho)^2 T(t, \alpha), \quad (8.18)$$

где

$$T(t, \alpha) \equiv T_n(t, \alpha) = \exp \left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t, \alpha) \right] \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (8.19)$$

Такая задача решается взятием $\mathbf{D}^\alpha = D_{-,g(t,\alpha)}^\alpha$, где $D_{-,g(t,\alpha)}^\alpha f$, как функция от t , есть дробная производная порядка $\alpha > 0$ от функции f по функции $g(t, \alpha)$, определенная для $x \in \mathbf{R}$ и $t > 0$ равенством

$$\begin{aligned} & \left(D_{-,g(t,\alpha)}^\alpha U \right) (x, t) = \\ & = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{1}{g'(t, \alpha)} \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^\infty \frac{g'(\tau, \alpha) U(x, \tau) d\tau}{[g(\tau, \alpha) - g(t, \alpha)]^{\alpha - n + 1}}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

с $n = -[-\alpha]$.

Действительно, если мы предположим, что $g(t, \alpha)$ (для любого фиксированного $\alpha > 0$) - монотонно возрастающая функция от $t \in \mathbf{R}_+ = (0, \infty)$, имеющая непрерывную производную $\frac{\partial}{\partial t}g(t, \alpha) \neq 0$, тогда в соответствии со свойством

$$\left(D_{-,g}^\alpha e^{-\lambda g(t)} \right) (x) = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda g(x)}, \quad (8.21)$$

(см. [12, формула (8.1.10)], мы имеем

$$\begin{aligned} \left(D_{-,g(t,\alpha)}^\alpha \exp \left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(\tau, \alpha) \right] \right) (t) = \\ = (\mathbf{a}\rho)^2 \exp \left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t, \alpha) \right], \end{aligned} \quad (8.22)$$

и следовательно (8.18) справедливо для $\mathbf{D}^\alpha = D_{-,g(t,\alpha)}^\alpha$.

Поэтому новая диффузионная модель дробного порядка может быть представлена следующим дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D_{-,g(t,\alpha)}^\alpha U(x, t) = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \quad (\alpha > 0; t > 0; x \in \mathbf{R}) \quad (8.23)$$

с частной дробной производной (8.20).

Если дополнительно предположить, что $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t, \alpha) = k(\alpha) \in \mathbf{R}$ для любого $\alpha > 0$, то явное решение задачи, моделируемой равенствами (9.23), (9.7) и (9.8), имеет вид (8.17):

$$U(x, t) = \frac{1}{k(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\mathbf{a}x) \exp \left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} g(t, \alpha) \right], \quad (8.24)$$

при условии, что $g(t, \alpha)$ выбрана так, что $U(x, t)$, $D_{-;g(t,\alpha)}^{\alpha} U(x, t)$, и $U_{xx}(x, t)$ - сходящиеся двойные ряды на $[0, l] \times [0, \infty)$, а c_n дается формулой (8.15).

Например, при $g(t, \alpha) = t^\alpha$ ($\alpha > 0$) мы можем доказать сходимость указанных выше рядов так же как и в случае $\alpha = 1$. В этом случае $D_{-;g(t,\alpha)}^\alpha = D_{-;t^\alpha}^\alpha$ есть частная производная дробного порядка вида (8.5), определенная для $x \in \mathbf{R}$ и $t > 0$ равенством

$$\begin{aligned} & (D_{-;t^\alpha}^\alpha U)(x, t) = \\ & = \frac{\alpha^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^\infty \frac{\tau^{\alpha-1} U(x, \tau) d\tau}{(\tau^\alpha - t^\alpha)^{\alpha-n+1}} \quad (n = -[-\alpha]). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Тогда уравнение (8.23) принимает вид

$$D_{-;t^\alpha}^\alpha U(x, t) = \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \quad (\alpha > 0; t > 0; x \in \mathbf{R}), \quad (8.26)$$

и явное решение задачи, моделируемой равенствами (8.26), (8.7) и (8.8), представимо формулой

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\mathbf{a}x) \exp \left[-(\mathbf{a}\rho)^{2/\alpha} t^\alpha \right]. \quad (8.27)$$

Аналогичным образом можно рассматривать случай, когда $g(t, \alpha) = \exp(t^\alpha)$.

Модель (8.26) может быть распространена на пространственную переменную $x \in \mathbf{R}^m$, если мы заменим частную производную $\partial^2/\partial x^2$ оператором Лапласа (1.13) относительно x :

$$D_{-;g(t,\alpha)}^\alpha U(x,t) = \rho^2 \Delta_x U(x,t) \quad (\alpha > 0; t > 0; x \in \mathbf{R}^m). \quad (8.28)$$

В частности, модель (8.26) примет вид

$$D_{-;t\alpha}^\alpha U(x,t) = \rho^2 \Delta_x U(x,t) \quad (\alpha > 0; t > 0; x \in \mathbf{R}^m). \quad (8.29)$$

Аналогично (8.24) и (8.27) явные решения этих уравнений также могут быть выведены при соответствующих граничных и начальных условиях.

Представляется, что указанный нами подход, основанный на использовании обобщенных частных производных дробного порядка (8.20), может быть также применен для построения соответствующих моделей обобщенного дробного порядка для уравнения Фоккера-Планка (Fokker-Planck) и адвекционно-диффузионного (advection-diffusion) уравнения. Мы предполагаем, что такие модели будут согласованы с моделями для соответствующих обобщений, включая например оператор дробного дифференцирования \mathbf{D}^α , определенный (8.3) по пространственной переменной.

В заключение отметим, что существует много возможностей для контроля убывания экспоненциального типа фундаментальных решений обобщенных уравнений дробной диффузии, и на этом пути та же самая математическая техника может быть использована для изучения новых моделей дробного порядка для контроля аномальных диффузионных процессов.