Интегрирование дифференциальных уравнений.

Д.Ф. Егоров.

Лекции составлены студентами В.М. Васильевым и Н.Н. Корзининым
под редакцией проф. Д.Ф. Егорова в 1909 году.

Набор и примечания Малых М.Д., 2003-2006 гг.

Оглавление

Предисловие редактора **4**

Введение **5**

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения и их решения **7**

1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения 7

1.2 Интегрирование дифференциального уравнения 8

1.3 Метод исключения постоянных 12

1.4 Задача с начальными условиями 17

2 Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка **19**

2.1 Уравнения 1-го порядка 19

2.2 Разделение переменных 20

2.3 Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, приводимые к однородным 24

2.3.1 Однородные уравнения 24

2.3.2 Уравнения, сводимые к однородным 26

2.4 Линейные уравнения 30

2.4.1 Однородное линейное уравнение 31

2.4.2 Неоднородное линейное уравнение. Метод вариации постоянной 33

2.4.3 Нахождение общего решения по заданным частным решениям 35
2.5 Уравнение Бернулли 37
2.6 Уравнение Риккати. 38
2.6.1 Частное уравнение Риккати 44
2.7 Теория интегрирующего множителя. 50
2.8 Дифференциальные уравнения первого порядка степени выше первой относительно производной. 64
2.8.1 Неприводимость уравнения 65
2.8.2 Уравнение вида $F(y, y') = 0$ 68
2.8.3 Уравнение вида $F(x, y') = 0$ 72
2.8.4 Уравнение общего вида $F(x, y, y') = 0$ 73
2.9 Уравнения Лагранжа и Клеро. 76

3 Существование общего интеграла дифференциального уравнения 82

3.1 Формулировка теоремы о существовании интеграла дифференциального уравнения (теоремы Коши) 82
3.2 Доказательство существования решения задачи Коши. . . . 86
3.3 Доказательство единственности решения задачи Коши. . . . 97
3.4 Продолжение решение. 100
3.5 Случай уравнения перового порядка. 101

4 Особое решение. 102

4.1 Первый способ отыскания особого решения. 104
4.2 Второй способ отыскания особого решения. 109

5 Интегрирование уравнений высших порядков. 116

5.1 Дифференциальные уравнение с двумя аргументами 119
5.1.1 Случай 1: $F(x, y^{(n)}) = 0$ 119
5.1.2 Случай 2: $F(y^n, y^{(n-1)}) = 0$ 122

5.1.3 Случай 3: $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$ 123
5.1.4 Уравнения второго порядка 125
5.2 Дифференциальные уравнения, не содержащие функции . . 130
5.3 Дифференциальные уравнения, не содержащие независимого переменного 131
5.4 Однородные уравнения 132
5.4.1 Уравнение, однородное относительно y и ее производных 132
5.4.2 Уравнение, однородное относительно x, y и их дифференциалов 135

Предисловие редактора

Лекции, читанные Д.Ф. Егоровым в Московском университете, были изданы 1909 году в 2-х частях в виде машинописи, размноженной литографическим способом. В настоящем издании воспроизводится первая часть с незначительными стилистическими изменениями и небольшими комментариями, набранными петитом. При их написании я использовал в основном «Историю математики» под ред. А.П. Юшкевича и комментарии Гастона Энештрема к статье Пенлеве в «Энциклопедии математических наук».

М.Д. Малых, 26 янв. 2012 года.

Введение

Определение производной от данной функции составляет прямую задачу исчисления бесконечно-малых величин. Общий вопрос обратной задачи исчисления бесконечно малых состоит в том, чтобы определить одну или несколько функций одного или нескольких переменных из данных соотношений между независимыми переменными, функциями и их производными. Пусть имеется ряд независимых переменных:

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_n$$

и ряд функций от этих переменных

$$y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots y_m.$$

Тогда соотношения, о которых идет речь, имеют вид

$$F_i\left(x_1, \ldots x_n,\ y_1, \ldots y_m,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_m}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\,\partial x_2}, \ldots \frac{\partial^p y_m}{\partial x_n^p}\right) = 0$$

и называются *дифференциальными уравнениями*; порядок наивысшей производной называется *порядком* уравнения. Если $n = 1$, то есть независимое переменное одно, то уравнения называются *обыкновенными*, если же $n > 1$, то — *уравнениями с частными производными.*

page:2

Мы начнем с того случая, когда имеется одна функция $(m = 1)$ и одно независимое переменное $(n = 1)$; тогда функция y определяется одним дифференциальным уравнением:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\right) = 0;$$

если в уравнения входят производные до порядка p, то уравнение называется уравнением p-го порядка.

Определение функций из дифференциальных уравнений, или интегрирование дифференциальных уравнений, можно понимать различно.

Самая узкая постановка задачи следующая: выразить искомую функцию через элементарные функции. В этом смысле, вообще говоря, задача, конечно, не всегда разрешима, так как даже для самого простейшего дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

имеем

$$y = \int f(x)dx + C$$

и y не всегда выражается в элементарных функциях, хотя бы это и имело место для $f(x)$.

Во-вторых, нахождение функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, можно понимать в смысле указания приема, которым по каждому значению переменного находится значение функции. Такие при-
page:3 емы могут быть весьма разнообразны, например, задача в этом смысле будет разрешена, коль скоро будет найдено разложение функции в сходящийся ряд, более или менее простого типа. Взяв известное число членов, для каждого значения переменного в пределах сходимости ряда получим с любым приближением значение функции.

Третье толкование определения функции из дифференциального уравнения состоит в том, что мы считаем задачу разрешенной, как только нам удастся привести ее к другим более простым задачам, и именно к вычислению интегралов данных функций, или квадратурам. Таким образом, возникает вопрос о дифференциальных уравнениях, приводимых к квадратурам.

Глава 1

Обыкновенные дифференциальные уравнения и их решения

1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Уравнение n-го порядка имеет вид:

$$F(x,\, y,\, y',\, y'',\, y''',\dots y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

3eq1

где $y',\ y'',\ y''',\dots y^{(n)}$ — производные различных порядков. При изучении дифференциальных уравнений, возникает прежде всего вопрос относительно функции F, входящей в левую часть. Во всем дальнейшем будем считать ее непрерывной и допускающей производные по всем аргументам. Если мы поставили задачу определения y в элементарных функциях, то в этом случае на функцию F естественно наложить такое же ограничение, а именно, F должно выражаться непременно в элементарных функциях, это последнее ограничение может быть заменено более тесным предположением, что F — алгебраическая функция от $x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\dots y^{(n)}$, а следовательно,
page:4 можно предположить, F — целый рациональный многочлен. Этого упрощения можно достигнуть дифференцированиями и исключением. Покажем это на простом примере.

Пусть дано уравнение

$$e^{y'} + xy' - 2y = 0,$$

где y' — первая производная. Дифференциальное уравнение 1-го порядка дифференцируем:

$$e^{y'}y'' + xy' + y' - 2y' = 0$$

Из двух уравнений исключаем $e^{y'}$; умножая 1-ое уравнение на y'' и вычитая первое из второго, получим:

$$x(1 - y')y'' + 2yy'' - y' = 0.$$

Полученное уравнение — алгебраическое относительно всех аргументов, но уже не 1-го порядка, а высшего второго порядка. Таким образом, уничтожение трансцендентностей произошло за счет увеличения порядка дифференциального уравнения. Обыкновенно ограничиваются требованием алгебраичности только относительно y и его производных; например, рассматривают уравнение хотя бы такого вида:

$$(y')^2 - \cos x.y' + 2e^x.y = 0.$$

При более общей постановке задачи ограничиваются предположениями, упомянутыми в самом начале.

1.2 Интегрирование дифференциального уравнения

Всякая функция y, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется *решением* дифференциального уравнения. При этом подразумевается, что функция y определена и дифференцируема в некоторой области изменения переменной x. Вместо того, что бы искать $y = f(x)$, мы можем искать соотношение вида $\Phi(x, y) = 0$, то есть определить y как неявную функцию от x. Такого рода соотношения называются *интегралами дифференциального уравнения*. Заметим еще, что равенство

page:5

$$y = f(x)$$

тоже есть интеграл, но сама функция есть решение дифференциального уравнения. Процесс нахождения всех решений y данного дифференциального уравнения называют *интегрированием* дифференциального уравнения.

Исторически первым возник термин *интеграл*, который использовал И. Бернулли (J. Bernulli) в своих «Математических лекциях о методе интегралов и других вопросах» (1691-1692), явившихся первым систематическим курсом теории дифференциальных уравнений. Само название связано с тем, что по-началу казалось, что всякое дифференциальное уравнение любого порядка может быть сведено к одной или нескольким квадратурам, а теория дифференциальных уравнений — лишь раздел интегрального исчисления. Термин *решение* был введен Лагранжем (Lagrange, 1774), но вошел во всеобщее употребление, главным образом, благодаря Пуанкаре (Poincare).

Рассмотрим простейший случай дифференциального уравнения

$$y' = \varphi(x).$$

Интегрирование этого уравнения сводится к нахождению квадратуры

$$y = \int \varphi(x)dx + C.$$

В этом случае задача интегрирования есть задача неопределенная вследствие присутствия в решении произвольного элемента — произвольной постоянной C. Придавая C различные значения $1, 2, \dots - 4, \dots \sqrt{2}, \dots$ будем получать различные решения y. Поэтому можно ожидать, что и более общая задача есть тоже задача неопределенная и что ее интеграл тоже содержит произвольные элементы в виде произвольных постоянных.

Возьмем теперь обратно соотношение, содержащее произвольные постоянные $C_1,\ C_2, \dots C_n$:

$$\varPhi(x,\ y,\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0. \tag{1.2}$$

$\boxed{\texttt{5eq1}}$

Дифференцируем последовательно n раз по x, получаем, включая уравнение (1.2), систему:

$$\begin{cases} \varPhi(x,\ y,\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0 \\ \frac{\partial\varPhi}{\partial x} + \frac{\partial\varPhi}{\partial y}y' = 0 \\ \frac{\partial^2\varPhi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varPhi}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2\varPhi}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial\varPhi}{\partial y}y'' = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial^{n-1}\varPhi}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-1}{1}\frac{\partial^{n-1}\varPhi}{\partial x^{n-2}\,\partial y}y' + \dots + \frac{\partial\varPhi}{\partial y}y^{(n-1)} = 0 \\ \frac{\partial^n\varPhi}{\partial x^n} + \frac{n}{1}\frac{\partial^n\varPhi}{\partial x^{n-1}\,\partial y}y' + \dots + \frac{\partial\varPhi}{\partial y}y^{(n)} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$\boxed{\texttt{A}}$

page:6 Эти соотношения содержат x, y, y', y'', $\ldots y^{(n)}$ и постоянные C_1, $C_2, \ldots C_n$, которых всего n — всего уравнений $n+1$. Исключая отсюда все постоянные величины C_1, $C_2, \ldots C_n$, получим одно соотношение такого вида:

$$F(x,\, y,\, y',\, y'',\, y''', \ldots y^{(n)}) = 0, \tag{1.4}$$ 6eq2

то есть дифференциальное уравнение.

Если из равенства (1.2) определим y как функцию x, то есть

$$y = f(x,\, C_1,\, C_2, \ldots C_n), \tag{1.5}$$ 6eq3

и подставим ее в дифференциальное уравнение (1.4), то получим, очевидно, тождество, следовательно,

$$y = f(x,\, C_1,\, C_2, \ldots C_n)$$

есть решение дифференциального уравнения (1.4). Оно содержит n произвольных постоянных, которым мы можем давать любое значение. Решение (1.5) называется *общим решением* дифференциального уравнения (1.4), а соотношение (1.2) — *общим интегралом*. Если постоянным даем частные значения, то получаем частные решения. Итак, *частными решениями* называются решения, получающиеся из общего при частном значении постоянных. *Частным интегралом* называется интеграл, получаемый из общего при частном значении произвольных постоянных.

Тот факт, что интегрирование дифференциального уравнения первого порядка вводит произвольную константу, был известен уже к концу 17 века, но аналитики конца 17-го - начала 18 веков не предавали ему особого значения и порой забывали об этом. Так И. Бернулли[1] обосновывал соотношение $\log(-z) = \log(z)$ тем, что

$$d\log(-z) = \frac{d(-z)}{-z} = \frac{dz}{z} = d\log(z).$$

Первые из рассмотренных дифференциальных уравнений порядка $n > 1$ были проинтегрированы путем сведения к дифференциальным уравнениям первого порядка; при этом не уделяли внимания числу произвольных констант, содержащихся в их в общем решении. При изучении уравнения $y^{(n)} = f(x)$ Ньютон между тем заметил, что к общему решению этого уравнения следует прибавить еще произвольный полином степени $n-1$, n-ая производная от которого

[1]Письмо к Эйлеру, датированное 9 января 1728, Bibl. Math. (3) 4 (1903), p. 352

равна нулю. В «Методе приращений» Б. Тейлора[2] было изучено число условий, которым может быть подчинен интеграл системы дифференциальных уравнений. Только в 1739-1740 Эйлер[3] недвусмысленно заметил, что по природе самого интегрирования общее решение дифференциального уравнения четвертого порядка содержит четыре произвольные константы и наоборот, решение дифференциального уравнения четвертого порядка, содержащее четыре произвольные константы, является общим интегралом.

Интеграл вида

$$\psi(x,\, y) = 0$$

называется *особым*, если он не получается из общего ни при каких частных значениях постоянных; аналогично, решение

$$y = \varphi(x)$$

называется особым, если оно не получается из общего ни при каких page:7 частных значениях постоянных.

Пример 1.2.1 (Клеро, 1736[4]).

$$y = xy' + {y'}^2$$

Это — дифференциальное уравнение 1-го порядка; ему можно удовлетворить, положив

$$y = Cx + C^2,$$

где C — произвольное постоянное. Действительно, подставляя $y' = C$, получаем

$$Cx + C^2 = Cx + C^2$$

то есть тождество. Итак,

$$y = Cx + C^2,$$

есть решение данного дифференциального уравнения. [5]

[2] Teylor B. Meth. increm. Londres, 1715, p. 9-14

[3] Письма к И. Бернулли, датированные 15 сентября 1739 и 19 января 1740; Bibl. Math. (3) 6 (1905), p. 38.47

[4] Clairaut A.C. Mém. Ac. Paris, 1736. На существование особых интегралов впервые было указано в «Методе приращений» Б. Тейлора [Meth. increm. Londres, 1715, p. 9-14].

[5] Докажем, что оно действительно общее. Для интеграла

$$\varPhi(x, y, C) = y - Cx - C^2 = 0$$

Из него получаются все частные решения, например, положим $C = 0$, получаем $y = x + 1$ — одно из частных решений. Легко видеть, что уравнение допускает еще одно решение

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

Проверим:

$$y' = -\frac{x}{2}, \quad -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

получается тождество. Таким образом, найдено еще одно решение. Легко видеть, что это новое решение не получается из общего ни при каком частном значении постоянного C, так как общее линейно относительно x, а полученное — 2-ой степени; следовательно, это решение — особое.

Эйлер не скрывал своего удивления тем, что общий интеграл не всегда оказывается "общим":

> « ...если интегральное уравнение [общий интеграл дифференциального уравнения, в нашей терминологии], найденное по точным правилам, не в состоянии охватить дифференциальное уравнение, то проблема допускает решения, которые совершенно не могут быть получены интегрированием, и, следовательно, приводят к несовершенному решению, что представляется, без сомнения, опрокидывающим обычные понятия интегрального исчисления»[6].

1.3 Метод исключения постоянных

page:8

Мы видели, что исключением n постоянных из соотношения (1.2) получаем, вообще говоря, дифференциальное уравнение n-го порядка. Само исключение можно вести так: возьмем первые из n уравнений системы (1.3),

---

система (1.3) имеет вид

$$\begin{cases} y - Cx - C^2 = 0 \\ y' - C = 0 \end{cases}$$

Исключая из нее C, имеем

$$y - y'x - y'^2 = 0,$$

то есть исходное уравнение. Значит, в соответствии с нашим определением, $y = Cx + C^2$ — общее решение уравнения $y = xy' + y'^2$.

[6] Euler L. Opera omnima, series I, v. 22, p. 230; цит. по ИМ-2.

то есть систему

$$\begin{cases} \Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2, \dots C_n) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-1}{1} \frac{\partial^{n-1} \Phi}{\partial x^{n-2}\, \partial y} y' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y^{(n-1)} = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

B

Из нее определим $C_1,\ C_2, \dots C_n$ как функции от $x,\ y,\ y', \dots y^{(n)}$ и подставим в последнее уравнение системы (1.3); тогда и придем к уравнению (1.4). Может однако случиться, что все постоянные $C_1, C_2, \dots C_n$ исключаться из меньшего числа уравнений так, что их невозможно определить из системы (1.6). Если все они исключаются из системы (1.6), то в результате получим уравнение $(n-1)$-го порядка; если же они исключаются из первых $(n-1)$, $(n-2)$, … уравнений системы (1.3), то соответственно получаем дифференциальное уравнение $(n-1)$-го, $(n-2)$-го и т.д. порядков. Во всех этих случаях говорят, что n постоянных в соотношении (1.2) *зависимы* (или несущественны); они называются *независимыми*, если в результате исключения получаем дифференциальное уравнение n-го порядка, то есть если $C_1,\ C_2, \dots C_n$ получаются из системы (1.6).

В соответствии с этим интеграл дифференциального уравнения n-го порядка называется *общим*, если он содержит n *независимых* произвольных постоянных; другими словами, соотношение вида (1.2) называется общим интегралом уравнения (1.4), если это последнее получается исключением n постоянных из системы (1.3).

Пример 1.3.1. Рассмотрим на плоскости кривые 2-го порядка, отнесенные к декартовым координатам. В уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1.7}$$

8eq4

входит 5 независимых произвольных постоянных, которые исключим дифференцированием. Для этого разрешим уравнение относительно y, получаем

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

где α, β, A, B, C составлены из коэффициентов данного уравнения и, следовательно, тоже произвольные постоянные. Дифференцируем:

$$y' = \alpha \pm \frac{Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}};$$

$$y'' = \pm\frac{A}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}} \mp \frac{(Ax + B)^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{AC - B^2}{(Ax^2 + 2Bx + C)^{\frac{3}{2}}}$$

Возведем y'' в степень $-\frac{2}{3}$:

$$y''^{-\frac{2}{3}} = \frac{Ax^2 + 2Bx + C}{(AC - B^2)^{\frac{2}{3}}}$$

Продифференцировав 3 раза, мы получаем в результате нуль:

$$\frac{d^3}{dx^3} y''^{-\frac{2}{3}} = 0$$

Выполняя выкладки, получаем дифференциальное уравнение

$$40y'''^3 - 45y''y'''y^{(4)} + 9y''^2 y^{(5)} = 0 \tag{1.8}$$

9eq5

Это уравнение 5-го порядка; его общий интеграл есть уравнение (1.7) конического сечения.[7] Если бы из совокупности этих кривых мы выделили только параболы, то для них оказалось бы $A = 0$, и тогда имели бы

$$\frac{d^2}{dx^2} y''^{-\frac{2}{3}} = 0$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение парабол имеет вид:

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0 \tag{1.9}$$

9eq6

Это — дифференциальное уравнение 4-го порядка. Все решения, найденные для дифференциального уравнения (1.9) суть также и решения (1.8).

Пример 1.3.2.

$$y = C_1 e^{x + C_2} \tag{1.10}$$

10eq7

[7]Это уравнение является основной для вывода закона всемирного тяготения из законов Кеплера, данного Альфеном (см. Аппель П. «Механика»).

Имеем здесь 2 произвольные постоянные. Дифференцируя уравнение два раза, получим

$$y' = C_1 e^{x+C_2}, \tag{1.11}$$

10eq8

$$y'' = C_1 e^{x+C_2}. \tag{1.12}$$

10eq9

Общий прием исключения состоит в том, чтобы определить C_1 и C_2 из (1.10)-(1.11) и подставить их в уравнение (1.12), но здесь это определение невозможно, и следовательно, и C_1 и C_2 исключаются из уравнений (1.10)-(1.11): деля (1.10) на (1.11) почленно, получаем

$$\frac{y}{y'} = 1, \quad \text{или} \quad y = y' \tag{1.13}$$

10eq10

Получили дифференциальное уравнение 1-го порядка, а не 2- го, как мы могли бы ожидать. Отсюда заключаем, что постоянные C_1 и C_2 в уравнении (1.10) — зависимые. Не трудно заметить, что они входят в одной комбинации:

$$y = C_1 e^{C_2} e^x,$$

полагая

$$C_1 e^{C_2} = C,$$

имеем

$$y = Ce^x$$

Следовательно, мы имеем только одно существенное постоянное C и общее решение уравнения (1.13) — $y = Ce^x$.

Разберем более сложный пример:

Пример 1.3.3.

$$y^2 = 2axy + bx^2$$

где a и b — два произвольных постоянных и, как видно, они не входят в какой-нибудь одной комбинации. Дифференцируем два раза

$$yy' = axy' + ay + bx,$$

$$yy'' + {y'}^2 = axy'' + 2ay' + b.$$

Следовало бы из первых двух равенств определить a и b и подставить в последнее. Но из первых двух равенств a и b исключаются и получается уравнение свободное от a и b. Действительно, из первого уравнения

$$y(y - ax) = x(ay + bx)$$

из второго

$$y'(y - ax) = ay + bx$$

Делим 1-ое на второе, получаем

$$\frac{y}{y'} = x, \quad \text{или} \quad y = xy'$$

Получили дифференциальное уравнение 1-го порядка. Исключенных постоянных 2. Следовательно, эти постоянные зависимы. Данное уравнение можно еще представить в виде:

$$\frac{y^2}{x^2} - 2a\frac{y}{x} - b = 0$$

отсюда

$$\frac{y}{x} = k_1, \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = k_1,$$

где

$$k_1 = a + \sqrt{a^2 + b}, \quad k_2 = a - \sqrt{a^2 + b}$$

Иными словами,

$$y = k_1 x, \quad \text{или} \quad y = k_2 x$$

Дифференцируя по x, находим

$$y' = k_1, \quad \text{или} \quad y' = k_2$$

Следовательно, в том и в другом предположении $y = xy'$ будет искомое дифференциальное уравнение, и мы видим, что a и b приходится исключать только в одной комбинации k_1 или k_2.

1.4 Задача с начальными условиями

Если нам дано дифференциальное уравнение:

$$F(x,\, y,\, y',\, y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

page:12 и мы нашли общий интеграл

$$\varPhi(x,\, y,\, C_1,\, C_2, \ldots C_n) = 0,$$

то мы вполне определим постоянные, если нам даны для какого-нибудь определенного численного значения $x = x_0$ значения y и производных до $(n-1)$-го порядка:

$$y = y_0,\; y' = y'_0, \ldots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

В самом деле, наряду с соотношением $\varPhi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0$ рассмотрим те, которые получаются дифференцированием по x:

$$\varPhi = 0, \quad \frac{\partial \varPhi}{\partial x} + \frac{\partial \varPhi}{\partial y} y' = 0, \quad \frac{\partial^2 \varPhi}{\partial x^2} + \cdots = 0,$$

то есть систему (1.6) и в этой системе заменим x через x_0, а следовательно, положим

$$y = y_0,\; y' = y'_0, \ldots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

Получим n уравнений, из которых найдем $C_1,\, C_2, \ldots C_n$, то есть определенные численные значения постоянных. Заменив их в общем интеграле, мы найдем определяемый интеграл. Итак, решение дифференциального уравнений определяется начальными условиями:

$$\text{при } x = x_0\text{: } y = y_0,\; y' = y'_0, \ldots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

Пример 1.4.1. Дифференциальному уравнению

$$y'' = y$$

удовлетворяет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Действительно, дифференцируя, имеем:

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \quad y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

page:13 то есть $y'' = y$. Следовательно,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

есть общее решение. Пусть теперь при $x = 0$ $y = 2$, а $y' = 0$. Это данные начальные условия; подставляя $x = 0$, $y = 2$, $y' = 0$, найдем

$$2 = C_1 + C_2, \quad 0 = C_1 - C_2.$$

Отсюда

$$C_1 = 1 \quad \text{и} \quad C_2 = 1$$

Наше частное решение будет

$$y = e^x + e^{-x}.$$

Глава 2

Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка

2.1 Уравнения 1-го порядка

Уравнение 1-го порядка содержит независимое переменное, функцию и первую ее производную и имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

13eq1

На основании сказанного раньше общий интеграл такого дифференциального уравнения будет содержать только одно произвольное постоянное и иметь вид

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.2}$$

13eq2

Из общего интеграла найдутся при определенном значении постоянного C все частные интегралы. Ясно, что раз дело идет об определении общего интеграла, мы имеем право умножать и делить данное уравнение (2.1) на любую функцию x и y, так как при этом могут приобретаться или теряться только решения, не содержащие произвольной постоянной и получаемые page:14 приравниванием нулю вышеупомянутой функции x и y.

Если будем толковать переменные x и y как декартовы координаты, то уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

определит нам целое семейство кривых с одним произвольным параметром. Это семейство кривых мы назовем *интегральными кривыми.* Производная y' есть тангенс угла наклона к оси x касательной в точке (x, y). Поэтому дифференциальное уравнение представляет нам соотношением между координатами точки и тангенсом угла наклона касательной в данной точки к оси x. Задача интегрирования сводится к определению кривых, для которых во всех точках имеет место это соотношение.

Начнем с простейшего случая, когда дифференциальное уравнение алгебраическое относительно y' и притом 1-ой степени. В таком случай его можно представить в виде:

$$N\frac{dy}{dx} + M = 0, \tag{2.3}$$ 14eq3

где M и N суть функции только x и y, однозначные в рассматриваемой области изменения этих переменных. Это уравнение можно представить еще в таком виде, разрешив его относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} = f(x, y). \tag{2.4}$$ 14eq3’

Подобное разрешение можно произвести и для общего уравнения (2.1), которое определяет y' как функцию x, y; но на практике это разрешение вообще не выполнимо в элементарных функциях, даже если левая часть уравнения (2.1) выражается в элементарных функциях.

2.2 Разделение переменных

Умножая уравнение (2.3) на dx, получим новый вид

$$Ndy + Mdx = 0, \tag{2.5}$$ 14eq3’

где M и N по прежнему функции переменных x и y. Уравнение, в котором каждый член содержит только одно переменное называется *уравнением с разделенными переменными*; тогда M – функция только x, а N – функция только y, и для ясности можно принять обозначения

$$M = X, \quad N = Y;$$

получим

$$Xdx + Ydy = 0. \tag{2.6}$$ 15eq5

Интегрирование такого уравнения приводится к квадратурам следующим образом. Берем интеграл от каждого члена, и сумму приравниваем C

$$\int\limits_{x_0}^{x} Xdx + \int\limits_{y_0}^{y} Ydy = C, \tag{2.7}$$ 15eq6

где C — произвольное постоянное, а x_0, y_0 — какие угодно постоянные значения. Соотношение (2.7) есть общий интеграл. Действительно, дифференцируя его, исключаем C и придем опять к дифференциальному уравнению (2.6).

Уравнения этого вида исторически были проинтегрированы первыми еще самим Лейбницем.[1] Термин *разделение переменных* (aequatio separato – дословно «разделенное уравнение») ввел И. Бернулли в «Математических лекциях о методе интегралов и других вопросах» (1691-1692).

Пример 2.2.1. Уравнение

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

является дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Двумя квадратурами находим:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

или

$$\arcsin(x) + \arcsin(y) = C$$

[1]В 1675 г. он нашел решение уравнения

$$ydy = \frac{bdx}{y}$$

в виде квадратуры

$$\int bdx - y^2dy = \text{const}.$$

См.: Der Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern, 1, Berlin, 1899, p. 161.

К уравнению вида (2.6) приводится и уравнение вида

$$X_1Y_1dx + X_2Y_2dy = 0,$$

где

$$M = X_1Y_1 \quad \text{и} N = X_2Y_2.$$

Производим разделение переменных, разделяя все уравнение на X_2Y_2, найдем

$$\frac{X_1}{X_2}dx + \frac{Y_2}{Y_1}dy = 0$$

Получаем уравнение с разделенными переменными. Выполняя квадратуры получим общи интеграл.

Пример 2.2.2.

$$e^{-\frac{1}{x}}y^3dx + x^2y^2dy = 0$$

Разделяя уравнение на x^2y^3, получаем:

$$e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{y}dy = 0$$

Переменный разделены. Выполняем интегрирование обоих членов

$$\int e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2} + \int \frac{1}{y}dy = C;$$

$$e^{-\frac{1}{x}} + \ln(y) = C.$$

Пример 2.2.3. Рассмотрим еще пример, где общий интеграл получается в двух формах:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0;$$

переменные разделены. Интегрируем

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = C;$$

или

$$\ln(x) + \ln(y) = C. \tag{2.8}$$ 16A

Проделаем немного иначе. Умножаем дифференциальное уравнение на xy, получаем

$$ydx + xdy = 0$$

или

$$d(xy) = 0$$

следовательно,

$$xy = C'. \tag{2.9}$$ 17В

Обще интегралы (2.8) и (2.9) очевидно тожественны между собой. Определим C и C' условием: при $x = 1$ $y = z$ (z — постоянный параметр). Уравнения (2.8) и (2.9) при $x = 1$ дают $\ln(z) = C, \ z = C'$. Итак, имеем

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(z), \quad xy = z,$$

и, следовательно,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Таким образом мы доказали известное свойство логарифма произведения.

Важность метода разделения переменных трудно переоценить:

> «По мнению некоторых, в разделении переменных состоит вся основа решения дифференциальных уравнений, так что если предложенное уравнение не допускает разделения переменных, следует искать подходящей подстановки, в результате которой вновь введенные переменные сделают возможным разделение переменных. Итак, все дело сводится к тому, чтобы указать для любого предложенного дифференциального уравнения такую подстановку, благодаря которой имело бы место разделение переменных. Конечно, надо было бы желать, чтобы был обнаружен такой метод нахождения подходящей подстановки для любого случая, но в этом вопросе не найдено решительно ничего определенного, так как большинство подстановок, которые до сих пор были в употреблении, не основывается на каких либо определенных началах. (...) В этом трудном деле весьма важно познакомиться с возможно более разнообразными методами.»[2]

[2] Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1, № 405.

2.3 Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, приводимые к однородным

2.3.1 Однородные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.10}$$

17eq1

где F — функция отношения переменных.

Уравнения этого типа были сведены к квадратуре И. Бернулли в «Математических лекциях о методе интегралов и других вопросах» (1691-1692).

Легко видеть, что если M и N — однородные функции (одного измерения) переменных x и y[3], то:

$$Ndx + Mdy \tag{2.11}$$

17eq2

будет однородным дифференциальным уравнением. Действительно, обозначим через n измерение однородности функций M и N, тогда их можно представить в таком виде:

$$M = x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^n f_2\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.12}$$

17eq3

page:18 Внеся эти значения в соотношение (2.11) и сокращая все на x^n, получаем

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + f_2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Отношение переменных $\frac{y}{x}$ можно заменить новым переменным:

$$\frac{y}{x} = u; \quad \text{отсюда} \quad y = ux;$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u), \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u$$

[3] Функция f переменных $x_1, \ldots, x_m$ называется однородной измерения или степени n, если всюду верно равенство $f(kx_1, \ldots, x_m) = k^n f(x_1, \ldots x_n)$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}; \qquad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Переменные разделены; выполняя квадратуры, находим общий интеграл:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + \ln(C).$$

Таков общий интеграл преобразованного уравнения; внося в данное уравнение вместо u его значения, получим общий интеграл данного уравнения

$$Cx = e^{\int \frac{du}{f(u)-u}} = \Phi(u) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$Cx = \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Придавая C различные значения, получим различные частные интегралы. Нетрудно видеть, что семейство интегральных кривых в данном случае (однородности) состоит из подобных и подобно расположенных кривых. Действительно, умножая x и y на одно и тоже постоянное, мы только меняем C в общем интеграле.

Пример 2.3.1.

$$(x^2 - y^2)dx + yxdy = 0$$

Обозначая

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{имеем} \quad y = xu.$$

Дифференцируем

$$dy = xdu + udx$$

Подставляя значение dy в данное уравнение

$$x^2(1 - u^2)dx + x^2u(xdu + udx) = 0;$$

деля на x^2 и раскрывая скобки,

$$dx - xudu = 0;$$

в полученном уравнении переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + udu = 0$$

Интегрируем

$$2\ln(x) + u^2 = C$$

или

$$x^2 e^{u^2} = C'.$$

Таков общий интеграл преобразованного уравнения. Подставляя значение u, возвращаемся к данному уравнению и находим:

$$x^2 e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = C,$$

таков общий интеграл преобразованного уравнения.

2.3.2 Уравнения, сводимые к однородным

Переходим теперь к новому типу дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right), \tag{2.13}$$

19eq4

то есть первая производная является функцией линейной дроби. Коэффициенты a, b, c, a', b', c' — постоянные числа. Если бы мы предположили, что

$$c = c' = 0,$$

то пришли бы к типу однородных уравнений, рассмотренных выше; именно,

$$\frac{ax + by}{a'x + b'y} = \frac{a + b\frac{y}{x}}{a' + b'\frac{y}{x}}$$

Эта дробь есть функция отношения $\frac{y}{x}$, следовательно, и левая часть есть функция этого отношения, поэтому такое уравнение будет однородно.

Постараемся теперь данный общий случай свести к частному случаю предыдущего типа. Поступаем таким образом:

$$y = \eta + k, \quad x = \xi + h,$$

где h и k — постоянные, а y и x — функции η и ξ и обратно η и ξ — функции y и x. Внесем вместо y и x новые переменные и получим новое дифференциальное уравнение в переменных η и ξ. Ясно, что

$$dy = d\eta, \quad dx = d\xi, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Величинами h и k воспользуемся так, чтобы через них привести данное уравнение к однородному:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + (ah + bk + c)}{a'\xi + b'\eta + (a'h + b'k + c')}\right)$$

постоянные члены в числителе и знаменателе

$$ah + bk + c \quad \text{и} \quad a'h + b'k + c'$$

приравняем нулю, тогда получим уравнение однородное, как сказано выше. Имеем

$$ah + bk + c = 0 \quad \text{и} \quad a'h + b'k + c' = 0 \tag{2.14}$$

20eq5

Определяя из двух уравнений h и k, мы найдем их значения и подставим в выражения для y и x через η и ξ. Проинтегрировав полученное после замены уравнение как однородное, мы найдем общий интеграл измененного уравнения. Произведя обратно замену, найдем общий интеграл данного уравнения. Однако такой метод не всегда возможен, так как не всегда можно разрешить уравнения (2.14) относительно h и k. Может именно случиться, что детерминант системы, то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a & b \end{vmatrix},$$

равен 0, тогда мы h и k не можем найти. Рассмотрим этот случай подробнее. Если

$$a'b - ab' = 0,$$

то отсюда

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b};$$

обозначив это отношение через μ, имеем:

$$a' = a\mu, b' = b\mu$$

и подставим в данное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\mu(ax + by) + c'}\right),$$

пологая теперь

$$ax + by = z,$$

получим такое соотношение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\mu(ax + by) + c'}\right) = f\left(\frac{z + c}{\mu z + c'}\right).$$

Правая часть полученного уравнения есть функция только от z, а само z есть функция от x и y. Если в данном уравнении вместо переменных x и y будем рассматривать переменные x и z, то

$$y = \frac{z - ax}{b};$$

и мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{\mu z + c'}\right).$$

Разрешим полученное уравнение относительно $\frac{dz}{dx}$; имеем, очевидно,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = a + bf\left(\frac{z + c}{\mu z + c'}\right).$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dz}{\varphi(z)} = dx$$

и имеем

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = x + C$$

Подставляя вместо z его значения, получим общий интеграл. Итак, уравнение проинтегрировано и в случае

$$a'b - ab' = 0$$

Одним из наиболее часто встречающихся уравнений является уравнение вида:

$$Mdx + Ndy = 0$$

где M и N суть линейные многочлены

$$M = ax + by + c, \quad N = a'x + b'y + c',$$

то есть

$$(ax + by + c)dx + (a'x + b'y + c')dy = 0.$$

Это уравнение является частным случаем предыдущего типа.

Пример 2.3.2.

$$(2y + x - 1)dx + (y - 2x - 1)dy = 0.$$

Полагаем

$$\begin{aligned}
&y = \eta + k, \quad x = \xi + h, \quad dy = d\eta; \quad dx = d\xi,\\
&[2\eta + \xi + (2k + h - 1)]d\xi + [\eta - 2\xi + (k - 2h - 1)]d\eta = 0\\
&2k + h - 1 = 0, \quad k - 2h - 1 = 0,\\
&k = \tfrac{3}{5}, \quad h = -\tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Делаем подстановку

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\eta}{\xi} = u, \quad \eta = \xi u\\
&(2u + 1)d\xi + (u - 2)(ud\xi + \xi du) = 0
\end{aligned}$$

или

$$(u^2 + 1)d\xi + \xi(u - 2)du = 0.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{(u - 2)du}{u^2 + 1}; \quad \ln(\xi) + \frac{1}{2}\ln(u^2 + 1) - 2\mathrm{arctg}(u) = C.$$

Возвращаясь к старым переменным и переходя от логарифмов к числам, имеем:

$$(x+\frac{1}{5})^2+(y-\frac{3}{5})^2=C'e^{4\mathrm{arctg}\left(\frac{y-\frac{3}{5}}{x+\frac{1}{5}}\right)}$$

Пример 2.3.3.

$$(2x+3y+2)dx+(4x+6y+3)dy=0$$

Полагая

$$2x+3y=z,$$

имеем

$$\begin{aligned}&(z+2)dx+(2z+3)\tfrac{dz-2dx}{3}=0\\&\tfrac{dz}{dx}=2-\tfrac{3(z+2)}{2z+3}=\tfrac{z}{2z+3}\\&\tfrac{(2z+3)dz}{z}=dx\\&2z+3\ln(z)=x+C,\end{aligned}$$

или в старых переменных:

$$4x+6y+3\ln(2x+3y)=x+C,\quad \text{то есть}\quad x+2y+\ln(2x+3y)=C'$$

2.4 Линейные уравнения

Линейным уравнением называется такое уравнение, из которого первая производная выражается линейно через y. Общий вид его

$$\frac{dy}{dx}=Py+Q, \tag{2.15}$$

24eq1

где P и Q — суть какие угодно функции от x, или

$$P_0\frac{dy}{dx}+P_1y+P_2=0,$$

где $P_0,\ P_1,\ P_2$ — функции переменного x. Линейные уравнения разделяются на однородные и неоднородные. Линейное уравнение называется *однородным*, когда P_2 или $Q=0$; однородные линейные уравнения можно рассматривать как частный случай неоднородных.

Линейные уравнения сохраняют свою форму:

a) при любом преобразовании независимого переменного. Доказательство. Возьмем вместо x новое переменное x', полагая

$$x = \varphi(x'),$$

обратно

$$x' = \psi(x), \quad dx = \varphi'(x')dx'.$$

После подстановки получим линейное уравнение; действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{1}{\varphi'(x')}$$

и, следовательно, имеем

$$\frac{dy}{dx'} = P\varphi' y + Q\varphi',$$

где $P\varphi'$ и $Q\varphi'$ — функции переменного x'.

b) при линейном преобразовании функции y. Введем вместо y новое переменное z, положив

$$y = \alpha z + \beta,$$

где α и β — какие угодно функции x. После подстановки имеем:

$$\alpha\frac{dz}{dx} + z\alpha' + \beta' = P(\alpha z + \beta) + Q$$

— линейное уравнение.

2.4.1 Однородное линейное уравнение

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Py.$$

Разделяя переменные, интегрируем и квадратурой имеем общий интеграл:

$$\frac{dy}{y} = Pdx, \quad \ln y = \int Pdx + \ln C,$$

или

$$y = Ce^{\int Pdx}$$

Таков общий интеграл линейного уравнения.

Пример 2.4.1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad y = Ce^{\int \frac{dx}{x}} = Cx$$

Предположим теперь, что мы нашли для однородного уравнения частное решение

$$y_1 = \psi_1(x)$$

Легко видеть, что общее решение имеет вид:

$$y = Cy_1.$$

В самом деле, общее решение есть

$$y = Ae^{\int P dx} \tag{2.16}$$ 26eq3

Даем A некое частное значение a

$$A = a,$$

тогда получим частное решение

$$y_1 = ae^{\int P dx} \tag{2.17}$$ 26eq4

Деля (2.16) на (2.17), найдем

$$\frac{y}{y_1} = \frac{A}{a}, \quad y = \frac{A}{a}y_1$$

или, полагая

$$\frac{A}{a} = C, \quad y = Cy_1.$$

Предложение доказано. Можно этот результат доказать иначе. Имеем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Py;$$

пусть y_1 — частное решение, тогда

$$\frac{dy_1}{dx} = Py_1$$

Умножая 1-ое равенство на y_1, а второе на y и вычитая одно из другого, найдем

$$y_1\frac{dy}{dx} - y\frac{dy_1}{dx} = 0$$

Деля на y_1^2, имеем
$$\frac{d}{dx}\frac{y}{y_1}=0$$
Если производная равна нулю, то сама дробь равна постоянному числу, следовательно,
$$y=y_1C$$

2.4.2 Неоднородное линейное уравнение. Метод вариации постоянной

Переходим теперь к неоднородным уравнениям. Неоднородные уравнения имеют вид:
$$\frac{dy}{dx}=Py+Q,$$
где $Q\neq 0$. На ряду с неоднородным уравнением рассмотрим и однородное, получающиеся, если сделаем $Q=0$. Общий интеграл однородного уравнения
$$y=Ce^{\int Pdx}$$
Посмотрим, нельзя ли для общего решения неоднородного уравнения сохранить такое же выражение по виду, как и для однородного уравнения. Этого мы достигаем методом вариации или изменения постоянного. Метод состоит в том, что C считается функцией x и определяем его так, чтобы y удовлетворяло неоднородному уравнению:
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{\int Pdx}+Ce^{\int Pdx}P=PCe^{\int Pdx}+Q,$$
получаем
$$\frac{dC}{dx}=Qe^{-\int Pdx}$$
Из этого условия определим C при помощи квадратуры:
$$C=\int Qe^{-\int Pdx}dx+c$$
Найденное значение C подставим в формулу для y и получаем
$$y=e^{\int Pdx}\left[\int Qe^{-\int Pdx}dx+c\right]$$

или

$$y = ce^{\int Pdx} + e^{\int Pdx}\int Qe^{-\int Pdx}dx, \qquad (2.18)$$ 27eq5

где c — произвольная постоянная. Придавая частные значения c, найдем частные решения неоднородного линейного уравнения. Метод вариации в сущности приводит к преобразованию зависимого переменного: мы вводим новое переменное z, полагая

$$y = ze^{\int Pdx};$$

внося в данное уравнение, получаем преобразованное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = Qe^{-\int Pdx},$$

общее решение которого есть

$$z = \int Qe^{-\int Pdx}dx + c,$$

а следовательно, формула (2.18) дает общее решение первоначального уравнения. В предыдущем изложении z было только обозначено через C.

Мы пришли к следующему виду общего решения дифференциального линейного уравнения:

$$y = C\varphi(x) + \psi(x) \qquad (2.19)$$ 28eq6

где C — произвольная постоянная. Можно доказать обратно, что выражение (2.19) есть общее решение линейного дифференциального уравнения. В самом деле, дифференцируя равенство (2.19)

$$\frac{dy}{dx} = C\varphi'(x) + \psi'(x)$$

и исключая C из двух полученных равенств, имеем

$$\varphi(x)\frac{dy}{dx} - y\varphi'(x) = \varphi\psi' - \psi\varphi'$$

Полученное уравнение есть линейное дифференциальное уравнение.

2.4.3 Нахождение общего решения по заданным частным решениям

Предположим теперь, что мы нашли два частных решения линейного уравнения y_1 и y_2. Докажем, что, зная их, можно найти общее решение без всякого интегрирования. Вводим новую функцию z, полагая

$$y = y_1 + z;$$

подставляя в уравнение (2.15), получаем:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = Py_1 + Q + Pz,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = Pz$$

— однородное уравнение. Для этого однородного уравнения мы знаем частное решение

$$z_1 = y_2 - y_1,$$

которое получится, если положим

$$y = y_2$$

Общее решение однородного уравнения будет по предыдущему

$$z = C(y_2 - y - 1)$$

следовательно,

$$y = y_1 + C(y_2 - y_1).$$

Таково общее решение неоднородного дифференциального уравнения, когда даны два частных решения.

Преобразуя это равенство, имеем еще

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C \tag{2.20}$$

29eq7

При произвольном значении постоянного C равенство (2.20) есть общий интеграл. Если мы y заменим каким-нибудь частным решением y_3, то C примет определенное значение и мы имеем соотношение

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = C$$

между тремя любыми решениями линейного уравнения.

[Заметим, наконец, что] если нам известно только одно частное решение y_1 уравнения (2.15), то полагая

$$y = y_1 + z,$$

получим для z однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = Pz,$$

которое интегрируется одной квадратурой, и следовательно, общее решение данного уравнения (2.15) найдется одной квадратурой.

Пример 2.4.2. Рассмотрим линейное уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x.$$

Интегрируя однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

имеем (см. выше)

$$y = Cx$$

Считая C функцией x и подставляя в данное уравнение, имеем

$$x\frac{dC}{dx} = x, \quad \frac{dC}{dx} = 1, \quad C = x + c$$

и, следовательно,

$$y = x^2 + cx.$$

Полагая $c = 0$ и $c = 1$, имеем два частных решения

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x^2 + x.$$

Если бы мы их знали, то общий интеграл нашли бы непосредственно по формуле (2.20):

$$\frac{y - x^2}{x} = C.$$

2.5 Уравнение Бернулли

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^n,$$

где P и Q — функции x. Это уравнение было предложено Я. Бернулли в 1695, и сведено к линейному уравнению И. Бернулли[4]. Поэтому теперь уравнения такого типа носят название *уравнений Бернулли.*

Сведение к линейному уравнению можно провести так. Умножим все уравнение на y^{-n}, получаем

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = Py^{1-n} + Q$$

Положив

$$y^{1-n} = z$$

и замечая, что

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

представим данное уравнение в виде:

$$Pz + Q = \frac{dz}{dx}\frac{1}{1-n}$$

Для переменной z имеем однородное уравнение.

Пример 2.5.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2y^2;$$

это уравнение Бернулли с $n = 2$. Полагаем

$$y^{-1} = z,$$

[4] Acta Eroditorum, март 1697

делим на y^2:

$$-\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + z^2$$

— линейное уравнение. Интегрируя однородное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x}$$

находим

$$z = Ce^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{C}{x}.$$

Подставляя значение z в прежнее уравнение в предположении, что C — функция x, получаем:

$$-\frac{1}{x}\frac{dC}{dx} = x^2; \quad \frac{dC}{dx} = -x^3; C = -\frac{x^4}{4} + c$$

следовательно,

$$z = -\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}, \quad y = \frac{1}{-\frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}} = \frac{4x}{4c - x^4}.$$

2.6 Уравнение Риккати.

Riccati

Ближайшим за линейным по сложности типом уравнений является уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R, \tag{2.21}$$ 32eq1

где P, Q, R — функции x. Рикати[5] первым начал изучение уравнения, которое, как показал Д. Бернулли[6], сводится к виду

$$y' + ay^2 + bx^m = 0$$

и является, таким образом, частным случаем уравнения (2.21). Поэтому уравнение вида (2.21) называют *уравнениями Риккати.*

Докажем, что уравнения Риккати, как и линейные, сохраняют вид при некоторых преобразованиях:

[5] Jacopo di Rccati, Acta eruditirum, 1723, p. 502-504

[6] Там же, 1725, p. 473-475

1) Любое преобразование аргумента. В самом деле, заменим независимое переменное, полагая

$$x = \varphi(x')$$

Дифференцируем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{dx'}{dx} = \frac{dy}{dx'}\frac{1}{\varphi'(x')}$$

отсюда

$$Py^2 + Qy + R = \frac{dy}{dx'}\frac{1}{\varphi'(x')};$$

или

$$\frac{dy}{dx'} = P\varphi'(x')y^2 + Q\varphi'(x')y + R\varphi'(x')$$

Это уравнение опять имеет вид уравнения Риккати.

2) Дробно-линейные преобразования переменного y. В самом деле, положим y равным дробно-линейному выражению

$$y = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{2.22}$$

32eq2

где $\alpha, \ldots, \delta$ — какие угодно функции x. Отсюда выразим обратно и z через y дробно-линейно:

$$z = -\frac{\delta y + \beta}{\gamma y - \alpha}.$$

Дифференцируя, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\gamma y - \alpha)(\alpha\frac{dz}{dx} + \alpha' z + \beta') - (\alpha z + \beta)(\gamma\frac{dz}{dx} + \gamma' z + \delta')}{(\gamma z + \delta)^2}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{dz}{dx} + a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{(\gamma z + \delta)^2}$$

где a_0, a_1, a_2 составлены из $\alpha, \ldots, \delta$. Приравнивая это выражение правой части данного уравнения Риккати, получим после умножения на $(\gamma z + \delta)^2$, очевидно, соотношение вида

$$\frac{dz}{dx} = pz^2 + qz + r,$$

где p, q, r — функции x. Таким образом, мы получили для z опять уравнение типа Риккати.

Займемся теперь возможными упрощениями уравнения Риккати.

1) Коэффициент P можно сделать какой угодно функцией, в частности равным какому-нибудь постоянному, между прочим равным ± 1. Докажем это. Положим, что

$$y = zw(x)$$

Эта замена является частным случаем дробно-линейного преобразования (2.22). Подставляя выражение y в данное уравнение, имеем

$$w(x)\frac{dz}{dx} + w'(x)z = Pw^2(x)z^2 + Qw(x)z + R,$$
$$\frac{dz}{dx} = Pw(x)z^2 + (Q - \frac{w'}{w})z + \frac{R}{w}.$$

Коэффициент при z^2 можно сделать теперь каким угодно благодаря произвольности функции $w(x)$. Можно в частности положить

$$w(x)P = \pm 1, \quad \text{т.е. } w(x) = \pm\frac{1}{P}.$$

Выбирая $w(x)$ таким, мы в новом уравнении подучим коэффициент при z^2 равным ± 1.

2) Не меняя коэффициента P, можно сделать Q равным нулю. Положим

$$y = z + w(x)$$

и подставим в данное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} + w'(x) = Pz^2 + (2Pw + Q)z + Pw^2 + Qw + R;$$

вычтем из обоих частей по $w'(x)$

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Pw + Q)z + Pw^2 + Qw + R - w'(x).$$

Получаем уравнение Риккати. Коэффициент при z сделаем равным нулю, полагая

$$2Pw(x) + Q = 0.$$

Отсюда
$$w(x) = -\frac{Q}{2P}.$$
Следовательно, полагая y равным
$$y = z + w(x) = z - \frac{Q}{2P},$$
мы достигаем того, что в преобразованном уравнении Q будет нулем. В этом преобразовании мы не изменили величины P. Следовательно, производя одновременно два преобразования, мы приведем уравнение к такому виду
$$\frac{dy}{dx} = y^2 + q \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} + y^2 = q,$$
где q — функция от x.[7]

Для всех предшествующих типов уравнений, мы находили общий интеграл квадратурами; для уравнений Риккати этого вообще сделать нельзя. Докажем теперь такое положение: *зная одно частное решение уравнения Риккати, можно привести его к линейному уравнению и, следовательно, проинтегрировать.* Пусть дано частное решение y_1 уравнения Риккати, полагаем:
$$y = y_1 + z$$
после преобразований, по предыдущему, получим уравнение Риккати
$$\frac{dz}{dx} + \frac{dy_1}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z + Py_1^2 + Qy_1 + R;$$

[7] Последнее уравнение можно легко свести к линейному уравнению второго порядка, общая теория которых будет дана во второй части. В самом деле, положим
$$y = \frac{\theta'}{\theta}$$
(выражение, стоящее справа называют логарифмической производной функции θ), тогда
$$\frac{\theta''}{\theta} - \frac{(\theta')^2}{\theta^2} + \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 = q(x)$$
или
$$\theta'' = q(x)\theta$$
Таким образом, новая переменная θ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

Поскольку
$$\frac{dy_1}{dx} = Py_1^2 + Qy_1 + R,$$
можно произвести сокращение и для z получить уравнение Риккати
$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z;$$
Здесь коэффициент при z^0 равен нулю. Следовательно, здесь мы имеем частный случай уравнения Бернулли: полагаем $z = u^{-1}$ и следовательно
$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$
Тогда, согласно теории уравнений Бернулли, при помощи этой подстановки уравнение Риккати обращается в линейное. Посмотрим какого типа будет общее решение уравнения Риккати. Согласно результатам теории линейных уравнений
$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$
следовательно,
$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{y_1 C\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}$$
Полученное выражение можно написать так:
$$y = \frac{f_1(x)C + f_2(x)}{f_3(x)C + f_4(x)} \tag{2.23}$$ 35eq3

Такого типа будет полученное общее решение уравнения Риккати — оно дробно-линейное относительно произвольного постоянного C.

Докажем теперь обратное положение: *всякое дробно-линейное относительно постоянного выражение есть общее решение уравнения Риккати.*[8] Так как y выражается дробно-линейно через C, то и обратно, C можно

[8] Это утверждение допускает существенное усиление: если общее решение $y = y(x, C)$ дифференциального уравнения
$$y' = f(x, y)$$
где f — рациональная функция y, зависит от C алгебраически, то при помощи алгебраической замены переменного y его можно свести к уравнению Риккати. [Painlevé P. Leçon sur la theorie analytique des equations differentielles. Paris, 1897. = Œvres. T. 1. Paris, 1971]

выразить дробно-линейно через y:

$$C = \frac{\varphi_1(x)y + \varphi_2(x)}{\varphi_3(x)C + \varphi_4(x)}, \tag{2.24}$$ 36eq4

Продифференцируем соотношение (2.24) и отбросим знаменатель, тогда имеем:

$$(\varphi_3 y + \varphi_4)(\varphi_1 \frac{dy}{dx} + \varphi_1' + \varphi_2') - (\varphi_1 y + \varphi_2)(\varphi_3 \frac{dy}{dx} + \varphi_3' y + \varphi_4') = 0$$

Собирая члены с производной, имеем:

$$(\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3)\frac{dy}{dx} + A_0 y^2 + A_1 y + A_2 = 0,$$

где A_0, A_1, A_2 — функции x. Деля все уравнение на коэффициент при y' получаем дифференциальное уравнение типа Риккати.

Пусть известно еще одно частное решение y_2 уравнения Риккати; мы имели

$$y = y_1 + \frac{1}{u},$$

откуда

$$u = \frac{1}{y - y_1}.$$

Подставляя на место y второе решение y_2, находим:

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$$

— частное решение линейного уравнения, а если нам известно еще одно частное решение линейного уравнения, то общее решение найдется одной квадратурой. Итак, зная два частных решения уравнения Риккати, находим общий интеграл одной квадратурой. *Если же даны три частных решения y_1, y_2, y_3 уравнения Риккати, то общее решение найдется без помощи квадратур.*[9] Действительно, имеем:

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

[9]Это обстоятельство было найдено поразительно поздно Э. Вейром в 1875 [Weyr Eduard, Abh. Der böhm. Gesellsch. d. Wissensch. (6), 8 (1875), p. 30] (Л. Шлезингер)

— два частных решения линейного уравнения, зная их, найдем общий интеграл без помощи квадратур. Общий интеграл запишется, как известно, так:

$$\frac{u-u_1}{u_2-u_1}=C.$$

Заменяя u, u_1 и u_2 их выражениями через y, y_1, y_2, y_3, получаем соотношение:

$$\frac{\frac{1}{y-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}}{\frac{1}{y_3-y_1}-\frac{1}{y_2-y_1}}=C$$

Приводя к общему знаменателю, найдем:

$$\frac{(y_2-y)(y_3-y_1)(y_2-y_1)}{(y-y_1)(y_2-y_1)(y_2-y_3)}=C.$$

Преобразуя это соотношение, имеем

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C$$

или

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}:\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=C' \tag{2.25}$$ 37eq5

Выражение, стоящее в левой части, называется ангармоническим отношением четырех элементов y_1, y_2, y, y_3. Таким образом, если y_1, y_2, y_3 — частные решения уравнения Риккати, то его общий интеграл дается формулой (2.25). Придавая C какое-нибудь частное значения, поучаем различные частные решения. Отсюда теорема: ангармоническое отношение четырех решение уравнения Риккати равно постоянному. Это положение можно выразить еще так, полагая $y=y_4$:

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}:\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=\mathrm{Const}. \tag{2.26}$$ 37eq6

Этим заканчивается общая теория уравнений Риккати.

2.6.1 Частное уравнение Риккати

Рассмотрим теперь частный вид уравнений Риккати:

$$y'+ay^2=bx^m,$$

где a и b — постоянные числа. Рассмотрим те случаи, когда данный частный тип уравнения Риккати интегрируется в квадратурах.

1) Полагая $m = 0$, мы переменные сразу разделяем

$$y' + ay^2 = b;\ \frac{dy}{dx} = b - ay^2,\ \frac{dy}{b - ay^2} = dx.$$

Найдем решение:

$$\int \frac{dy}{b - ay^2} = x + C;$$

интеграл в левой части выражается или логарифмом или arctg в зависимости от значений постоянных a и b.

2) Второй частный случай будет при $m = -2$. В этом случае не трудно будет указать частное решение, зная которое мы легко придем, как мы видели раньше, к общему решению при помощи двух квадратур. Заменяем y через $\frac{y}{k}$, дифференцируем это выражение и подставляем в дифференциальное уравнение:

$$\frac{-k}{x^2} + \frac{ak^2}{x^2} = \frac{b}{x^2}.$$

Сокращаем на x^2, получаем:

$$-k + ak^2 = b,$$

то есть квадратное уравнение для k, из которого определим два корня k_1 и k_2. Если они различны, то решения

$$y_1 = \frac{k_1}{x} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{k_2}{x}$$

различны и общее решение можно найти одной квадратурой. Если корни одинаковы $k_1 = k_2$, имеем одно частное решение уравнения Риккати и при помощи двух квадратур можем найти его общий интеграл.

Возвращаясь к общему случаю, введем новую функцию $\tilde{y}$, полагая

$$y = \alpha\tilde{y} + \beta,$$

где α и β — функции от x. Подберем α и β так, чтобы в преобразованное уравнение не входило $\tilde{y}$ в первой степени:

$$\alpha\tilde{y}' + a\alpha^2\tilde{y}^2 + (\alpha' + 2a\alpha\beta)\tilde{y} = bx^m - \beta' - a\beta^2. \tag{2.27}$$

39eq7

Первое требование, чтобы не входило $\tilde{y}$ в первой степени, дает

$$\alpha' + 2a\alpha\beta = 0.$$

Кроме того, потребуем, чтобы правая часть не изменилась; для этого достаточно:

$$\beta' + a\beta^2 = 0 \qquad -\frac{d\beta}{dx} = \alpha\beta^2$$
$$-\frac{d\beta}{\beta^2} = adx,\ \frac{1}{\beta} = ax,\ \beta = \frac{1}{ax}$$

Произвольное постоянное интеграции полагаем равным нулю, потому что ищется какое-нибудь β. Находим теперь α:

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{2dx}{x}, \quad \ln\alpha = -2\ln x + C$$

Полагая также, как и выше, $C = 0$, имеем

$$\alpha = \frac{1}{x^2}.$$

Подстановка наша такова:

$$y = \alpha\tilde{y} + \beta = \frac{1}{x^2}\tilde{y} + \frac{1}{ax}.$$

Выполняем подстановку, делим на α и преобразуем уравнение (2.27), получаем:

$$\tilde{y}' + \frac{a}{x^2}\tilde{y}^2 = bx^{m+2}. \tag{2.28}$$

39eq8

Это преобразованное уравнение — уравнение Риккати, но не того типа, который мы рассматривали, так как коэффициент при $\tilde{y}$ — не постоянное число, как имели раньше, но содержит x. Произведем еще линейную подстановку:

$$\tilde{y} = y_1;$$

имеем:

$$y_1' - \frac{a}{x^2} = -bx^{m+2}y_1^2$$

Это — опять уравнение Риккати, но не того вида. Совершаем дальнейшее преобразование так, чтобы коэффициент при y_1^2 стал числом постоянным. Делим все уравнение на x^{m+2}:

$$\frac{dy_1}{x^{m+2}dx} + by_1^2 = ax^{-(m+4)}$$

Переменное нужно ввести так, чтобы $x^{m+2}dx$ стало дифференциалом нового переменного:

$$x_1 = x^{m+3}, \quad x = x_1^{\frac{1}{m+3}}$$

Тогда преобразованное уравнение будет иметь вид:

$$(m+3)\frac{dy_1}{dx_1} + by_1^2 = ax_1^{-\frac{m+4}{m+3}}.$$

Делим все на $m+3$:

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{b}{m+3}y_1^2 = \frac{a}{m+3}x_1^{-\frac{m+4}{m+3}}.$$

Это уравнение Риккати рассмотренного типа. Его отличие от первоначального состоит только в изменении коэффициентов

$$a_1 = \frac{b}{m+3}, \quad b_1 = \frac{a}{m+3}$$

и показателя

$$m_1 = -\frac{m+4}{m+3}.$$

Постоянные коэффициенты в уравнении не имеют значения, но формула, выражающая связь между показателями m и m_1 данного и преобразованного уравнений, имеет важное значение. Выразим эту связь в удобной форме; для этого прибавим к m_1 число 2:

$$m_1 + 2 = \frac{m+2}{m+3},$$

обращаем дробь

$$\frac{1}{m_1+2} = \frac{m+3}{m+2}, \quad \frac{1}{m_1+2} = 1 + \frac{1}{m+2}.$$

Дроби $(m_1+2)^{-1}$ и $(m+2)^{-1}$ разнятся только на 1. Предположим, что к новому уравнению применяем такое же преобразование и поступаем так несколько раз; получаем целый ряд равенств:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m_1+2} = 1 + \frac{1}{m+2}\\
&\frac{1}{m_2+2} = 1 + \frac{1}{m_1+2}\\
&\dots\\
&\frac{1}{m_i+2} = 1 + \frac{1}{m_{i-1}+2}
\end{aligned}
$$

Складывая почленно, имеем:

$$\frac{1}{m_i+2} = i + \frac{1}{m+2} \tag{2.29}$$

41eq9

Такова будет связь между показателями первого и последнего уравнений. Положим, что последнее i-ое уравнение оказалось интегрируемым в квадратурах. Выше мы имели два случая, когда последнее можно выполнить.

Допусти, что наши преобразования привели уравнение к одному из этих случаев. Начнем со второго, то есть мы предполагаем, что в результате i преобразований мы получили $m_i = -2$. Посмотрим, в каком случае мы можем придти к такому концу. Подставим это значение m_i в наше соотношение (2.29), тогда в левой части получится ∞, поэтому и в правой должно быть ∞. Таким образом, m_i оказалось бы равным -2 только в том случае, если бы $m = 2$, то есть мы с помощью преобразований не изменили m. Итак, в этом случае преобразование не дает ничего нового.

Обращаемся теперь к первому случаю; положим, что после i преобразований показатель m_i оказался равным нулю, то есть $m_i = 0$. Подставляя это выражение в нашу формулу, вычислим m:

$$\frac{1}{m+2} = \frac{1}{2} - i = \frac{1-2i}{2}; \quad m+2 = \frac{2}{1-2i} = -\frac{2}{2i-1}$$

откуда

$$m = -\frac{4i}{2i-1}.$$

Итак, мы имеем равенство для определения показателя m, при котором после i преобразований получается уравнение, в котором показатель при x $m_i = 0$. В этой формуле i — какое угодно целое положительное число, указывающее сколько раз нужно сделать преобразование, чтобы получить показатель $m_i = 0$. Например, если $i = 1$, то $m = -4$, то есть при таком показателе после применения одного преобразования получается уравнение с показателем равным нулю; при $i = 2$ показатель $m = -\frac{8}{3}$, при $i = 3$ — $m = -\frac{12}{5}$ и т.д.

Мы совершили ряд преобразований с целью изменения показателя m на m_i. Мы можем обратно совершить переход от уравнения с показателем m_i к уравнению с показателем m. Для этого нам стоит только ввести прежние обозначения, но в обратном порядке. Если для данного уравнения сохранить обозначения a, b, m, а для преобразованного — a_i, b_i, m_i, то прежняя связь между показателями (2.29) останется в силе, только обменяются местами m и m_i; получим:

$$\frac{1}{m+2} = i + \frac{1}{m_i+2}, \quad \frac{1}{m_i+2} = \frac{1}{m+2} - i, \tag{2.30}$$

42eq10

то есть дробь правой части уменьшается на i единиц, а не увеличивается как раньше. Положим, что после i преобразований, мы получили $m_i = 0$. Тогда формула для m такова:

$$m = \frac{-4i}{2i+1}$$

Вот, следовательно, другая формула, которая дает те значения для m, при которых уравнение интегрируется. Мы можем соединить две формулы в одну и написать

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1} \tag{2.31}$$

42eq11

Общий интеграл для этих значений m будет выражаться в элементарных функциях. Действительно, наши преобразования не вводили трансцендентных функций, в результате же преобразований мы получили уравнение, в котором m_i, а общий интеграл такого уравнения, как мы видели выше, выражается через логарифм или арктангенс.

Замечание (Ватсон Г.Н.). Затруднения, связанные с интегрированием уравнения Риккати, послужили поводом для сомнений в возможности сведения любого дифференциального уравнения к квадратурам и подтолкнуло к поиску новых способов интегрирования уравнений без привлечения квадратур. Так в случае $n = 2$ Яков Бернулли нашел решение в виде отношения двух степенных рядов, а чуть позже Иоганн Бернулли предпринял первую попытку доказать существование решения любого дифференциального уравнения, независящее от возможности сведения уравнения к квадратурам. Вероятно, сама идея о том, что всякое дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах, была отброшена раньше, чем невозможность сведения уравнения Риккати к квадратурам была строго доказана Лиувилем (Liouville, Joseph) в 1841 г.[10]

2.7 Теория интегрирующего множителя.

Часто оказывается, что решение уравнения

$$M dx + N dy = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.32}$$ 43eq1

где M, N и f — функции x и y, можно представить в неявном виде как

$$u(x, y) = C$$

при помощи весьма простых функций, но при этом сама неявная функция $y(x, C)$ зависит от x весьма не просто (к примеру является многозначной и не определенной при некоторых x, в то время как $u(x, y)$ — рациональная функция). Поэтому часто прибегают к способу непосредственного нахождения интеграла $u(x, y) = C$.

Будем считать, что исходное уравнение допускает интеграл вида $u(x, y) = C$, где $u(x, y)$ дифференцируемая функция и в окрестности почти любой точки (x_0, y_0) можно указать решение $y = y(x)$ уравнения

[10] Доказательство теоремы Лиувиля, как и исторические подробности, можно найти в трактате «Бесселевы функции» Г.Н. Ватсона.

$u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Тогда, поскольку $y = y(x)$ должно быть и частным решением (2.32), верно

$$0 = \frac{du(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} f(x, y)\Big|_{y=y(x)}$$

Это соотношение в верно, стало быть, почти при всех $x = x_0$, $y = y_0$, а, стало быть, и при всех. Опуская индекс 0, видим, что общее решение $u(x, y) = C$ неизбежно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} f(x, y) = 0. \tag{2.33}$$

20_02_0

Наоборот, если некоторая функция $u(x, y)$ удовлетворяет этому уравнению, то для любого решения $y = y(x)$ уравнения (2.32)

$$\frac{du(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} f(x, y)\Big|_{y=y(x)} = 0$$

то есть любое решение уравнения (2.32) удовлетворяет уравнению $u(x, y(x)) = C$ и для любого решения $y = y(x)$ уравнения $u(x, y) = C$ верно

$$0 = \frac{du(x, y(x))}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy(x)}{dx}\Big|_{y=y(x)} = 0$$

то есть любое решение уравнения $u(x, y(x)) = C$ удовлетворяет уравнению (2.32). Это значит, что $u(x, y) = C$ — общий интеграл (2.32).

Начнем с того частного случая, когда функции M, N представимы в виде

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y},$$

где u — некоторая функция x, y, тогда для нее выполняется соотношение (2.33)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{M}{N} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

и поэтому общий интеграл уравнения есть $u(x, y) = C$.

Пример 2.7.1. Пусть мы имеем:

$$xdy + ydx = 0; \quad M = \frac{\partial xy}{\partial x}, \ N = \frac{\partial xy}{\partial y},$$

следовательно, $u = xy$ и уравнение перепишется в виде

$$d(xy) = 0.$$

Общий интеграл

$$xy = C, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{C}{x}.$$

Посмотрим теперь, когда наше уравнение будет уравнением указанного типа, то есть когда левая часть уравнения будет дифференциалом функции двух переменных. Очевидно, что в этом случае должны быть равны производные:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.34}$$

44eq2

так как если

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ то } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

и обратно, M будет производной некоторой функции u по x, а N — u по y, если существует равенство (2.34).[11] Таким образом, если условие (2.34) выполнено, то левая часть (2.32) — дифференциал и уравнение интегрируется квадратурами.

В общем случае условие (2.34) не выполняется. Посмотрим, нельзя ли и в этом случае заменить данное уравнение другим ему равносильным, но для которого бы условие (2.34) выполнялось. Для этого умножим его на некоторый множитель μ (где μ — функция x, y)

$$\mu N dx + \mu N dy = 0$$

[11] В этом случае криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x,\, y)} M dx + N dy$$

не зависит от пути интегрирования, но только от точек (x_0, y_0) и (x, y). Поэтому зафиксировав значения $(x_0,\, y_0)$, мы можем рассматривать этот интеграл как однозначную функцию u переменных x и y. Непосредственно проверяется, что при так определенной u верны соотношения

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Это обстоятельство впервые было отмечено в работе Клеро [Mém Ac. Paris, (1740) 1742].

Полученное уравнение будет равносильно данному, так как общий интеграл последнего уравнения будет удовлетворять и первоначальному, равенство же $\mu = 0$ может дать только частный интеграл. Положим, что μ выбрано так, что для преобразованного уравнения выполняется условие (2.34), то есть

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}. \tag{2.35}$$ 20_02_0

Тогда левая часть преобразованного уравнения будет дифференциалом и уравнение интегрируется квадратурами. Этот множитель μ и есть так называемый *интегрирующий множитель.*

Замечание. В отдельных случаях, интегрирующим множителем пользовался еще И. Бернулли в своих «Математических лекциях о методе интегралов и ...» (1691- 1692). Систематическую разработку метода интегрирующего множителя предприняли Эйлер и Клеро, подробное изложение этого метода дано в «Интегральном исчислении» Эйлера. Обобщение теории интегрирующего множителя на случай системы дифференциальных уравнений дано Якоби в «Аналитической динамике» (1842), современное изложение вопроса и дальнейшие обобщения даны в «Интегральных инвариантах» Э. Картана.

Докажем, что *для каждого дифференциального уравнения, имеющего общий интеграл вида*

$$u(x, y) = C, \tag{2.36}$$ 45eq3

существует интегрирующий множитель. Пусть $y = y(x, C)$ — решение (2.36), тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

во всякой точке $(x, y(x, C))$, а, следовательно, и при всех (x, y). Определив производную и подставив ее в данное дифференциальное уравнение, мы должны удовлетворить последнему, то есть должны иметь:

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{M}{N}$$

или

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}.$$

Обозначим ее через $\mu(x, y)$, тогда мы утверждаем, что μ и есть интегрирующий множитель. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N.$$

Заменяя данное дифференциальное уравнение другим, полученным из него путем умножения на μ, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0,$$

следовательно, μ — интегрирующий множитель. Итак, мы доказали, что существует интегрирующий множитель.

Пример 2.7.2.

$$ydx - xdy = 0$$

Условие (2.34) здесь не выполняется, поскольку соответствующие производные коэффициентов при дифференциалах не равны между собой:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Мы должны найти интегрирующий множитель, на него умножить обе части уравнения. В данном случае это множитель есть $\mu = x^{-2}$;

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

Найдя интегрирующий множитель, мы нашли общий интеграл; им будет

$$\frac{y}{x} = C.$$

Отметим теперь, что если $u(x, y) = C$ — интеграл (2.32), то и $\Phi(u(x, y)) = C$ при любой функции $\Phi(u)$ является интегралом того же уравнения, то есть *данное уравнение имеет бесчисленное число различных интегралов* вида $u(x, y) = C$. Более того, если μ — множитель, соответствующий интегралу $u(x, y) = C$, то есть

$$\mu M dx + \mu N dy = du.$$

то интегрирующим множителем будет также $\mu_1 = \mu f(u)$, где $f(u)$ — какая угодно функция u. Чтобы доказать это положение, мы перепишем выражение для нового множителя так:

$$\mu_1 = \mu \varphi'(u)$$

где $\varphi'(u)$ — производная новой функции $\varphi(u)$, которую мы найдем, зная $f(u)$, следующим образом

$$\varphi(u) = \int f(u) du.$$

Докажем, что μ_1 — интегрирующий множитель. Умножив на него данное уравнение, мы получим:

$$\mu_1(M dx + N dy) = \varphi'(u)\mu(M dx + N dy) = \varphi'(u) du = d\varphi(u);$$

следовательно, μ_1 — действительно интегрирующий множитель.

Пример 2.7.3. Положим, что мы имеем уравнение

$$y dx - x dy = 0;$$

как мы видели, интегрирующий множитель $\mu = x^{-2}$. После умножения на него уравнение принимает вид

$$\frac{y dx - x dy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

Вместо множителя μ мы можем взять новый множитель μ_1, полученный и первоначального умножение его на произвольную функцию u (в данном случае $u = \frac{y}{x}$), например, на $\frac{y}{x}$; тогда мы берем

$$\mu_1 = \frac{1}{x^2}\frac{x}{y} = \frac{1}{xy}.$$

По умножении на μ_1 мы придем к желанному результату. Действительно, мы будем иметь:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = d(\ln x - \ln y).$$

Докажем теперь обратно, что *если* $u(x,y) = C$ *и* $v(x,y) = C$ *— два интеграла* (2.32), *то они функционально связаны* $v(x,y) = \Phi(u(x,y))$, *а отношение соответствующих им множителей*

$$\mu(Mdx + Ndy) = du, \tag{2.37}$$ 48eq4

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = dv. \tag{2.38}$$ 48eq5

есть снова интеграл (2.32). В самом деле, из последних равенств следует тождество:

$$\frac{1}{\mu}du = \frac{1}{\mu_1}dv \quad \text{или} \quad \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Коэффициенты при dx и dy слева и справа должны быть равны, то есть мы должны иметь

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial v}{\partial y}$$

откуда

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

или в виде равенства нуля определителя Якоби

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство его нулю показывает, что между u и v есть соотношение, то есть что v есть функция от одной u, итак

$$v = \varphi(u).$$

Раз мы доказали, что $v = \varphi(u)$, то имеем

$$dv = \varphi'(u)du$$

и, деля равенство (2.38) на (2.37), будем иметь:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(u)$$

Таким образом, наша теорема доказана.

Отсюда вытекает важное следствие: *приравняв отношение двух интегрирующих множителей произвольному постоянному, мы получим общий интеграл.* В нашем примере мы нашли $\mu = x^{-2}$ и $\mu_1 = (xy)^{-1}$; разделив второе на первое, найдем $\frac{x}{y} = C$.

Для нахождения интегрирующего множителя для данного дифференциального уравнения нужно найти какое-нибудь решение уравнения (2.35), которое можно записать как

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

или в раскрытой форме

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

или, наконец, в форме

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{2.39}$$

49eqI

Здесь M и N — данные функции x, y, а μ — неизвестная функция. Разделим его на μ,тогда получим:

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{2.40}$$

50eqI'

Здесь за неизвестную функцию можно считать $\ln \mu$, при чем в уравнение (2.40) также входят частные производные этой функции, и с этой стороны дело не упростилось. Вообще говоря, для определения интегрирующего множителя мы получили дифференциальное уравнение с частными производными, то есть изыскание его приводить к задаче более сложной, чем задача интегрирования данного дифференциального уравнения. Однако теперь нам нужно найти частное решение.

Часто удобно пользоваться интегрирующим множителем для того, чтобы не вводить лишних трансцендентных функций в чисто алгебраических задачах. К примеру, И. Бернулли в своих «Математических лекциях о методе интегралов» (1691- 1692) уравнение

$$nxdy - ydx = 0$$

интегрирует путем умножения на множитель y^{n-1}/x^2 и получает

$$d(y^n/x) = 0, \quad \text{или} \quad y^n = Cx.$$

Непосредственного разделения переменных Бернулли здесь избегает, поскольку оно вводи логарифмы:

$$\int \frac{ndy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C$$

или

$$n \ln y = \ln x + C.$$

Можно обратно дать функцию μ (или указать только ее вид), а затем смотреть, каким условиям должны удовлетворять M и N, чтобы уравнение (2.32) допускало μ в качестве интегрирующего множителя. При этом, следовательно, мы будем искать те уравнения, которые имеют интегрирующий множитель данного вида. Посмотрим, как это можно сделать. Очевидно, мы должны данное нам μ подставить в уравнение (2.40), а затем найти такие M и N, для которых это уравнение бы удовлетворялось.

Пусть, например, множитель μ зависит только от x, а от y-ка не зависит, то есть

$$\mu = f(x).$$

Тогда

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0;$$

частная же производная

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \varphi(x)$$

будет функцией только x-а. Подставляя в уравнение (2.40), получим:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x) \tag{2.41}$$ 51eq6

Для того чтобы дифференциальное уравнение допускало интегрирующий множитель μ, независящий от y, необходимо и достаточно, чтобы левая часть (2.41) была функцией только x. Действительно, в этом случае имеем

$$\varphi(x) = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}; \quad \ln \mu = \int \varphi(x) dx,$$

откуда

$$\mu = e^{\int \varphi(x) dx},$$

то есть функция только x-а. Между M и N получилось только одно соотношение (2.41), следовательно, одно из них M или N может быть взять произвольно. Мы имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} + N\varphi(x).$$

Придадим N какое либо значение, тогда

$$M = \int \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} + N\varphi(x) \right\}$$

Меняя вид N, мы будем получать различные функции M и следовательно различные уравнение (2.32).

Ограничимся частным случаем, когда коэффициент N при дифференциале dy равен 1, а к такому виду всегда можно привести каждое дифференциальное уравнение, деля его на N. Полагая $N = 1$, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \varphi(x)$$

Отсюда

$$M = \varphi(x) y + \psi(x).$$

Для уравнения с такими M и N существует интегрирующий множитель, зависящий только от x. Посмотрим, какое получится тогда дифференциальное уравнение. Легко видеть, что оно будет линейное, на самом деле

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x) y + \psi(x) = 0,$$

или, изменяя обозначения,

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0.$$

Соответствующий интегрирующий множитель равен $\mu = e^{\int P(x)dx}$. Мы получили новый метод интеграции линейного уравнения. Применим его к какому-нибудь линейному дифференциальному уравнению.

Пример 2.7.4.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + 2x^2 = 0.$$

Так как в этом соотношении коэффициент P равен x^{-1}, то интегрирующий множитель равен

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}};$$

постоянное интегрирования можно взять какое угодно, а поэтому возьмем просто

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

Тогда $\mu = x$. Умножая на этот множитель данное уравнение, тогда:

$$xdy + (y + 2x^3)dx = 0.$$

Левая часть, как следует из общей теории, есть полный дифференциал некоторой функции. Ее найдем двумя квадратурами. Интегрируя коэффициент при dy по y, найдем функцию

$$u = xy + F(x),$$

где $F(x)$ — постоянная интегрирования. $F(x)$ надо выбрать так, чтобы производная u по x равнялась бы коэффициенту при dx. Дифференцируем и приравниваем, тогда

$$y + F'(x) = y + 2x^3.$$

Функцию $F(x)$ найдем квадратурой. Таким образом, мы найдем и u. Приравняв его C, получим общий интеграл данного уравнения

$$xy + \frac{x^4}{2} = C.$$

Рассмотрим теперь однородное уравнение, то есть предположим, что M и N однородные функции измерения m. Тогда функции M и N можно представить в виде произведения x^m на некоторые функции отношения $\frac{y}{x}$. Сделаем $N = 1$, для чего разделим уравнение на N или иначе разрешим его относительно $\frac{dy}{dx}$; тогда будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

x^m сократится. Итак, вместо начального уравнения будем иметь уравнение

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0.$$

Для уравнения в этой форме будем подыскивать интегрирующий множитель. Чтобы получить его, мы должны подставить соответствующие коэффициенты M и N в (2.40):

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Вот такое уравнение получается для определения $\ln\mu$. Можно утверждать, что этому уравнению удовлетворяет однородная функция μ, то есть удовлетворяет функция вида

$$\mu = x^\sigma\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

где σ — измерение функции μ. Прологарифмировав, имеем

$$\ln\mu = \sigma\ln x + \ln\psi.$$

Обозначим для краткости $\ln\psi$ через $w\left(\frac{y}{x}\right)$, то есть пусть

$$\ln\psi = w\left(\frac{y}{x}\right).$$

Взяв частные производные от $\ln\mu$ по x и y, подставим их в уравнение (2.40):

$$\frac{\sigma}{x} - w'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2} - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)w'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Умножим последнее равенство на x и соберем 2-ой и 3-ий члены вместе

$$\sigma - w'\left(\frac{y}{x}\right)\left\{\frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для определения w получим

$$w'\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sigma-\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Наша задача решена. Действительно, справа стоит некоторая функция отношения $\frac{y}{x}$. Если для краткости назовем его через t, то есть положим $\frac{y}{x}=t$, то будем иметь

$$w'(t)=\frac{\sigma-\varphi'(t)}{t+\varphi(t)}$$

и квадратурой найдем функцию w. При чем, так как σ — произвольное число, то мы можем выбрать его так, чтобы удобнее было взять квадратуру. Возьмем $\sigma=-1$, тогда числитель будет производной знаменателя, только взятый с обратным знаком, и следовательно

$$w(t)=\ln\psi=-\ln t+\varphi(t)$$

(постоянное интегрирования берем равным нулю, так как важно знать только какое-нибудь значение w). Отсюда

$$\psi=\frac{1}{t+\varphi(t)}.$$

Итак,

$$\mu=\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{y}{x}+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{1}{y+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Вот один из интегрирующих множителей нашего уравнения. В данном случае μ — однородная функция измерения -1.

Это μ является интегрирующим множителем для уравнения, в котором $N=1$. Посмотрим, каков этот множитель будет для первоначального уравнения. Очевидно, что для того, чтобы привести уравнение к рассматриваемому виду, надо разделить его на N или умножить на N^{-1}; а затем его придется умножить на μ [чтобы превратить в полный дифференциал]. Короче, интегрирующий множитель для первоначального уравнения будет

$$\mu_1=\frac{\mu}{N}=\frac{1}{Ny+xM}$$

так как
$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{M}{N};$$
таким образом, для однородного уравнения интегрирующий множитель равен
$$\mu_1 = \frac{1}{Ny + xM} \tag{2.42}$$ 55eqB

и мы получили новый метод интегрирования однородного уравнения.

Пример 2.7.5. Дано дифференциальное уравнение
$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$$
Это — однородное уравнение 2-го измерения. Его интегрирующий множитель будет равен
$$\frac{1}{(x^2 + y^2)x - xy^2} = \frac{1}{x^3}.$$
Значит, данное уравнение надо умножить на x^{-3} и тогда левая часть будет полным дифференциалом. Умножаем:
$$\frac{x^2 + y^2}{x^3}dx - \frac{y}{x^2}dy = 0.$$
Квадратурами находим u. Проинтегрировав 2-ой коэффициент по y, будем иметь
$$-\frac{y^2}{2x^2} + F(x).$$
Надо найти $F(x)$; для этого предыдущее выражение продифференцируем по x, приравняем 1-му коэффициенту, получаем
$$\frac{y^2}{x^3} + F'(x) = \frac{x^2 + y^2}{x^3}$$
или по сокращении $F'(x) = \frac{1}{x}$. Отсюда
$$F(x) = \ln x.$$
Итак, общий интеграл данного уравнения есть
$$-\frac{y^2}{2x^2} + \ln x = C.$$

2.8 Дифференциальные уравнения первого порядка степени выше первой относительно производной.

До сих пор мы рассматривали уравнения, которые были разрешены относительно производной. Теперь же рассмотрим такие дифференциальные уравнения, которые даны в общем виде

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0. \tag{2.43}$$

56eq1

разрешая уравнение (2.43) относительно производной, приходим к одному или нескольким уравнениям рассмотренного выше типа

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Предположим в частности, что уравнение (2.43) — алгебраическое относительно y', скажем n-ой степени, и следовательно имеет вид

$$y'^{\,n} + A_1 y'^{\,n-1} + A_2 y'^{\,n-2} + \cdots + A_n = 0, \tag{2.44}$$

56eq2

где A_1, $A_2, \ldots, A_n$ — функции x и y; мы можем предположить еще, что коэффициенты — рациональные функции или по крайней мере однозначные функции x и y.[12]

Разрешая уравнение (2.44), получаем n значений для производной y' и следовательно n различных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = f_i(x, y) \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{2.45}$$

56eq3

Для каждого из этих уравнений существует свой общий интеграл

$$\Phi_i(x, y, C) = 0 \tag{2.46}$$

56eq4

и возникает вопрос, как, зная их, определить общий интеграл данного уравнения (2.44); то есть такое соотношение между x, y, C, которому бы удовлетворяло при некотором значении C каждое частное решение уравнения (2.45) при любом значении i.

[12] Рассмотрение дифференциальных уравнений, в которые y и ее производные входят алгебраически, составляет предмет аналитической теории дифференциальных уравнений. См., напр., «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений» В.В. Голубева.

2.8.1 Неприводимость уравнения

Для разрешения этого вопроса надо предварительно установить понятие о неприводимости уравнения вида (2.44). Уравнение (2.44) называется НЕПРИВОДИМЫМ, если левую часть его нельзя разложить на множители того же вида, как и сама левая часть этого уравнения, то есть без введения иррациональности относительно x и y. В противном случае уравнение называется приводимым и его можно заменить рядом неприводимых уравнений, разбивая левую часть на неприводимые факторы. Так, уравнение

$$y'^{\,2} - \frac{y}{x} = 0 \tag{2.47}$$

57eq5

неприводимо, ибо левую часть правда можно представить в виде произведения линейных относительно y' множителей, как это всегда имеет место:

$$(y' - \sqrt{\frac{y}{x}})(y' + \sqrt{\frac{y}{x}}) = 0,$$

но множители эти иррациональны относительно x и y. Наоборот, уравнение

$$y'^{\,2} - (x + y^2)y' + xy^2 = 0 \tag{2.48}$$

57eq6

приводимо, ибо представимо в виде

$$(y' - x)(y' - y^2) = 0$$

и распадается на два неприводимых уравнения

$$y' = x \quad \text{и} \quad y' = y^2 \tag{2.49}$$

57eq7

Если уравнение (2.44) неприводимо, то правые части уравнений (2.45) зависят от одной иррациональности и следовательно от одного уравнения (2.45) к другому переходим простым изменением иррациональности. Так для уравнения (2.47) уравнения (2.45) будут

$$y' = +\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{и} \quad y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}, \tag{2.50}$$

57eq8

и от одного переходим к другому, меняя знак перед квадратным радикалом. Очевидно, что и от общего интеграла (2.46) к другому можем переходить сходным образом, так как вид каждого интеграла должен зависит от иррациональности, и общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.51}$$ 58eq9

уравнения (2.44) получим, исключая иррациональность (радикалы или высшие иррациональности, если $n \geq 5$) из уравнения (2.46). Так, для первого и уравнение (2.50) общий интеграл имеет вид

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + C,$$

исключаем иррациональность: возводим в квадрат, имеем

$$y = x + C^2 + 2C\sqrt{x},$$

откуда, по перенесении членов и возведении в квадрат, получаем общий интеграл

$$(y - x - C^2) = 4C^2x \tag{2.52}$$ 58eq10

уравнения (2.47), так как соотношение (2.52), очевидно, имеет место для обоих значений квадратного корня в уравнениях (2.50).

Наоборот, если уравнение (2.44) приводимо, то нельзя от одного из уравнений (2.45) перейти ко всем остальным, изменяя только иррациональность. Так, уравнения (2.49), полученные для уравнения (2.48), совершенно независимы друг от друга и их общее интегралы

$$y = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{C - x} \tag{2.53}$$ 58eq11

тоже не имеют ни какой связи между собой. — В случае приводимости уравнения (2.44) разбиваем его левую часть на неприводимые множители и для каждого неприводимого уравнения, получаемого приравниванием нулю одного из этих множителей, находим общий интеграл по предыдущему. Получаем ряд таких интегралов:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0,\ \Phi_2(x, y, C) = 0, \ldots, \Phi_s(x, y, C) = 0. \tag{2.54}$$ 59eq12

Общий интеграл уравнения (2.44) получим, перемножая равенства (2.54):

$$\Phi_1(x,y,C)\Phi_2(x,y,C)\ldots\Phi_s(x,y,C)=0. \tag{2.55}$$

59eq13

Действительно, соотношение(2.54) имеет место при любом из значений производной y', получаемых из (2.44). Для уравнения (2.48), имея в виду равенства (2.53), получаем общий интеграл в виде

$$(y-\frac{x^2}{2}-C)(y-\frac{1}{C-x})=0$$

или, после упрощений:

$$(C-x)y^2-y[1+(C-x)(\frac{x^2}{2}+C)]+\frac{x^2}{2}+C=0 \tag{2.56}$$

59eq14

Пример 2.8.1. Приведем еще один пример.

$$y'^{\,4}-(x+y)y'^{\,2}+xy=0$$

или

$$(y'^{\,2}-x)(y'^{\,2}-y)=0$$

Уравнение распадается на два

$$y'^{\,2}=x \quad \text{и} \quad y'^{\,2}=y. \tag{2.57}$$

59eq1-2

Оба уравнения рациональны и совершенно независимы друг от друга. Каждое из них в свою очередь распадается на два, а именно

$$y'=\pm\sqrt{x} \quad \text{и} \quad y'=\pm\sqrt{y}.$$

Уравнения (2.57) неприводимы. Интегрируем уравнения

$$y'=\sqrt{x} \quad \text{и} \quad y'=\sqrt{y}.$$

Получаем

$$y=\frac{2}{3}x^{3/2}+C$$

для первого уравнения, и

$$2\sqrt{y}=x+C$$

— для второго. Общие интегралы уравнений (2.57) найдем, исключая иррациональность двух найденных интегралов:

$$(y - C)^2 = \frac{4}{9}x^3$$

для первого уравнения, и

$$4y = (x + C)^2$$

для второго. Общим интегралом данного уравнения будет

$$[(y - C)^2 - \frac{4}{9}x^3][4y - (x + C)^2] = 0.$$

Обращаясь к непосредственному рассмотрению уравнения (2.43) независимо от приведения его к ряду уравнений (2.45), начнем с частных случаев, когда отсутствует один из трех аргументов, то есть когда уравнение имеет вид 1) $F(y, y') = 0$ или 2) $F(x, y') = 0$.

2.8.2 Уравнение вида $F(y, y') = 0$

Начнем с первого случая. Если бы уравнение

$$F(y, y') = 0 \tag{2.58}$$ 60eqI

можно было разрешить относительно производной, то переменные разделились бы и мы могли бы уравнения проинтегрировать квадратурой. Если оно не разрешимо относительно y', то оно может быть первой степени относительно y или вообще допускать удобное разрешение относительно y. Пусть данное уравнение разрешено относительно y и имеет вид:

$$y = f(y');$$

введем переменное p, обозначив производную y' через p, то есть полагая $y' = p$, тогда последнее уравнение перепишется так:

$$y = f(p) \tag{2.59}$$ 60eq15

Наша цель — найти общий интеграл, то есть мы хотим найти соотношение между x, y, C. Можно также найти выражение x и y через один какой-нибудь параметр, а затем исключить его. Если мы примем p за такой параметр, то y уже выражено как его функция. Остается выразить x. Мы имеем

$$y' = p = \frac{dy}{dx}, \quad dy = pdx, \quad dx = \frac{dy}{p}.$$

а с другой стороны

$$y = f(p), \quad dy = f'(p)dp.$$

Итак,

$$dx = \frac{f'(p)dp}{p}$$

и квадратурой находим

$$x = \int \frac{f'(p)dp}{p} + C. \tag{2.60}$$

61eq16

Таким образом, x и y выражены как функции вспомогательного параметра p. Если мы исключим p, то есть y', то получим уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

то есть общий интеграл. Если исключения не выполнять, то равенства (2.59)-(2.60) заменяют общий интеграл.[13] Метод, примененный нами здесь, есть в сущности метод преобразования переменных. Мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{f'(p)}$$

[13]Вообще говоря, очевидно только, что это выражение — интеграл нашего уравнения, зависящий от одной произвольной константы. Для доказательства того, что он — общий, следует только показать, что из равенства $\Phi(x, y, C) = 0$ или

$$x = \int \frac{f'(p)dp}{p} + C, \quad y = f(p)$$

после исключения p и C, получается дифференциальное уравнение $y = f(y')$. Но это действительно так, поскольку дифференцируя оба соотношения и деля второе на первое имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(p)p}{f'(p)} = p$$

и в силу второго соотношения $y = f(y')$.

а к такому уравнению мы придем от нашего, если введем новое переменное, полагая $y' = p$.

Рассмотрим более общий случай уравнения (2.58), предполагая, что уравнение

$$F(y, y') = 0$$

не разрешимо ни относительно y, ни относительно y, но y и y' могут быть выражены как функции некоторого параметра t, то есть его можно заменить двумя уравнениями

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \tag{2.61}$$

61eq17

так, что исключая из них t, придем опять к данному уравнению. Выразим y и x как функции параметра t.

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad dx = \frac{dy}{y'}, \quad dy = \varphi'(t)dt, \quad dx = \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$$

Поэтому x найдется квадратурой

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C \tag{2.62}$$

61eq18

Присоединяя к ней $y = \varphi(t)$, исключив t, получим общий интеграл. Можно оставить без исключения общий интеграл в виде

$$x = \int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t). \tag{2.63}$$

61eq17'

Пример 2.8.2. 1) Уравнение

$$y = y'^{\,2} e^{y'}$$

не разрешимо относительно y' в элементарных функциях. Обозначим

$$y' = p, \quad y = p^2 e^p,$$

$$dx = \frac{dy}{p}, \quad dy = (2pe^p + p^2 e^p)dp, \quad dx = \frac{2pe^p + p^2 e^p}{p} dp,$$

$$dx = (2pe^p + p^2 e^p)dp;$$

выполняем квадратуру:

$$x = 2e^p + pe^p - e^p + C, \quad y = p^2 e^p.$$

2) Уравнение

$$y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$$

легко разрешается относительно y и y'; но разрешение получится иррациональное. Для избежания иррациональности введем параметр t, полагая

$$2 - y' = yt;$$

уравнение дает нам:

$$y^2(y' - 1) = y^2 t^2 \quad \text{или} \quad y' = t^2 + 1$$

отсюда

$$y = \frac{1 - t^2}{t}, \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-t^{-2} - 1}{t^2 + 1} dt = -\frac{dt}{t^2};$$

выполняем квадратуру:

$$x = \frac{1}{t} + C, \quad y = \frac{1}{t} - t.$$

Исключая t, имеем общий интеграл

$$y = x - C - \frac{1}{x - C}.$$

Замечание. Дадим задаче о нахождении функции φ и ψ геометрическую интерпретацию. Будем данное уравнение толковать как уравнение кривой, заменив временно аргументы y, y' — координатами ξ, η,:

$$F(\xi, \eta) = 0$$

Тогда построить функции φ и ψ значит найти параметрическое представление этой кривой

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t)$$

Если предположить, что $F = 0$ — алгебраическое уравнение, то перед нами задача о параметризации или, как еще говорят с тем, чтобы подчеркнуть, что мы не ограничиваемся только вещественными ξ, η, униформизации алгебраической кривой. В `Maple` до алгоритма доведен способ нахождения рациональной параметризации кривой, если таковая существует; найдено множество кривых, такой параметризации не допускающих.

2.8.3 Уравнение вида $F(x, y') = 0$

Переходим теперь ко второму случаю, когда уравнение имеет вид

$$F(x, y') = 0. \tag{2.64}$$ 60eqII

Относительно уравнений этого вида мы могли бы повторить все наши рассуждения для предыдущего случая. Если бы уравнение было разрешимо относительно y', то оно интегрировалось бы квадратурой, тоже самое было бы, если бы мы могли разрешить уравнение относительно x. Мы положим вообще, что оба аргумента x и y' можно выразить в виде двух функций вспомогательного параметра t. Полагая в частности $y' = t$ и $x = t$, будем иметь два упомянутых выше случая разрешимости. Итак, пусть

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t).$$

Выразим и y как функцию параметра t:

$$dy = y'dx = \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Присоединяя к этому равенство $x = \varphi(t)$, имеем общий интеграл. В данном случае мы также в сущности делали преобразование переменных. Действительно, мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \psi(t)\varphi'(t),$$

то есть мы вместо x ввели новое переменное t и определили производную искомой функции y по t, а не по x.

Пример 2.8.3. Пусть в частности t совпадает с y':

$$x = y' + \cos y', \quad y' = p, \quad x = p + \cos p, \quad dy = pdx;$$

$$dy = p(1-\sin p)dp, \quad y = \frac{p^2}{2} + p\cos p - \sin p + C.$$

Из выражений для x и y как функций p не трудно исключить p и получить общий интеграл.

2.8.4 Уравнение общего вида $F(x, y, y') = 0$

До сих пор мы предполагали, что уравнение (2.43) содержит два аргумента. Перейдем теперь к общему случаю, когда в уравнение входят три аргумента x, y и y'. Покажем, каким образом мы можем заменить его новым дифференциальным уравнением первой степени относительно производной. Пусть мы имеем уравнение

$$F(x, y, y') = 0,$$

разрешимое относительно y:

$$y = f(x, y'). \tag{2.65}$$

63eqIII

Введем новое переменное, полагая

$$y' = p, \quad \text{тогда} \quad y = f(x, p).$$

Дифференцируя по x, имеем

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

Мы получили дифференциальное уравнение, в которое входит p, x и $\frac{dp}{dx}$. Относительно последней полученное уравнение первой степени, следовательно, цель наша достигнута.

Точно также дифференциальное уравнение можно заменить новым, первой степени относительно производной, если только оно разрешимо относительно x. Действительно, если

$$x = f(y, y'), \tag{2.66}$$

64eqIV

то полагая $y' = p$, будем иметь

$$x = f(y, p)$$

и дифференцируя по x:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}.$$

Но нам нужно теперь получить уравнение с y, p и $\frac{dp}{dy}$; поэтому, заметив, что

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

перепишем наше равенство таким образом:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y} p + \frac{\partial f}{\partial p} p \frac{dp}{dy}$$

мы получили дифференциальное уравнение относительно переменных p и y и причем оно первой степени относительно производной $\frac{dp}{dy}$.

Посмотрим теперь, каким образом можно найти общий интеграл данного дифференциального уравнения. Очевидно, для этого придется исключить p из общего интеграла преобразованного уравнения и из данного дифференциального уравнения. Например, во втором случае, если мы определили общий интеграл нового дифференциального уравнения

$$\varPhi(p, y, C) = 0,$$

то присоединив к нему уравнение $x = f(y, p)$ и исключая p, найдем общий интеграл данного уравнения.

В обоих предшествующих случаях мы предполагали, что уравнение разрешено относительно одного из аргументов. Естественно теперь обратиться к более общему случаю, когда уравнение не разрешено относительно ни одного из аргументов x, y, y'. Рассмотрим способ приведения уравнения к уравнению первой степени относительно производной в этом случае. Будем данное уравнение толковать как уравнение поверхности, заменив временно аргументы x, y, y' — координатами ξ, η, ζ:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Предположим, что координаты ξ, η, ζ поверхности выражаются как функции двух вспомогательных параметров u и v (криволинейные гауссовы координаты).[14] Тогда дифференциальное уравнение заменяется уравнениями вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

(Если бы из этих трех уравнений мы исключили u и v, то опять получили бы данное дифференциальное уравнение.) В том случае, когда данное дифференциальное уравнение можно представить в таком виде, его можно привести к новому дифференциальному уравнению первой степени относительно производной. Действительно, дифференцируя первые два уравнения, имеем

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv.$$

чтобы получить производную $\frac{dy}{dx}$, разделим второе равенство на первое, тогда

$$\chi(u, v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{du}}{\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{dv}{du}},$$

освобождая последнее уравнение от знаменателя, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{dv}{du} = \chi(u, v) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{du} \right].$$

Это дифференциальное уравнение первой степени относительно производной (в этом уравнении аргументы u, v, $\frac{dv}{du}$). Если мы проинтегрируем его, то получим соотношение вида:

$$\Phi(u, v, C) = 0.$$

Присоединяя к нему два первых равенства:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

получим по исключении u и v общий интеграл первоначального уравнения.

14

Последний случай будет самым общим случаем. Обратимся к рассмотрению частных случаев, в которых задача интегрирования доводится до конца в квадратурах. Таковы будут уравнения первой степени относительно x и y

$$F(y')y + G(y')x + H(y') = 0$$

и в частности уравнение Клеро.

2.9 Уравнения Лагранжа и Клеро.

Уравнение Лагранжа. Рассмотрим уравнения первой степени относительно x и y, коэффициентами при которых служат функции только одной производной y'. Это будет так называемое уравнение ЛАГРАНЖА[15]. После разрешения относительно y оно примет вид

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'). \tag{2.67}$$

66eq1

Введя $y' = p$, мы будем поступать так, как поступали и раньше в случае разрешенных относительно y уравнений. Дифференцируя по x, имеем

$$p = \varphi(p) + [\varphi'(p)x + \psi(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Вот то уравнение, которое мы получили в результате наших преобразований. Это уравнение первой степени относительно производной. Оно замечательно тем, что его можно проинтегрировать квадратурами. Мы можем считать p за независимое переменное, а x — за зависимое. Помножив все уравнение на $\frac{dx}{dp}$ и перенеся все члены с этой производной, мы наше уравнение представим так:

$$[p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)x + \psi'(p)$$

[15] Это уравнение привлекло внимание И. Бернулли еще в 1694, проинтегрировано оно было Я. Германом [Записки Петербургской академии наук, (1727) 1729]. Однако интерес к этому уравнению привлекли работы Даламбера и Лагранжа, чем и объясняется название. То, что данное уравнение может обладать особыми решениями, заметил Клеро, он же рассмотрел весьма интересный с этой точки зрения случай $\varphi(y') = y'$ [Mém Ac. Paris, (1734) 1736].

или
$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}$$
Мы, очевидно, получили линейное уравнение. Оно, как известно, интегрируется двумя квадратурами. Следовательно, двумя квадратурами мы получим общий интеграл
$$E(x,p,C) = 0.$$
Присоединяя к нему уравнение
$$y = \varphi(p)x + \psi(p)$$
и исключая из этих двух уравнений p, получим
$$\varPhi(x,y,C) = 0$$
— общий интеграл данного уравнения (исключение p можно было бы и не производить, а только указать на систему двух этих уравнений, определяющих интеграл).

Пример 2.9.1. Рассмотрим пример на уравнение Лагранжа. Положим, мы имеем уравнение
$$y = 2xy' + y'^{\,3}$$
или, вводя обозначение p вместо y',
$$y = 2xp + p^3;$$
дифференцируя по x, получим:
$$p = 2p(2x+3p^2)\frac{dp}{dx},$$
или
$$p\frac{dx}{dp} + 2x + 3p^2 = 0.$$
Разделив его на p, имеем
$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x + 3p = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения — это

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{3}{4}p^2.$$

Присоединяя сюда $y = 2px + p$ и исключая из них p, получаем общий интеграл данного уравнения. Можно сохранить эти два равенство и сказать, что они определяют общий интеграл данного уравнения.

Уравнение Клеро. Обращаемся теперь к частному случаю уравнения Лагранжа, когда $\varphi(y') = y'$. Уравнения такого типа носят название уравнений Клеро. Итак, пусть

$$y = xy' + \psi(y')$$

Попробуем применить к нему наш предшествующий метод. Обозначая y' через p, имеем $y = px + \psi(p)$. Дифференцируя по x, получаем:

$$p = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

Полученный результат отличается от предшествующего тем, что член, свободный от $\frac{dp}{dx}$, уничтожается и все уравнение принимает вид

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Этому уравнению мы удовлетворим, если обратим один из сомножителей в нуль. Итак, нам надо рассмотреть два случая. Во-первых, когда $\frac{dp}{dx} = 0$, и во-вторых, когда

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{2.68}$$

68eq3

Первое из них дает $p = C$. Это есть общий интеграл преобразованного уравнения. Чтобы получить общий интеграл данного уравнения, к нему надо присоединить

$$y = px + \psi(p)$$

и исключить p. Тогда

$$y = Cx + \psi(C).$$

Это общий интеграл данного уравнения. Он выражается просто: если нам дано уравнение Клеро, то для того, чтобы найти его общий интеграл, надо заменить в уравнении y' произвольным постоянным C.

Обращаемся ко второму случаю. Здесь p оказывается функцией одного x, свободной от C. Но p — новое переменное, которое надо исключить. Присоединяем к выражению, найденному для p из (2.68), уравнение

$$y = px + \psi(p)$$

и исключим из них p. После этого получим соотношение между x и y, но свободное от C. Это соотносите будет также интегралом данного уравнения, но не общим. Не трудно сообразить, в какой форме можно его написать; он будет иметь вид:

$$y = p(x)x + \psi[p(x)],$$

при чем $p(x)$ — то значение p, которое получается из уравнения (2.68). Не трудно убедиться в том, что это соотношение не может получиться из общего интеграла ни при каком постоянном значении C. Мы знаем, что общий интеграл дает частные интегралы, если мы даем C частные постоянные значения. Таким образом, последнее соотношение, к которому мы пришли из 2-го предположения(приравняв 1-ый множитель нулю), не есть частный интеграл, поскольку он из общего не получается. Действительно, общий интеграл дает y, как линейный многочлен относительно x-а, но наше соотношение вообще говоря, не линейно относительно x-а (так как $p(x)$ не постоянно). Таким образом, второй интеграл будет интеграл ОСОБЫЙ, не получаемый из общего ни при каком частном постоянном значении постоянного C.

Посмотрим теперь, как его получить. Для получения его мы исключили p из двух уравнений. Если мы p обозначим через C, то эти уравнения будут:

$$y = Cx + \psi(C); \quad 0 = x + \psi'(C).$$

Первое из них совпадает с общим интегралом, второе же получится из первого, если мы в нем будем x и y рассматривать как параметр и продифференцируем по C. Итак, для того чтобы получить особый интеграл уравнения Клеро, надо продифференцировать общий интеграл по C и из 2-х уравнений исключить C. Прием, который оказался пригодным для нахождения особого интеграла уравнения Клеро, как мы увидим дальше, есть общий прием для нахождения особого интеграла, если только уравнение вообще допускает особый интеграл.

Пример 2.9.2. Возьмем пример:

$$y = xy' + \frac{1}{2y'};$$

по предыдущему общий интеграл будет

$$y = Cx + \frac{1}{2C}.$$

Чтобы найти особый интеграл, надо взять уравнения

$$y = Cx + \frac{1}{2C} \quad \text{и} \quad 0 = x - \frac{1}{2C^2}$$

и исключить из них C. Определив из 2-го C и подставив его значение в 1-ое, имеем:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2x}} + \frac{\sqrt{2x}}{2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

откуда $y = \sqrt{2x}$ или $y^2 = 2x$. Это и есть особый интеграл. Он не получается из общего ни при каком численном значении C.

Результаты, полученные при решении уравнения Клеро, допускают простое геометрическое толкование. Если переменные x и y мы будем рассматривать как Декартовы координаты, то общий интеграл

$$y = Cx + \psi(C)$$

будет уравнением СЕМЕЙСТВА различных прямых линий. Посмотрим, что будет представлять из себя уравнение особого интеграла. Для получения последнего, мы писали уравнения

$$y = Cx + \psi(C) \quad \text{и} \quad 0 = x + \psi'(C)$$

к затем исключали C. Точно таким же путем мы находим уравнение огибающей семейства с одним параметром. Таким образом, мы будем иметь огибающую кривую, а ее касательные образуют данное семейство прямых. Уравнение каждой касательной в отдельности дает частный интеграл, а уравнение огибающей дает особый интеграл. В том частном случае, который мы имели в примере, огибающей будет парабола. Применяя сказанное выше сюда, скажем, что уравнение параболы — особый интеграл, а совокупность ее касательных дает общий.

Этим мы заканчиваем рассмотрение частных случаев уравнений 1-го порядка и переходим далее к их общей теории. Ближайшая наша задача будет состоять в том, чтобы показать, что уравнение 1-го порядка допускает общий интеграл и найти его возможный вид. Положение это было впервые доказано Коши. Мы докажем эту теорему для более общего случая, а именно мы рассмотрим не одно уравнение, а целую систему уравнений 1-го порядка и докажем существование решений этой системы.

Глава 3

Существование общего интеграла дифференциального уравнения

3.1 Формулировка теоремы о существовании интеграла дифференциального уравнения (теоремы Коши)

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots, u), \\ \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots, u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du}{dx} = f_n(x, y, z, \ldots, u), \end{cases} \tag{3.1}$$ 71eq1

В этой системе одно независимое переменное x, а $y,\ z, \ldots, u$ — функции этого переменного. Пусть для некоторого численного значения $x = x_0$, даны все численные значения наших функций

$$y = y_0,\ z = z_0, \ldots, u = u_0. \tag{3.2}$$ 71eqA

Задачу определения функций x, а $y,\ z, \ldots, u$, удовлетворяющих системе (3.1) и принимающих при $x = x_0$ заданные значения называют *задачей Коши.* Мы докажем сейчас *теорему Коши*, гарантирующую существование такого решения x, а y, $z, \ldots, u$ нашей системы, а также, что его единственность.

Замечание. Вполне определенно это утверждение было сформулировано Лакруа[1], однако математикам вплоть до середины 19 века оно казалось очевидным:

«…Всякое дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

имеет интеграл, содержащий произвольно постоянное …Действительно, найти интеграл данного уравнения значит найти такую функцию x, которая бы обозначается через y, чтобы ее производная была равна $f(x, y)$, или другими словами, найти такую функцию, чтобы давая x-су бесконечно малое приращение dx, соответствующее приращение dy было равно $f(x, y)dx$. Так как дифференциальное уравнение $dy = f(x, y)dx$ определяет только приращение y, то, при частном значении величины x, можно взять произвольную величину y. Если, при $x = a$, возьмем $y = b$, то $f(x, y)h$ будет бесконечно малое приращение y, при переходе x к бесконечно малой величине $a + h$. Подобным образом, если положим

$$a + h = a', \quad b' = b + f(a, b)h,$$

то $f(a', b')h$ будет приращение y при переходе x от a' к $a'+h$. Итак, если продолжать увеличивать x незначительными приращениями до какой-нибудь величины, то дифференциальное уравнение определит последовательные приращения y, так что величина y, соответствующая каждой величине x, будет совершенно определена. Следовательно, y будет известной функцией от x, и эта функция необходимо будет зависеть от произвольного постоянного b, что и надо было доказать.»[2]

Фактически здесь описан метод приближенного решения дифференциального уравнения (метод Эйлера), но совершенно не исследована его сходимость. Этот пробел заметил Коши в 1835 году[3]

[1] Lacrois S. F. Traité du calcul differentiel et du calcul intégral. 2^e éd., 2, Paris, 1814, p.295, 325-9

[2] Штурм. Курс анализа. Т. 2, С-Пб.-М., 1868.

[3] Cauchy A.L. Œuvres. II ser. T. 11, Paris 1913, p. 399.

При этом нам надо оговорить какого рода наши уравнения (3.1), то есть какие функции стоят в правой части. Предположим, что нам дана область изменения переменного. Пусть эта область дана около x_0, то есть мы рассматриваем все значения x-а от $x_0 - a$ до $x_0 + a$. Точно так же ограничим область изменения функций $y,\ z, \dots, u$. Будем рассматривать изменения функций:

$$\begin{aligned}
&y(x) \text{ от } y_0 - b \text{ до } y_0 + b\\
&z(x) \text{ от } z_0 - c \text{ до } z_0 + c\\
&\dots\\
&u(x) \text{ от } u_0 - k \text{ до } u_0 + k
\end{aligned}$$

Таким образом, нами выделена некоторая область D изменений переменных $x,\ y,\ z, \dots, u$. Для каждого переменного даны пределы. Рассматривая эту область D, скажем, что в ней функции $f_1,\ f_2, \dots, f_n$ должны быть конечными непрерывными функциями $(n+1)$ аргументов $y, z, \dots, u$. Добавим еще второе требование. Если допустим, что функции f_i дифференцируемы по любому из аргументов $y,\ z, \dots, u$ (т.е. что существуют частные производная f_i по аргументам $y,\ z, \dots, u$, и что эти производные конечны и непрерывны в области D), то для каждой из производных

$$\frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z}, \quad \dots, \frac{\partial f_i}{\partial u}$$

можно установить в области D высший предел ее абсолютной величины, т.е. мы можем указать такие положительные числа $A,\ B, \dots, K$, что в области D все время

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} < A, \quad \frac{\partial f_i}{\partial z} < B, \quad \dots, \frac{\partial f_i}{\partial u} < K$$

и затем, применяя к функциям f_i теорему о конечном приращении, возьмем разность значений какой-нибудь функции f_i для одного и того же x-а и различных $y,\ z, \dots, u$, то есть возьмем разность

$$f_i(x, y', z', \dots, u') - f_i(x, y, z, \dots, u);$$

если x, y, $z, \ldots, u$ лежат в упомянутой области D, то эта разность по теореме о конечном приращении, представиться как

$$(y' - y) \left.\frac{\partial f_i}{\partial y}\right|_{y=\eta} + (z' - z) \left.\frac{\partial f_i}{\partial z}\right|_{z=\xi} + \cdots + (u' - u) \left.\frac{\partial f_i}{\partial u}\right|_{u=\omega}, \tag{3.3}$$ $\boxed{\texttt{73eq2}}$

где η, $\xi, \ldots, \omega$ заключаются между y и y', z и z', $\ldots$, u и u'. Поэтому абсолютная величина разности

$$|f_i(x, y', z', \ldots, u') - f_i(x, y, z, \ldots, u)|$$

будет равна абсолютной величины суммы (3.3). Далее, так как абсолютная величина суммы меньше суммы абсолютных величин слагаемых, то мы будем иметь

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y', z', \ldots, u') - f_i(x, y, z, \ldots, u)| \\ &\qquad\qquad < A|y - y'| + B|z - z'| + \cdots + K|u - u'|. \end{aligned} \tag{3.4}$$ $\boxed{\texttt{73eq3}}$

Итак, мы будем иметь такое неравенство (3.4), как только существуют конечные непрерывные производные в области D. Но если известно только, что существует неравенство (3.4), то функции f_i могут и не быть дифференцируемыми. Поэтому требование о существовании частных производных мы заменим требованием о выполнении неравенства (3.4) в области D. Итак, второе требование формулируется так: существует рад таких положительных чисел A, $B, \ldots, K$, что в области D выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y', z', \ldots, u') - f_i(x, y, z, \ldots, u)| \\ &\qquad\qquad < A|y - y'| + B|z - z'| + \cdots + K|u - u'|. \end{aligned} \tag{3.5}$$ $\boxed{\texttt{73eq3'}}$

Мы будем предполагать, что для всех значений аргументов вышеуказанной области все наши функции f_i удовлетворяют этому требованию. Это условие называется условием Липшица[4].

[4] Lipschitz R. Lehrbuch der Analysis 2. Bonn, 1880, p. 504; Bull. Sc. Math. (1) 10 (1876), p. 149; Ann. Mat. Pura Appl. (2) 2 (1868-9), p. 288.

При наличии таких условий мы можем сформулировать теорему [Коши]: *для всех значений переменного x от $x_0 - h$ до $x_0 + h$, где h — наименьшее из чисел*

$$a, \ \frac{b}{M}, \ \frac{c}{M}, \ldots, \frac{k}{M},$$

существует единственная система функций y, $z, \ldots, u$, удовлетворяющих системе (3.1) *и при $x = x_0$ принимающих данные значения* y_0, $z_0, \ldots, u_0$. При этом M превосходит наибольшее из максимумов абсолютных значений функции f_i в данной области D, то есть M такое положительное число, что для каждой функции f_i верно

$$|f_i(x, y, z, \ldots, u)| < M$$

для всех значений аргументов в этой области.

3.2 Доказательство существования решения задачи Коши.

Доказательство этой теоремы изложим по Пикару[5]. Искомые решения мы будем находить методом последовательных приближений. За начальное приближение к функциям y, $z, \ldots, u$ можно считать постоянные y_0, $z_0, \ldots, u_0$. Назовем это приближение нулевым или нулевого порядка. Ищем теперь первое приближение y_1, $z_1, \ldots, u_1$. Мы их определим так

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_0, z_0, \ldots, u_0), \\ \frac{dz_1}{dx} = f_2(x, y_0, z_0, \ldots, u_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du_1}{dx} = f_n(x, y_0, z_0, \ldots, u_0), \end{cases} \tag{3.6}$$

74eq4

Правые части здесь — данные функции x-а. Функции y_1, $z_1, \ldots, u_1$ определяются из этих уравнений и условий

$$\text{при } x = x_0 \text{ функции } y_1 = y_0, \ z_1 = z_0, \ \ldots, \ u_1 = u_0.$$

[5] Picard E. J. Math. Pure Appl. (4) 6 (1890), p. 145; (4) 9 (1893), p. 217; Traité d'Analyse. T. 2. Paris, 1926, p. 368.

Их нетрудно найти квадратурами. Очевидно, имеем

$$y_1 - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0, \ldots, u_0),$$

так как при $x = x_0$ пределы интеграла равны и интеграл равен нулю. Аналогично

$$z_1 - z_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_2(x, y_0, z_0, \ldots, u_0)$$

и т.д. Таким образом, мы нашли функции $y_1(x)$, $z_1(x), \ldots, u_1(x)$. Это и будет первое приближение. С их помощью найдем также втрое приближение, которое обозначим как y_2, $z_2, \ldots, u_2$. Это будет ряд функции x-а, которые принимают данные значения y_0, $z_0, \ldots, u_0$ при $x = x_0$ и удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dx} = f_1(x, y_1, z_1, \ldots, u_1), \\ \frac{dz_2}{dx} = f_2(x, y_1, z_1, \ldots, u_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du_2}{dx} = f_n(x, y_1, z_1, \ldots, u_1), \end{cases} \tag{3.7}$$

75eq5

Правые части здесь опять данные функции x-а, следовательно, функции y_2, $z_2, \ldots, u_2$ найдутся квадратурами:

$$y_2 - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1, \ldots, u_1)$$

и т.д. Таким образом, мы нашли функции $y_2(x)$, $z_2(x), \ldots, u_2(x)$, которые удовлетворяют начальному условию (3.2).

Мы можем продолжить так далее и по каждому приближению находить следующее указанным путем. Пусть мы уже нашли приближения y_{m-1}, $z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}$. С их помощью найдем новые приближения

$y_m,\ z_m, \ldots, u_m$. Для этого имеем систему равенств:

$$\begin{cases} \frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}), \\ \frac{dz_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{du_m}{dx} = f_n(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}), \end{cases} \tag{3.8}$$

75eq6

Точно также присоединяя суда условия (3.2), мы найдем $y_m,\ z_m, \ldots, u_m$ квадратурами

$$y_m - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1})$$

и т.д. Процесс этот можно продолжить неограниченно и мы будем получать приближения все большого индекса m. Нам теперь надо показать, что при всех значениях x-а от x_0-h до x_0+h значения всех функций $y_m,\ z_m, \ldots, u_m$ не будут выходить из области D. Во-вторых, нужно доказать, что все эти функции заслуживают названия приближения, то есть что с увеличением m мы будем приближаться к некоторым пределам

$$\lim_{m=\infty} y_m(x) = Y(x), \quad \lim_{m=\infty} z_m(x) = Z(x)$$

и т.д., при чем функции $Y,\ Z, \ldots, U$ будут искомыми решениями, то есть они будут удовлетворять системе (3.1) и условиям (3.2).

Докажем сначала, что значения функций не выходят из области D. С этой целью замечаем, что $y_0,\ z_0, \ldots, u_0$ лежат в этой области; обращаемся к равенствам

$$y_1 - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0, \ldots, u_0)$$

и т.д. Абсолютная величина правой части только увеличится, если мы заменим подынтегральную функцию f_1 на ее абсолютную величину $|f_1|$, а эту последнюю — на введенное выше число M, то есть

$$|y_1(x) - y_0| < M|x - x_0| < Mh,$$

так как x далее чем на h от x_0 не уходит. Точно также

$$|z_1(x) - z_0| < M|x - x_0| < Mh$$

и т.д. Но h — наименьшее из чисел a, $\frac{b}{M}$, $\frac{c}{M}, \ldots, \frac{k}{M}$, поэтому

$$Mh \leq b, \quad Mh \leq c, \ldots Mh \leq k$$

и, следовательно,

$$|y_1(x) - y_0| < b, \quad |z_1(x) - z_0| < c, \ldots |u_1(x) - u_0| < b.$$

Таким образом, мы доказали, что $y_1, z_1, \ldots, u_1$ не выходят из установленной области.

Далее покажем, что в этой области находятся также y_2, $z_2, \ldots, u_2$. Для этого мы рассмотрим равенства

$$y_2 - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, y_1, z_1, \ldots, u_1)$$

и т.д. x не выходит по предположению из области D, относительно y_1, $z_1, \ldots, u_1$ мы доказали их принадлежность к области, а потому, как и раньше, имеем

$$|y_2(x) - y_0| < Mh, \quad |z_2(x) - z_0| < Mh, \ldots |u_2(x) - u_0| < Mh.$$

Вспоминая теперь, как выбрано h, мы придем к тому же результату, а именно, к оценке

$$|y_2(x) - y_0| < b, \quad |z_2(x) - z_0| < c, \ldots |u_2(x) - u_0| < b.$$

то есть y_2, $z_2, \ldots, u_2$ не выходят из области D.

Продолжая такие размышления далее, мы увидим, что раз буде доказано для y_{m-1}, $z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}$, что они не выходят из области D, то можно будет показать, что и y_m, $z_m, \ldots, u_m$ также не выходят из области. Действительно, по их выражениям мы найдем

$$|y_m(x) - y_0| < Mh, \quad |z_m(x) - z_0| < Mh, \ldots |u_m(x) - u_0| < Mh.$$

или

$$|y_m(x) - y_0| < b, \quad |z_m(x) - z_0| < c, \dots |u_m(x) - u_0| < b.$$

ибо Mh меньше любого из этих чисел. Итак, мы доказали, что все функции, которые мы брали, при всех значениях x-а от $x_0 - h$ до $x_0 + h$ не выходят из рассматриваемой области D.[6]

Далее нам надо доказать, что эти приближения стремятся к определенным пределам. Для доказательства рассмотрим разности последовательных приближений, а именно разности каждого приближения со своим предыдущем. Одну из таких разностей мы уже рассматривали и доказали, что

$$|y_1 - y_0| < M|x - x_0|$$

и точно также

$$|z_1 - z_0| < M|x - x_0|$$

и т.д. Переходим к следующим разностям этого типа. Рассмотрим $y_2 - y_1$. Мы имели выражения для $y_2 - y_0$ и $y_1 - y_0$, вычитая из первой разности вторую, мы получим в правой части разность двух интегралов, а так как пределы их общие, то мы будем иметь, что

$$y_2 - y_1 = \int\limits_{x_0}^{x} \{f_1(x, y_1, z_1, \dots, u_1) - f_1(x, y_0, z_0, \dots, u_0)\}\, dx.$$

Аналогично найдем выражения для $z_2 - z_1$ и др. заметим. что подынтегральная функция есть разность значений f_1 для одного и того же значения

[6] Константа h была специально выбрана так, чтобы все приближения не покидали область

$$|y_1(x) - y_0| < b, \quad |z_1(x) - z_0| < c, \dots |u_1(x) - u_0| < b.$$

В случае, когда $a = b = \dots = k = m$, можно показать, что это свойство остается в силе, если вместо h взять число h', наибольшее из двух чисел

$$a \quad \text{и} \quad \frac{1}{A + B + \dots + K} \ln\left(1 + \frac{m(A + B + \dots + K)}{M_0}\right),$$

где M_0 — максимум модулей $|f_1(x, y_0, z_0, \dots)|, \dots$. Тем самым можно доказать существование решения задачи Коши на большем интервале от $x_0 - h'$ до $x_0 + h'$ [Lindelöf E. C. R. Acad. Sc. Paris, **118** (1894), p. 454; см. также Picard E. Traité d'Analyse. T. 2. Paris, 1926, p. 372.]

x, но различных $y, z, \ldots, u$. Все аргументы находятся в области D и для абсолютной величины разности можно воспользоваться неравенством Липшица. Заменяя подынтегральную разность ее абсолютной величиной, мы абсолютную величину интеграла увеличим. Она еще больше увеличится, если абсолютную величину подынтегральной разности мы заменим количеством большим, итак:

$$|y_2 - y_1| < \left| \int\limits_{x_0}^{x} \{A|y_1 - y_0| + B|z_1 - z_0| + \cdots + K|u_1 - u_0|\}\, dx \right|.$$

Мы видели, что абсолютные величины разностей $|y_1 - y_0|$, $|z_1 - z_0|, \ldots$ менее $M|x - x_0|$, а потому неравенство усиливается, если мы заменим в нем эти разности через $M|x - x_0|$. При этом можно будет вынести за знак интеграла $M\Theta$, где через Θ мы обозначили следующую сумму

$$\Theta = A + B + \cdots + K,$$

которая в дальнейшем будет часто встречаться. Тогда будем иметь

$$|y_2 - y_1| < M\Theta \left| \int\limits_{x_0}^{x} |x - x_0| dx \right|;$$

интегрирование нетрудно выполнить и тогда получим:

$$|y_2 - y_1| < M\Theta \frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2}.$$

Вот окончательная оценка для $|y_2 - y_1|$; та же самая оценка будет верна для абсолютных величин разностей $|z_2 - z_1|, \ldots, |u_2 - u_1|$, то есть мы имеем

$$|y_2 - y_1| < M\Theta \frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2},\ |z_2 - z_1| < M\Theta \frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2} \text{ и так далее.}$$

Переходим далее к вычислению разности $y_3 - y_2$. Она будет также выражаться интегралом

$$y_3 - y_2 = \int\limits_{x_0}^{x} \{f_1(x, y_2, z_2, \ldots, u_2 - f_1(x, y_1, z_1, \ldots, u_1)\}\, dx.$$

Определяя абсолютную величину $|y_3 - y_2|$, заменим подынтегральную разность ее абсолютным значением и, применяя неравенство Липшица, по предыдущему получим

$$|y_3 - y_2| < \left| \int\limits_{x_0}^{x} \{A|y_2 - y_1| + B|z_2 - z_1| + \dots + K|u_2 - u_1|\}\, dx \right|.$$

Мы усилим неравенство, если заменим в последнем интеграле разности $|y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|, \dots$ на выражение $M\Theta\frac{|x-x_0|^2}{1\cdot 2}$; тогда будем иметь

$$|y_3 - y_2| < M\Theta^2 \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{|x-x_0|^2}{1\cdot 2} dx \right| = M\Theta^2 \frac{|x-x_0|^3}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Тоже самое получится для $|z_2 - z_1|$ и других. Следовательно, мы будем иметь группу неравенств такого типа

$$|y_3 - y_2| < M\Theta^2 \frac{|x-x_0|^3}{1\cdot 2\cdot 3},\ |z_3 - z_2| < M\Theta^2 \frac{|x-x_0|^3}{1\cdot 2\cdot 3} \dots$$

Эти вычисления мы можем продолжать и далее. По аналогии видно, каковы будут результаты. Таким образом, мы придем к группе таких неравенств:

$$|y_m - y_{m-1}| < M\Theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!},\ |z_m - z_{m-1}| < M\Theta^{m-1} \frac{|x-x_0|^m}{m!} \dots$$

Нетрудно доказать, что эта формула общая. Полагая, что предыдущие неравенства

$$|y_{m-1} - y_{m-2}| < M\Theta^{m-2} \frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!},\ |z_{m-1} - z_{m-2}| < M\Theta^{m-2} \frac{|x-x_0|^{m-1}}{(m-1)!} \dots$$

существуют, имеем

$$y_m - y_{m-1} = \int\limits_{x_0}^{x} \{f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \dots, u_{m-1}) - f_1(x, y_{m-2}, z_{m-2}, \dots, u_{m-2})\}\, dx.$$

Применяя условие Липшица, найдем

$$|y_m - y_{m-1}| < \left| \int\limits_{x_0}^{x} \{A|y_{m-1} - y_{m-2}| + B|z_{m-1} - z_{m-2}| + \dots + K|u_{m-1} - u_{m-2}|\}\, dx \right|;$$

так как для разностей типа $|y_{m-1} - y_{m-2}|$ формулы уже выведены, то

$$|y_3 - y_2| < M\Theta^{m-1} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{|x - x_0|^{m-1}}{(m-1)!} dx \right| = M\Theta^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!}.$$

Итак, мы имеем

$$|y_m - y_{m-1}| < M\Theta^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!}, \ |z_m - z_{m-1}| < M\Theta^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!} \dots$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим далее такой ряд

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_m - y_{m-1}) + \dots \tag{3.9}$$

80eq7

Все члены этого ряда — функции $x - a$. Обозначив сумму $(m + 1)$ члена этого ряда как S_m, будем иметь

$$S_m = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_m - y_{m-1}) = y_m.$$

Значит, сумма конечного числа членов равна y_m. Предположим, что мы доказали сходимость ряд (3.9). Он будет сходящимся, если существует

$$\lim_{m=\infty} S_m = S;$$

таким образом, если мы докажем сходимость ряда, то мы докажем, что существует предел

$$\lim_{m=\infty} y_m = Y(x).$$

Точно также мы будем поступать для доказательства существования предела

$$\lim_{m=\infty} z_m = Z(x).$$

Для того, чтобы доказать сходимость нашего ряда, сравним его с другим. Возьмем ряд

$$M\frac{|x - x_0|}{} + M\Theta\frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2} + M\Theta^2\frac{|x - x_0|^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + M\Theta^{m-1}\frac{|x - x_0|^m}{m!} + \dots \tag{3.10}$$

80eq8

Если теперь к этой сумме прибавим $\frac{M}{\Theta}$, весь ряд умножим на Θ и поделим на M, то будем иметь разложение показательной функции $e^{\Theta|x-x_0|}$. Следовательно, до наших преобразований ряд (3.10) равен

$$M\frac{e^{\Theta|x-x_0|}-1}{\Theta}$$

Ряд (3.10), который мы получаем из разложения показательной функции, заведомо сходящийся. Все члены его положительны и он будет равномерно сходящийся. Сравним теперь этот ряд с нашим. Если мы имеем сходящийся ряд с положительными членами и затем другой ряд, абсолютные величины членов которого меньше соответствующих членов предыдущего ряда, то этот ряд тоже сходится, в силу этого сходится и наш ряд (3.9), а также очевидно и ряд

$$|y_0| + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \cdots + |y_m - y_{m-1}| + \ldots,$$

то есть ряд (3.9) будет сходится абсолютно. Кроме того, он будет сходится и равномерно, так как члены его по абсолютной величине меньше членов ряда (3.10), который сходится равномерно. Таким образом, наш ряд сходится абсолютно и равномерно. Раз так, то по предыдущему существует предел для y_m

$$\lim_{m=\infty} y_m = Y(x).$$

и функция эта будет непрерывна. В самом деле, если мы имеем равномерно сходящийся ряд, причем все его члены функции непрерывные, то сумма его тоже будет непрерывной функцией. [Поэтому остается заметить, что] все члены нашего ряда были непрерывными функциями, так как они интегралами, у которых подынтегральные функции f_i являются непрерывными функциями своих аргументов и аргументы сами по себе тоже являются непрерывными функциями x. В последнем можно убедиться из рассмотрения постепенного их получения. Действительно: $y_1, z_1, \ldots, u_1$ — непрерывные функции, следовательно, $y_2, z_2, \ldots, u_2$ — тоже непрерывные, так как они получаются квадратурой непрерывной функции и т.д. Итак, мы доказали существование предела для y_m, точно также докажем

$$\lim_{m=\infty} z_m = Z(x),$$

где $Z(x)$ — непрерывная функция и т.д. Теперь остается посмотреть, удовлетворяют ли эти функции начальным условиям (3.2) и дифференциальным уравнениям (3.1). Первому условию все найденные функция удовлетворяют, так как все время имеем, что для $x = x_0$ любая функция

$$y_m(x_0) = y_0, \ldots$$

Следовательно, и в пределе

$$\lim_{m=\infty} y_m(x_0) = y_0, \ \lim_{m=\infty} z_m(x_0) = z_0, \ldots$$

Остается проверить, удовлетворяют ли они нашим дифференциальным уравнениям. Напишем те дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют наши приближения:

$$\frac{dy_m}{dx} = f_1(x, y_{m-1}, \ldots, u_{m-1}), \ \frac{dz_m}{dx} = f_2(x, y_{m-1}, \ldots, u_{m-1}), \ldots$$

Казалось бы, что для доказательства нашего положения стоит только в предыдущих уравнениях перейти к пределу. Но не трудно убедиться в том, что такое доказательство было бы не строгим и могло бы привести к ошибке. Действительно, в этом случае мы брали бы предел производной и говорили, что он равен производной предела. Но это может быть и неверно, так как сама производная есть предел и следовательно, мы, имея двойной переход к пределу, хотим менять его порядок. Поэтому мы будем исходить из следующего выражения для приближения

$$y_m - y_0 = \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1})dx$$

и уже здесь перейдем к пределу. Поскольку $y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}$ и $y_m, z_m, \ldots, u_m$ стремятся к определенным пределам, то, взяв m достаточно большим, можно сказать, что для любого значения x

$$|Y(x) - y_{m-1}(x)| < \varepsilon,\ |Z(x) - z_{m-1}(x)| < \varepsilon, \ldots$$
$$|Y(x) - y_m(x)| < \varepsilon,\ |Z(x) - z_m(x)| < \varepsilon, \ldots,$$

где ε — произвольно мало. Принимая это во внимание, мы можем предыдущие равенство переписать так:

$$(y_m - Y) + (Y - y_0) = \int\limits_{x_0}^{x} [f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}) - f_1(x, Y, Z, \ldots, U)]dx +$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, Y, Z, \ldots, U)dx.$$

Первая равность в скобках слева и разность интегралов справа обращаются в пределе в нуль. Действительно, в силу условий Липшица (которые здесь можно применить)

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x} [f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}) - f_1(x, Y, Z, \ldots, U)]dx\right| <$$
$$< \left|\int\limits_{x_0}^{x} [A|y_m - Y| + B|z_m - Z| + \ldots]dx\right|.$$

Множители при $A, B, \ldots$ меньше ε, заменяя их через ε, мы усилим неравенство, которое по выполнении интегрирования даст нам, что левая часть меньше $\Theta\varepsilon|x - x_0|$. Понятно, что благодаря произволу выбора ε, правую часть можно сделать сколь угодно малой и, следовательно, в пределе $m = \infty$

$$\lim_{m=\infty} \int\limits_{x_0}^{x} [f_1(x, y_{m-1}, z_{m-1}, \ldots, u_{m-1}) - f_1(x, Y, Z, \ldots, U)]dx = 0$$

Итак, в пределе обратятся в нуль слева разность $y_m - Y$, а справа — разность интегралов, и мы получим

$$Y - y_0 = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x, Y, Z, \ldots, U)dx.$$

дифференцируя оставшееся, получим

$$Y' = f_1(x, Y, Z, \dots),$$

то есть мы видим, что найденные функции $Y, Z, \dots$ удовлетворяют первому из наших дифференциальных уравнений. Точно также докажем, что эти функции удовлетворяют и отельным уравнениям. Таким образом, мы доказали, что функции $Y, Z, \dots$ непрерывны, принимают заданные начальные значения и что они удовлетворяют данным дифференциальным уравнениям (3.1).

3.3 Доказательство единственности решения задачи Коши.

Теперь надо доказать, что эта система единственная, то есть что других решений, которые удовлетворяли бы тем же условиям (3.2), нет. Говоря о $y, z, \dots$ мы говорили о непрерывных функциях, имеющих также производные (последнее вытекает из того, что эти производные выражаются написанной выше системой дифференциальных уравнений). Положим, мы нашли одну такую систему решений

$$y(x),\ z(x), \dots u(x) \tag{3.11}$$ 84eqI

и пусть существует другая система решений

$$Y(x),\ Z(x), \dots U(x), \tag{3.12}$$ 84eqII

причем пусть при $x = x_0$ системы (3.11) и (3.12) совпадают, а для других значений x-а они вообще различны. Выделим промежуток для изменений x-а от $x_0 - h$ до $x_0 + h$. Геометрически это значит, что мы рассматриваем значения x-а на отрезке AB (см. фиг. 1). При этом h не должно превышать того значения, которым мы выше ограничили область изменений x-а. Рассмотрим следующие абсолютные величины разностей

$$|Y(x) - y(x)|,\ |Z(x) - z(x)|, \dots |U(x) - u(x)|. \tag{3.13}$$ 84eqIII

Все эти абсолютные величины разностей будут непрерывными функциями x-а. Таким образом, мы имеем ряд положительных (так как берутся абсолютные значения) непрерывных функций; при $x = x_0$ все они равны нулю. В таком случае при изменении x в данной области можно найти максимум для каждой из них. Укажем эти максимумы для 1-ой, 2-ой и т.д. разностей — пусть они будут соответственно ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$. При этом все эти ε_i — максимумы, которые достигают наши функции [при некоторых значениях x]. Выберем наибольший из них, именно, пусть наибольший из ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$ будет ε, тогда для всякого i верно $\varepsilon_i < \varepsilon$. Из функций ряда (3.13) по крайней мере одна достигает этого значения ε при некотором x; ε — положительное число или нуль, если все функции (3.11) и (3.12) совпадают. Далее рассмотрим производные тех разностей, абсолютные значения которых мы ранее выписали:

$$\frac{d(Y-y)}{dx} = f_1(x, Y, Z, \ldots U) - f_1(x, y, z, \ldots, u),$$
$$\frac{d(Z-z)}{dx} = f_2(x, Y, Z, \ldots U) - f_2(x, y, z, \ldots, u)$$

и т.д. Если теперь проинтегрировать эти равенства, то мы получим упомянутые разности. Проинтегрируем их в пределах от x_0 до x, тогда, поскольку при $x = x_0$ функции $y, z, \ldots$ и $Y, Z, \ldots$ совпадают, будем имеем

$$Y - y = \int\limits_{x_0}^{x} [f_1(x, Y, Z, \ldots U) - f_1(x, y, z, \ldots, u)] dx.$$

Имея эти выражения можно найти наивысший предел абсолютных величин разностей $|Y - y|$ и др. Можно написать, что $|Y(x) - y(x)|$ меньше правой части последнего равенства, в которой подынтегральное выражение заменено своим абсолютным значением, а это последнее ее большим благодаря условию Липшица:

$$|Y(x) - y(x)| < \left| \int\limits_{x_0}^{x} [A|Y - y| + B|Z - z| + \ldots K|U - u|] dx \right|$$

Между прочим, сейчас же появляются ограничения для h: его надо выбирать так, чтобы в промежутке от $x_0 - h$ до $x_0 + h$ функции $Y, Z, \dots U$ тоже не выходили из указанной области D (иначе нельзя было бы применить условие Липшица). Но при $x = x_0$ эти функции совпадают с $y, z, \dots u$, следовательно, всегда h можно подобрать столь малым, чтобы эти функции не выходили из области D.

Заменим каждую из абсолютных величин $|Y - y|$, $|Z - z|, \dots$ на число ε, которое представляет собой наибольший из максимумов этих разностей; поскольку ε — положительное число, его можно вынести за скобки, тогда, вспомнив, что сумма $A + B + \dots K$ была обозначена выше как Θ, будем иметь

$$|Y(x) - y(x)| < \Theta\varepsilon|x - x_0|.$$

Совершенно также найдем аналогичные неравенства для остальных разностей. Итак, все абсолютные величины разностей

$$|Y(x) - y(x)|,\ |Z(x) - z(x)|, \dots |U(x) - u(x)|$$

меньше следующего выражения

$$|x - x_0|\Theta\varepsilon < h\Theta\varepsilon,$$

где h пока еще произвольное число, которое не может быть больше некоторого числа. Наложим еще ограничения на h. Потребуем, чтобы $h\Theta$ было меньше или равно $1/2$, то есть

$$h\Theta \leq \frac{1}{2}.$$

Для этого нужно, чтобы

$$h \leq \frac{1}{2\Theta};$$

тогда все функции (3.13) будут меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$. Итак, мы имеем в области изменения x от $x_0 + h$ до $x_0 + h$

$$|Y(x) - y(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon,\ |Z(x) - z(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \dots |U(x) - u(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию, так как через ε мы обозначили наибольший из максимумов в том же самом промежутке от $x_0 + h$ до $x_0 + h$. Выходит, что для функций (3.13) наибольший из максимумов больше всех их. Противоречия не будет только если мы положим $\varepsilon = 0$, следовательно, если функции совпадают. Итак, мы доказали, что для x в промежутке от $x_0 + h$ до $x_0 + h$ наши функции непременно совпадут.

Теперь каким же будет h? Если оно прежнее, то положение нами наше будет полностью доказано. Это будет тогда, когда условия, наложенные на h не будут стеснять ранее наложенных условий. Если же новые требования не заключаются в прежних, то еще мы не доказали совпадение функций (3.11) и (3.12) во всем прежнем промежутке. Тогда мы можем идти далее так: мы можем повторить процесс, принимая $x_0 + h$ за новое начальное x_0 и повторяя наши рассуждения, пока не исчерпаем весь промежуток. Таким образом, мы убедились, что начальными данными (3.2) вполне определяется система решений, [что позволяет завершить доказательство теоремы Коши].

3.4 Продолжение решение.

Мы доказали существование решения в некоторой области. Возникает вопрос, нельзя ли эти функции, как говорят, *продолжить*. Положим у нас они вычислены для промежутка от $x_0 + h$ до $x_0 + h$. Число $x_0 + h = x_0'$ примем за начальное значение переменного x, тогда у нас получится новый промежуток от $x_0' + h'$ до $x_0' + h'$, в котором может опять применяться метод Пикара. Новый промежуток будет захватывать прежний, но вообще выходить за него; таким образом мы можем продолжить наши функции.[7]

[7]Этот способ продолжения решения был предложен К. Вейерштрассом (1842) и привел его к понятию аналитического продолжения.

3.5 Случай уравнения перового порядка.

Пусть теперь $n = 1$, то есть рассмотрим одно уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Применим к этому уравнению общие результаты в предположении, что выполнены основные требования относительно функции $f(x, y)$, а именно, функция $f(x, y)$ непрерывна, конечна и удовлетворяет условию Липшица в области от $x_0 - a$ до $x_0 + a$ и от $y_0 - b$ до $y_0 + b$, причем для этих значений $|f(x, y)| < M$. Тогда получим, обозначая через h меньшее из двух чисел a и $\frac{M}{b}$, для значений x в пределах от $x_0 - h$ до $x_0 + h$ (например методом Пикара) единственное решение y, которое при $x = x_0$ обращается в y_0. Будем менять теперь начальное значение y_0; тогда мы будем получать различные функции y. Вообще, мы можем положить

$$y = \psi(x, y_0),$$

где y_0 — у нас произвольный параметр. Наше решение есть функция x и одного произвольного постоянного. /*Значит, мы доказали существование общего решения у дифференциального уравнения, что без доказательства предполагалось в начале нашего изложения теории дифференциальных уравнений. Заметим еще, что и наоборот, зная общее решение

$$y = \varphi(x, C),$$

где C — произвольное постоянное, мы можем построить решение, которое получится по теореме Коши, поскольку мы можем определить C так, чтобы при $x = x_0$ было $y = y_0$, ведь условие

$$y_0 = \varphi(x_0, C),$$

вообще позволяет найти значение C для любого y_0.*/

Глава 4

Особое решение.

Переходим к исследованию особых решений дифференциального уравнения, то есть таких решений, которые не получаются из общего ни при каких частных значениях произвольного постоянного. Пусть дифференциальное уравнение дано в виде

$$y' = f(x, y) \tag{4.1}$$

88eq1

и пусть

$$y = \varphi(x)$$

— его решение. Придадим x какое-нибудь значение x_0 и вычисляем

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

По теореме Коши существует единственное решение уравнения (4.1), которое при $x = x_0$ принимает данное значение y_0, если только в окрестности значений x_0, y_0 функция $f(x, y)$ удовлетворяет известным ограничениям (непрерывность, условие Липшица). Таким образом, решение

$$y = \varphi(x)$$

вообще говоря, получается по теореме Коши и, следовательно, является частным, которое может быть получено из общего при частном значении произвольного постоянного. Если бы для выбранного значения x_0 и соответствующего y_0 функция $f(x, y)$ не удовлетворяла условиям теоремы Коши, то мы могли бы изменить x_0 и таким образом в конце концов все же получили бы $y = \varphi(x)$ как частное решение по теореме Коши. Отсюда ясно, что решение

$$y = \varphi(x)$$

не получается по теореме Коши и, следовательно, может быть особым только тогда, когда для *любого* x и для соответствующего $y = \varphi(x)$ функция $f(x, y)$ не удовлетворяет условиям теоремы Коши. Пусть, например, функция $f(x, y)$ для всех конечных значений аргументов непрерывна[1] и что существует непрерывная частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$. В этом случае, если $y = \varphi(x)$ — особое решение, то, принимая во внимание изложенное в предыдущем разделе, легко убедимся, что то для любого x и $y = \varphi(y)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ должна обращаться в бесконечность. В самом деле, в противном случае для какого-либо x_0 и $y_0 = \varphi(x_0)$ функция $f(x, y)$ удовлетворяла условиям Липшица и решение $y = \varphi(x)$ неизбежно было бы частным.

Пример 4.0.1. 1.

$$y' = \sqrt{y - x} + 1.$$

Здесь

$$f(x, y) = \sqrt{y - x} + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y - x}}.$$

По предыдущему, особе решение может получиться только из требования, чтобы $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращалась в бесконечность. Это нам дает

$$y = x.$$

При этом выборе функции $y(x)$ имеем

$$y' = 1,$$

поэтому эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению; следовательно, мы получили решение уравнения. Общее решение мы легко

[1]Можно показать, что непрерывности $f(x, y)$ достаточно для доказательства существования решения задачи Коши, но это решение, вообще говоря, не будет единственным [Peano R.].

получим, освобождая уравнение от радикала и замечая, что оно принадлежит к типу уравнений Лагранжа. Имеем

$$y = x + \frac{(x+C)^2}{4}.$$

Ни при каком постоянном значении C отсюда нельзя получить $y = x$, следовательно, это последнее решение является особым.

4.1 Первый способ отыскания особого решения.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение в более общем виде

$$F(x, y, y') = 0. \tag{4.2}$$ 90eq2

Разрешая его относительно производной y', мы имеем, вообще говоря, несколько значений y':

$$y' = f_i(x, y), \quad (i = 1,\ 2, \dots) \tag{4.3}$$ 90eq3

Пара значений x_0, y_0, следовательно, определяет здесь не одно решение, а несколько в силу той же теоремы Коши, так как мы можем эту теорему применять к любому из уравнений (4.3). Ограничимся такими уравнениями (4.2), для которых функция $F(x, y, y')$ конечна и непрерывна для всех конечных значений аргументов и допустим таковы же и производные по аргументам. В этом предположении определим условия, при которых решение

$$y = \varphi(x)$$

уравнения (4.2) может быть особым решением. По известной теореме теории функций уравнение (4.2) определяет y' как функцию x и y и эта функция $f(x, y)$ конечна, непрерывна и допускает такие же производные, если только для рассматриваемых значений аргументов частная производная $\frac{\partial F}{\partial y'}$ не равна нулю. В частности, производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ определяется из равенства

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, если для какого-либо x_0 и соответствующих

$$y_0 = \varphi(x_0) \text{ и } y' = \varphi'(x_0)$$

частная производная

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0,$$

то решение $y = \varphi(x)$ получается по теореме Коши, так как функция

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяет условиям этой теоремы. Отсюда заключаем, что если решение $y = \varphi(x)$ — особое, то для любого x и для

$$y = \varphi(x), y' = \varphi'(x)$$

должно удовлетворяться уравнение

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{4.4}$$

91eq4

Соотношение это имеет вид

$$\Psi(x, y, y') = 0,$$

и, следовательно, особое решение $y = \varphi(x)$ должно удовлетворять одновременно *двум* дифференциальным уравнениям (4.2) и (4.4). Отсюда ясно, что, вообще говоря, уравнение (4.2) не допускает особых решений.

Исключая y' из (4.2) и (4.4) придем к одному уравнению

$$R(x, y) = 0, \tag{4.5}$$

91eq5

которое должно удовлетворяться для $y = \varphi(x)$ в случае существования особого решения. Таким образом, равенство (4.5) в этом случае есть особый интеграл. Но, вообще говоря, соотношение (4.5) не есть вовсе интеграл уравнения (4.2), и y, определенное из уравнения (4.5), не удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Истолковывая x, y как Декартовы координаты на плоскости, скажем, что уравнение (4.5) определяет так называемую *дискриминантную кривую*. Уравнение этой кривой дает особый интеграл, если он существует. Для решения вопроса о его существовании из уравнения (4.5) определяем y и подставляем его в уравнение (4.2); если оно удовлетворяется, то найденное y — особое решение. Вообще говоря, дискриминантная кривая не является интегральной кривой и можно показать, что она представляет собой геометрическое место точек возврата интегральных кривых, определяемых уравнением общего интеграла.

Для особого решения, если оно существует, не трудно получить кроме названных уравнений (4.2) и (4.4) еще третье уравнение. В самом деле, продифференцируем по x уравнение (4.2) в предположении, что y заменено на функцию $y = \varphi(x)$; получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

или, принимая во внимание уравнение (4.4),

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{4.6}$$

92eq6

Таким образом, особое решение должно удовлетворять одновременно трем уравнениям (4.2), (4.4) и (4.6). Для произвольно заданного уравнения (4.2) три уравнения (4.2), (4.4) и (4.6), вообще говоря, удовлетворяются только для отдельных систем численных значений трех аргументов x, y, y', и, следовательно, мы не получаем особого решения. Условимся назвать систему значений x, y, y' *элементом*; тогда скажем, что уравнения (4.2), (4.4) и (4.6) определяют один или несколько элементов, которые назовем особыми элементами. Особое решение может получиться только тогда, когда из этих трех уравнений одно является следствием двух других, так как они определяют в этом случае многообразие элементов одного измерения. Не трудно непосредственно убедиться в том, что если система уравнений (4.2), (4.4) и (4.6) эквивалентна двум независимым уравнениям, так что x остается произвольным, а y и y' выражаются через x, то y' необходимо равно производной y по x, и мы получаем решение уравнения (4.2). Действительно, пусть из уравнений (4.2), (4.4) и (4.6) [следует]

$$y = \varphi(x), \quad y' = \psi(x).$$

Поставляя это в уравнение (4.2) и дифференцируя по x, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\psi'(x) = 0.$$

Принимая во внимание уравнение (4.4), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x) = 0,$$

сопоставляя это уравнение с уравнением (4.6), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x) = 0,$$

получаем $\psi(x) = \varphi'(x)$, то есть $y' = \frac{dy}{dx}$.

Заметим, что элементу можно дать простое геометрическое истолкование: понимая под x, y Декартовы координаты точки на плоскости, а y' — как тангенс угла наклона к оси x прямой, проходящей через точку $(x,\ y)$. Совокупность точки и проходящей через нее прямой определяется системой значений трех аргументов x, y, y'. Уравнения (4.2), (4.4) и (4.6) определяют, вообще говоря, различные элементы на плоскости. Если же получается целое многообразие одного измерения особых элементов, то их точки образуют кривую, а прямые элементов касаются этой кривой, что явствует из равенства

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Резюмируя предыдущее, имеем следующие два метода отыскания особых решений:

1) Из уравнений (4.2) и (4.4) исключаем y'; полученное уравнение (4.5) является особым интегралом, если y, определяемое им, удовлетворяет данному уравнению (4.2).

2) Берем уравнения (4.2), (4.4) и (4.6); если они эквивалентны двум уравнениям, так что при исключении y' получаем только одно уравнение между x и y, то это последнее является, вообще говоря, особым интегралом.

Получив тем или другим приемом решение $y = \varphi(x)$ мы должны еще проверить, будет ли оно действительно особым, а не частным решением, то есть не получится ли оно из общего при каком-либо частном значении произвольного постоянного.

Пример 4.1.1. 2.

$$y^2(1 + y'^2) - R^2 = 0.$$

Дифференцируя по y', имеем

$$2y^2y' = 0.$$

Исключая y', получаем

$$y^2 - R^2 = 0 \;\; \text{или} \;\; y = \pm R.$$

Дифференцируя по x, имеем $y' = 0$,то есть данное уравнение удовлетворяется, а значит, $y = \pm R$ — решение данного уравнения, притом решение особое, так как нетрудно проверить, применяя метод разделения переменных, что общий интеграл имеет вид

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2,$$

откуда не при каких значениях C мы не получим $y = \pm R$. Истолковывая x, y как Декартовы координаты на плоскости, мы видим, что общий интеграл определяет семейство кругов радиуса R с центром на оси Ox, а особый интеграл определяет пару прямых, параллельных оси Ox и проходящих от нее на расстоянии R. Очевидно, все круги касаются этих прямых.

Пример 4.1.2. 3. Рассмотрим произвольное линейное уравнение

$$P_0y' + P_1y + P_2 = 0,$$

где $P_0,\ P_1,\ P_2$ — функции x. Дифференцируя по y', получаем

$$P_0 = 0,$$

откуда для x получаем вполне определенные численные значения; таким образом, линейное уравнение не допускает особого решения.

4.2 Второй способ отыскания особого решения.

Рассмотрим какое-либо частное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (4.2). Докажем, что в числе его элементов

$$x,\ y = \varphi(x),\ y' = \varphi'(x)$$

необходимо находятся особые элементы. В самом деле, имеем тождество

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\varphi''(x) = 0. \tag{4.7}$$ 95eq7

Присоединим к нему равенство (4.4), которое по подстановке

$$y = \varphi(x),\ y' = \varphi'(x)$$

обращается в уравнение, содержащее только x, из которого найдем одно или несколько численных значений x, скажем, $x = a$, и затем соответствующих значений

$$y = \varphi(a),\ y' = \varphi'(a).$$

Для этих же значений равенство (4.7) обращается, в силу уравнения (4.4), в уравнение (4.6), и, таким образом, элемент

$$x = a,\ y = \varphi(a),\ y' = \varphi'(a)$$

является особым.

Предположим теперь, что уравнение (4.2) допускает особое решение; все элементы x, y, y' этого решения — суть особенные элементы. Прибегая к обычному геометрическому истолкованию, можем в этом случае сказать, что все интегральные кривые качаются интегральной кривой, определяемой уравнением особого интеграла. В самом деле, согласно предыдущему, всякое решение имеет общий элемент с особым решением, а это и значит, что определяемые этими решениями кривые соприкасаются и, следовательно, особая интегральная кривая есть огибающая всех прочих. На основании изложенного приходим к новому методу определения особого решения.

Пусть мы имеем общий интеграл

$$\varPhi(x, y, C) = 0 \tag{4.8}$$

96eq8

дифференциального уравнения (4.2). Равенство (4.8) определяет семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра C. Находим огибающую этого семейства, исключая C из двух уравнений (4.8) и

$$\frac{\partial \varPhi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{4.9}$$

96eq9

Поскольку в точках огибающей ее касательные совпадают с касательными кривых семейства, то элементы x, y, y' для огибающей — суть в то же время элементы различных частных решений, получаемых из (4.8). Следовательно, непосредственно ясно, что уравнение огибающей есть интеграл дифференциального уравнения (4.2), и притом интеграл, вообще говоря, особый, как это явствует из предыдущего.

Может, однако, случиться, что огибающая есть в тоже время одна из кривых семейства (4.8), тогда мы этим методом получим не особое решения, а частное. Наконец, возможно, что при исключении C из уравнений (4.8) и (4.9) мы не получим огибающей, а геометрическое место особых точек интегральных кривых; тогда дифференциальное уравнение на допускает особого решения.

Дадим независимое обоснование второму методу отыскания особого решения. Из общего интеграла (4.8) получаем общее решение:

$$y = \psi(x, C). \tag{4.10}$$

97eq10

Подставляя в дифференциальное уравнение, которое, допустим, дано в разрешенном виде (4.1), получим

$$\frac{\partial \psi(x, C)}{\partial x} = f(x, \psi(x, C)). \tag{4.11}$$

97eq11

Это равенство выполняется для любого значения постоянного C, а, следовательно, оно есть тождество. Введем вместо y новое переменное z, полагая

$$y = \psi(x, z). \tag{4.12}$$

97eq12

Уравнение (4.1) принимает вид:

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} z' = f(x, \psi(x, z)) \tag{4.13}$$

97eq13

и, следовательно, имеем окончательно

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} z' = 0. \tag{4.14}$$

97eq14

Отсюда или $z' = 0$, или

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} = 0. \tag{4.15}$$

98eq15

Первое предположение дает нам $z = \mathrm{Const}$ и, следовательно, приводит опять к общему решению (4.10). Второе предположение дает решение, которое получим, исключая z из двух уравнений (4.12) и (4.15). Вместо этого можем, конечно, исключить постоянное C из двух уравнений (4.10) и

$$\frac{\partial \psi(x, C)}{\partial C} = 0. \tag{4.16}$$

98eq16

Решение, которое получим, есть, вообще говоря, особое, так как оно не получается из общего при постоянном значении C. В самом деле, мы получим его, подставляя в (4.10) значение C, полученное из уравнения (4.16), откуда C выражается как функция C.

Если сохраним общий интеграл в виде (4.8), то производная $\frac{\partial\psi}{\partial C}$ определится, если мы продифференцируем (4.8) по C, считая y функций от x и C; получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \psi(x, C)}{\partial C} = 0,$$

и условие (4.16) приводит нас к требованию

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{4.17}$$

98eq9'

Таким образом, особый интеграл получается исключением C из двух уравнений (4.8) и (4.9), из которых второе получается дифференцированием первого по C. Истолковывая геометрически последний результат, придем к прежним геометрическим соотношениям.

Сопоставляя первый и второй метод, мы, по-видимому, приходим к противоречию: с точки зрения первого метода дифференциальное уравнение (4.1), вообще говоря, не допускает особого интеграла, с точки зрения второго метода особый интеграл вообще существует, так как семейство (4.8) интегральных кривых, вообще говоря, допускает огибающую. Парадокс этот разрешается, если заметим, что термин <вообще говоря> употребляется здесь в двух разных смыслах: в перовом случае <вообще говоря> значит для произвольно взятого дифференциального уравнения (4.2); во втором — для произвольно взятого общего интеграла (4.8).

[В заключении напомним еще раз, что] определяя особый интеграл тем или другим методом, мы должны в заключении проверить, будет ли полученный интеграл действительно особым, а не частным.

Пример 4.2.1. 4. Пусть дано соотношение

$$(y - C)^2 = (x - C)^2,$$

которое является общим интегралом дифференциального уравнения

$$x - y = \frac{4}{9}y'^2 - \frac{8}{27}y'^3.$$

Дифференцируя по C, имеем

$$2(y - C) = 3(x - C)^2.$$

Исключая C из двух уравнений имеем или

$$y - C = 0,\ x - C = 0,$$

или

$$x - C = \frac{4}{9},\ y - C = \frac{8}{27},$$

получаем

$$x - y = 0 \quad \text{или} \quad x - y = \frac{4}{27}$$

В первом предположении

$$y = x,\ y' = 1$$

и дифференциальное уравнение не удовлетворяется. Во втором предположении

$$y = x - \frac{4}{27},\ y' = 1$$

и дифференциальное уравнение удовлетворяется. Таким образом,

$$y = x - \frac{4}{27}$$

— решение, и при том особое, так как оно не получается из общего ни при каком постоянном значении C.

Геометрическое истолкование наших результатов следующее. Общий интеграл определяет семейство полукубических парабол, имеющих точки заострения на биссектрисе $x = y$ координатного угла xOy. В самом деле, при $C = 0$ получаем полукубическую параболу

$$y^2 = x^3;$$

все остальные получаются из нее при передвижении по направлению вышеупомянутой биссектрисы, так как точка заострения при любом C имеет координаты $x = C$, $y = C$. Прямая $x = y$, полученная при отыскании огибающей, не есть огибающая, а геометрическое место точек заострения интегральных кривых. Прямая $x - y = 4/27$, параллельная биссектрисе, является огибающей семейства (см. фиг. 2).

Пример 4.2.2. 5. Дифференциальное уравнение

$$9yy'^2 = 4$$

допускает общий интеграл

$$y^3 = (x - C)^2,$$

определяющий семейство полукубических парабол, имеющих точки заострения $(C,\ 0)$ на оси Ox (см. фиг. 3). Дифференцируя по C, имеем

$$-2C(x - C) = 0;$$

исключая C, получаем

$$y = 0$$

— уравнение оси Ox. Очевидно, эта прямая не является огибающей, а [представляет собой] геометрическое место точек заострения интегральных кривых. Дифференцируя $y = 0$, получаем $y' = 0$, и дифференциальное уравнение не удовлетворяется; таким образом, особого решения нет.

Пример 4.2.3. 6. Дифференциальное уравнение

$$y'^3 - 4xyy' + 3y^2 = 0$$

допускает общий интеграл

$$y = C(x - C)^2,$$

который определяет семейство парабол с диаметрами, параллельными оси Oy и с вершинами на оси Ox. Параметр параболы приближается к нулю по мере приближения вершины к началу координат, и при $C = 0$ мы получаем уравнение $y = 0$ оси Ox — параболы вырождаются в прямую (см. фиг. 4).

Дифференцируя по C, имеем

$$0 = (x - C)^2 - 2C(x - C),$$

или

$$(x - C)(x - 3C) = 0.$$

Отсюда или

$$x - C = 0, \quad \text{или} \quad x - 3C = 0.$$

Исключая C в первом предположении получаем

$$y = 0,$$

а во втором

$$y = \frac{4}{27}x^3.$$

дифференцируя по x, имеем в том и в другом случае соответственно

$$y' = 0 \quad \text{или} \quad y' = \frac{4}{9}x^2.$$

Данное дифференциальное уравнение удовлетворяется и, следовательно, мы получаем два решения. Но первое есть частное, так как получается из общего при $C = 0$, а второе — особое, так как не получается из общего ни при каком постоянном значении C. Уравнение $y = 0$ определяет ось Ox, которая, правда, является огибающей семейства парабол, определяемого общим интегралом, но в тоже время одна из парабол семейства (при $C = 0$); уравнение

$$y = \frac{4}{27}x^3$$

определяет кубическую параболу, которая есть огибающая семейства.

Глава 5

Интегрирование уравнений высших порядков.

Дифференциальное уравнение n-го порядка — это соотношение вида

$$F(x,\, y,\, y',\, y'', \dots,\, y^{(n)}) = 0, \tag{5.1}$$

108eq1

где $y',\, y'', \dots,\, y^{(n)}$ — производные от y. Докажем, что дифференциальное уравнение n-го порядка эквивалентно системе 1-го порядка. Для доказательства введем, новые функции $y_1,\, y_2, \dots,\, y_{n-1}$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, y_1,\, y_2, \dots,\, y_{n-1},\, \frac{dy_{n-1}}{dx}) = 0, \\ \frac{dy}{dx} = y_1,\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \dots,\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}. \end{cases} \tag{5.2}$$

108eq2-

Всего мы имеем n уравнений, и все они — первого порядка. Из (5.2) имеем:

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = y',$$

затем

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'',\ y_3 = \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

и так далее до

$$y_{n-1} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y^{(n-1)}$$

и, наконец,

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Поэтому первое уравнение системы (5.2) обращается в следующее:

$$F(x,\, y,\, y',\, y'', \dots,\, y^{(n)}) = 0,$$

то есть совпадает с данным уравнение (5.1).

Применяя к системе уравнений первого порядка (5.2) теорему Коши и замечая, что неизвестными функциями этой системы являются y и ее производные y', y'', $\ldots$, приходим к следующему результату: *Дифференциальное уравнение n-го порядка* (5.1) *допускает решение y, определяемое начальными условиями:*

$$\text{\textit{при} } x = x_0 \; y = y_0,\; y' = {y_0}',\ldots,\; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

где y_0, ${y_0}'$, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — заданные численные значения y и ее первых $(n-1)$ производных. При этом условия теорему Коши, очевидно, всегда выполняются для правых частей всех уравнений системы (5.2), кроме первого. Поэтому остается только применить их к правой части уравнения

$$F(x,\, y,\, y_1,\, y_2,\ldots,\, y_{n-1},\, \frac{dy_n}{dx}) = 0$$

после разрешения его относительно производной $\frac{dy_{n-1}}{dx}$, или, что тоже, к правой части уравнения (5.1) после разрешения его относительно n-ой производной $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n-1)}). \tag{5.3}$$

109eq4

Таким образом, функция f в правой части уравнения (5.3) должна быть конечной, непрерывной и должна удовлетворять условиям Липшица в некоторой области изменения аргументов x, y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$, к которой принадлежит система значений x_0, y_0, ${y'}_0$, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$.

Определяемое начальными данными решение y будет единственным, если уравнение (5.1) дает единственное значение (5.3) для $y^{(n)}$, если же из уравнения (5.1) имеем различные значения

$$y^{(n)} = f_i(x,\, y,\, y',\ldots,\, y^{(n-1)}), \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{5.4}$$

110eq5

то каждому уравнению (5.4) или, иначе говоря, каждому значению

$$y_0^{(n)} = f_i(x_0,\, y_0,\, {y_0}',\ldots,\, y_0^{(n-1)})$$

соответствует свое решение y.

Предполагая, что начальные данные y_0, $y'_0, \dots,$ $y_0^{(n-1)}$ (при данном численном значении x_0) — произвольные параметры, мы видим, что соответствующее решение

$$y = \psi(x,\, y_0,\, {y_0}',\dots,\, y_0^{(n-1)})$$

зависит от выбора этих параметров и, являясь, таким образом, функцией x и n произвольных параметров, есть общее решение, из которого получаются все решения, отвечающие теореме Коши, при различных значениях этих параметров. Отсюда ясно, что какой-либо интеграл

$$\varPhi(x,\, C_1,\, C_2,\dots,\, C_n) = 0 \tag{5.5}$$ 110eq6

уравнения (5.1), содержащий n произвольных постоянных, если эти постоянные можно определить так, чтобы при $x = x_0$ иметь

$$y = y_0,\ y' = {y_0}',\dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

для любых y_0, ${y_0}',\dots,$ $y_0^{(n-1)}$. Дифференцируя (5.5) $(n-1)$ раз и заменяя x через x_0, приходим к системе

$$\begin{cases} \varPhi(x_0,\, y_0,\, C_1,\, C_2,\dots,\, C_n) = 0, \\ \frac{\partial\varPhi}{\partial x}\Big|_{x=x_0,\, y=y_0} + \frac{\partial\varPhi}{\partial y}\Big|_{x=x_0,\, y=y_0} {y_0}' = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial^{n-1}\varPhi}{\partial x^{n-1}}\Big|_{x=x_0,\, y=y_0} + \frac{\partial\varPhi}{\partial y}\Big|_{x=x_0,\, y=y_0} y_0^{(n-1)} = 0, \end{cases}$$

которая, согласно предыдущему, должна быть разрешима относительно $C_1,\ C_2,\dots,\ C_n$. Таким образом, получаем критерий независимости постоянных в интеграле (5.5), который уже был дан в начале курса.

Если общий интеграл (5.5) продифференцируем k раз $(k < n)$ и из полученной системы $k+1$ уравнения исключим k постоянных $C_1,\, C_2,\dots,\, C_k$, то получим соотношение

$$\Psi(x,\, y,\dots,\, y^{(k)},\, C_{k+1},\dots,\, C_n) = 0, \tag{5.6}$$ 111eq7

содержащее производные y до k-го порядка и $(n-k)$ произвольных постоянных $C_{k+1},\dots,\, C_n$. Соотношение (5.6) выполняется для общего решения y уравнения (5.1) и называется *промежуточным интегралом* k-го порядка.

Если бы для уравнения (5.1) мы нашли промежуточный интеграл $n-1$ порядка или так называемый первый интеграл

$$\Psi(x,\ y, \ldots,\ y^{(n-1)},\ C_1) = 0, \tag{5.7}$$ 111eq8

для этого интеграла, рассматривая его как дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка, его первый интеграл

$$\Psi_1(x,\ y, \ldots,\ y^{(n-2)},\ C_1,\ C_2) = 0, \tag{5.8}$$ 111eq9

и т.д., то мы пришли бы, в конце концов, у общему интегралу

$$\Phi(x,\ C_1,\ C_2, \ldots,\ C_n) = 0$$

данного уравнения (5.1).

5.1 Дифференциальные уравнение с двумя аргументами

5.1.1 Случай 1: $F(x, y^{(n)}) = 0$

Применим указанный прием к уравнению вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Выполняя квадратуру, найдем

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1.$$

Полученный интеграл есть промежуточный; повторяя квадратуру, найдем промежуточный интеграл

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1}{1}x + C_2$$

и так далее и, наконец, найдем

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int \dots \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_n.$$

Итак, мы нашли общий интеграл данного дифференциального уравнения n-го порядка. Покажем, что n-кратную квадратуру можно заменить простой квадратурой. Назовем эту квадратуру через y, то есть положим

$$Y = \int\limits_{x_0}^{x} dx \int \dots \int\limits_{x_0}^{x} dx \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx$$

Это выражение есть ничто иное, как частное решение, когда все C_i равны нулю. Это частное решение, очевидно, при $x = x_0$ обращается в нуль; легко видеть, что и производные $Y', Y'', \dots, Y^{(n-1)}$ при $x = x_0$ равны нулю, так как все они выражаются квадратурами с пределами x_0 и x. Таким образом, по теореме Коши Y вполне определяется, во-первых, тем, что оно удовлетворяет данному дифференциальному уравнению и, во-вторых, начальным условиям:

$$\text{при } x = x_0 \quad Y = 0,\ Y' = 0, Y'' = 0, \dots, Y^{(n-1)} = 0.$$

С другой стороны рассмотрим выражение

$$Z = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Дифференцируя по x, имеем

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{n-1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-2}dt + \left[\frac{1}{(n-1)!} f(t)(x-t)^(n-1)\right]_{t=x}$$

или

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-2}dt$$

Аналогично

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = \frac{1}{(n-3)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-3}dt$$

и так далее; наконец,

$$\frac{d^{n-1}Z}{dx^{n-1}} = \frac{1}{(n-3)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \text{и} \quad \frac{d^nZ}{dx} = f(x).$$

Таким образом, Z — решение данного уравнения; кроме того из предыдущего явствует, что при $x = x_0$

$$Z = 0,\ Z' = 0, \quad Z^{(n-1)} = 0.$$

Следовательно, по теореме Коши Z совпадает с Y и мы имеем общее решение данного уравнения в виде

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + C_n.$$

Рассмотрим теперь более общее в сравнении с предыдущим уравнение

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \tag{5.9}$$

113eq1

Если его разрешить относительно y^n, то получится уравнение прежнего вида. Но может случиться, что оно не разрешается удобным образом относительно производной, но легко разрешается относительно x или вообще x и $y^{(n)}$ выражаются как функции одного параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t);$$

тогда эти уравнения будут равносильны уравнению (5.9). Эти уравнения мы можем проинтегрировать рядом квадратур. Постараемся выразить и y в виде функции этого параметра. Мы имеем

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt, \quad y^{n-1} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Произвольную постоянную подразумеваем под знаком квадратуры. Далее, мы можем найти $(n-2)$-ую производную

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = [\int \psi(t)\varphi'(t)dt]\varphi'(t)dt$$

и т.д. Вообще, продолжая так дальше мы дойдем до y и, таким образом, выразим x и y как функции параметра t, то есть

$$x = \varphi(t), \quad y = \varPhi(t, C_1, \ldots, C_n);$$

всего произвольных постоянных n, так как при каждой квадратуре мы будем получать по одному постоянному. Исключив параметр t из двух уравнений, мы получим соотношение между x и y, которое и будет общим интегралом.

5.1.2 Случай 2: $F(y^n, y^{(n-1)}) = 0$

Переходим теперь к уравнению следующего вида:

$$F(y^n, y^{(n-1)}) = 0, \tag{5.10}$$

115eq3

в котором порядок одной производной на единицу отличается от порядка другой. Предположим, что обе производные выражаются как функции вспомогательного параметра t

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-1)} = \psi(t), \tag{5.11}$$

115eq4

причем в частности параметр t может совпадать с одной из производных, например, с $(n-1)$-ой производной, если уравнение (5.10) разрешимо относительно $y^{(n)}$. Мы рассмотрим общий случай. Наша задача представить x и y как функции параметра t. Поступаем по предыдущему:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, \quad \psi'(t)dt = \varphi(t)dx,$$

откуда

$$dx = \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}dt;$$

x найдем квадратурой

$$x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt,$$

произвольное постоянное заключается в знаке квадратуры. Находим $(n-2)$-ую производную:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \psi(t) \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

Откуда квадратурой находим

$$y^{(n-2)} = \int \psi(t) \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt;$$

вообще, если какая-нибудь производная k-го порядка выражается через t, то производная $(k-1)$-го порядка найдется через t из условия

$$dy^{(k-1)} = y^{(k)} dx$$

квадратурой. Продолжая далее, дойдем, наконец, до y, которое будет выражено через t. Следовательно, x и y будут выражены через t. Исключая t, мы получим общий интеграл. Произвольных постоянных всего войдет n.

5.1.3 Случай 3: $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$

Переходим теперь к третьему виду уравнений с двумя аргументами, где порядок производных разнится на две единицы:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0, \tag{5.12}$$

116eq5

причем предполагается, что оба аргумента выражаются через параметр t, то есть

$$y^{(n)} = \varphi(t), \quad y^{(n-2)} = \psi(t). \tag{5.13}$$

116eq6

И в этом случае представим x и y как функции параметра t. Как и в предыдущих случаях, мы пишем ряд соотношений:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx.$$

Теперь мы пишем оба равенства одновременно, так как одного было бы не достаточно. Взяв оба, мы делением исключаем dx:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dy^{(n-2)}} = \frac{y^{(n)}}{y^{(n-1)}}, \quad y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}.$$

Правая часть выражается через t и равна

$$y^{(n)}dy^{(n-2)} = \varphi(t)\psi'(t)dt.$$

Теперь уже $t^{(n-1)}$ легко выражается через t. Уравнение

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = \varphi(t)\psi'(t)dt$$

является дифференциальным уравнением, где переменные разделены. Выполняя квадратуру, находим:

$$\frac{1}{2}\left(y^{(n-1)}\right)^2 = \int \varphi(t)\psi'(t)dt,$$

или

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt}$$

где произвольное постоянное подразумевается в знаке интеграла. Выразив $(n-1)$-ую производную через t, не трудно затем выразить и x через t. Из равенства

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$$

находим

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}};$$

подставляя сюда значение $dy^{(n-1)}$, получим

$$dx = \frac{\varphi(t)\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt}\,\varphi(t)}.$$

Выполняя квадратуру, найдем x

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int \varphi(t)\psi'(t)dt}},$$

произвольное постоянное заключается в знаке интеграла. Теперь остается выразить y через параметр t. Производные $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$ выражены через t, нужно выразить дальнейшие $y^{(n-3)}$ и т.д.; поступаем обычным путем:

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int\varphi(t)\psi'(t)dt}}.$$

Отсюда квадратурой находим

$$y^{(n-3)} = \int\frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\sqrt{2\int\varphi(t)\psi'(t)dt}}.$$

Вообще, если имеем $y^{(k)}$, то

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx$$

и квадратурой найдем $y^{(k-1)}$. Поступая таким образом далее, наконец, дойдем до y, которое будет выражено как функция параметра t. Следовательно, x и y будут выражены как функции параметра t. Исключая t, найдем соотношение между x и y, которое и будет общим интегралом, поскольку в него войдет всего n произвольных постоянных.

5.1.4 Уравнения второго порядка

Проиллюстрируем разобранные выше случаи уравнениями второго порядка

$$F(y'', x) = 0, \quad F(y'', y') = 0, \quad F(y'', y) = 0. \tag{5.14}$$ 118eqI-

К этим уравнениям применимы все вышеуказанные приемы. Кроме того, к этим уравнениям могут быть применены и частные приемы. Так первое и второе уравнение мы можем сейчас же привести к уравнениям первого порядка.

Обратимся к первому уравнению

$$F(y'', x) = 0. \tag{5.15}$$ 118eqI

Положим
$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx};$$
уравнение принимает вид
$$F\left(\frac{dp}{dx}, x\right) = 0;$$
таким образом, мы получили уравнение 1-го порядка одного из рассмотренных выше типов. Интегрируя его, найдем общий интеграл
$$\varPhi(p, x, C) = 0 \quad \text{или} \quad \varPhi\left(\frac{dy}{dx}, x, C\right) = 0.$$
Это будет то, что мы назвали промежуточным интегралом. В данном случае это уравнение 1-го порядка того же типа.

Обращаемся к уравнению
$$F(y'', y') = 0. \tag{5.16}$$
118eqII

Положим
$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx};$$
уравнение примет вид
$$F\left(\frac{dp}{dx}, p\right) = 0;$$
таким образом, мы получили уравнение 1-го порядка одного из рассмотренных выше типов. Проинтегрировав его, получим промежуточный интеграл
$$\varPhi(p, x, C) = 0, \text{ где } p = \tfrac{dy}{dx}.$$
Интегрируя этот последний, получим общий интеграл.

Обращаемся, наконец, к последнему типу:
$$F(y'', y) = 0. \tag{5.17}$$
118eqII

Непосредственно мы не можем свести его к уравнению 1-го порядка. В этом случае поступим так: будем считать y за независимое переменное, а

p рассмотрим как функцию y; при таком подходе мы сейчас же приведем данное уравнение к уравнению 1-го порядка. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy};$$

уравнение примет вид

$$F\left(p\frac{dp}{dy}, y\right) = 0.$$

Это уравнение уже 1-го порядка, хотя, по-видимому, более сложного типа, так как содержит p, $\frac{dp}{dy}$ и y. Не трудно, однако, его заменить уравнением более простого вида, следует только ввести новое переменное, положив

$$\frac{1}{2}p^2 = u.$$

Тогда

$$p\frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy}$$

и уравнение упростилось до

$$F\left(\frac{dy}{dy}, y\right) = 0.$$

Оно — 1-го порядка и содержит только производную и независимую переменную. Промежуточным интегралом будет

$$\varPhi(u, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \varPhi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, y, C\right) = 0.$$

Это уравнение первого порядка, не содержащее независимого переменного.

Заметим, что уравнение (5.17) допускает еще один непосредственный метод интегрирования, если уравнение разрешимо относительно второй производной. Именно, если дано уравнение

$$y'' = f(y),$$

то помимо общего приема, можно поступить так: умножим обе части уравнения на $y'dx$:

$$y''y'dx = y'f(y)dx \quad \text{или} \quad y'dy' = f(y)dy.$$

Переменные разделены; интегрированием находим:

$$\frac{1}{2}(y')^2 = \int f(y)dy, \quad y' = \sqrt{2\int f(y)dy}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(y)dy}, \quad dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy}}.$$

Интегрируя, находим

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy}}.$$

Это равенство и представляет общий интеграл.

Заметим, кстати, что методом, указанным для уравнений 2-го порядка, мы можем воспользоваться и для уравнений любого порядка с двумя аргументами. Так мы могли бы в третьем случае заменить уравнение

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$$

на уравнение второго порядка

$$F(p'', p) = 0,$$

положив $y^{(n-2)} = p$. Проинтегрировав его, получим

$$\varPhi(p, x, C_1, C_2) = 0,$$

то есть мы привели уравнение к 1-му виду, понизив его порядок при этом на 2 единицы.

Пример 5.1.1. Уравнение

$$x = e^{y''} + y''$$

принадлежит к первому из рассмотренных типов и при том разрешено относительно x. Обозначим $y'' = t$, тогда

$$x = e^t + t, \quad dx = (e^t + 1)dt, \quad dy' = y''dx = (te^t + t)dt;$$
$$y' = \int (te^t + t)dt = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1.$$

Определяем теперь y

$$dy = y'dx = \left(te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + C_1\right)(e^t + 1)dt.$$

Выполняя квадратуру, находим y:

$$y = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} - \frac{1}{2}t^2e^t + (C_1 - 1)e^t + \frac{1}{6}t^3 + C_1t + C_2.$$

Таким образом, x и y мы выразили как функции вспомогательного параметра t. Исключив t из них, мы получим соотношение между x и y и двумя постоянными C_1 и C_2.[1]

Пример 5.1.2. Уравнение

$$y'' = k^2y,$$

где k — постоянно. Умножив обе части на y', получим

$$2y'y'' = 2k^2yy'$$

или, по умножении двух частей на dx:

$$2y'dy' = 2k^2ydy, \quad (y')^2 = k^2y^2 - C^2.$$

Отсюда находим

$$y' = \sqrt{k^2y^2 - C^2}$$

или

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 - C^2}}.$$

x находится квадратурой

$$x + C' = \int \frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 - C^2}}.$$

Эта квадратура выполняется в гиперболических функциях: подставляя

$$ky = C\mathrm{ch}\varphi$$

[1]Едва ли это исключение выражается в элементарных функциях, поскольку для него нужно выразить t через x из уравнения $x = e^t + t$.

имеем

$$kdy = C\mathrm{sh}\varphi\, d\varphi, \quad x + C' = \int \frac{d\varphi}{k} = \frac{\varphi}{k}.$$

Остается подставить вместо φ его значение $\varphi = \mathrm{arcch}(ky/C)$. Имеем

$$\mathrm{ch}(k(x + C')) = \mathrm{ch}\varphi = \frac{ky}{C},$$

отсюда

$$y = \frac{C}{k} \frac{e^{k(x+C')} + e^{-k(x+C')}}{2} = \frac{Ce^{kC'}}{2k} e^{kx} + \frac{Ce^{-kC'}}{2k} e^{-kx} = Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

где A и B — две новые постоянные.

5.2 Дифференциальные уравнения, не содержащие функции

Рассмотрим уравнение n-го порядка, в которое не входит непосредственно искомая функция y, то есть уравнение вида

$$F(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ y^{(n-2)}, \ldots, y', x) = 0. \tag{5.18}$$

122eq1

В этом случае мы можем понизить порядок уравнения на единицу.

Положим $y' = p$, тогда будем иметь

$$F\left(\frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}},\ \frac{d^{n-2}p}{dx^{n-2}},\ \frac{dp}{dx}, p, x\right) = 0.$$

Это уравнение уже $(n-1)$-го порядка. Если бы мы проинтегрировали его, то нашли бы промежуточный интеграл

$$\varPhi(p, x, C_1, \ldots, C_{n-1}) = 0$$

первоначального уравнения. Остается проинтегрировать этот интеграл:

$$\varPhi\left(\frac{dy}{dx}, x, C_1, \ldots, C_{n-1}\right) = 0.$$

Сделав это, найдем общий интеграл, куда войдет n произвольных постоянных.

Пусть далее в уравнение не входит и производные ниже k-го порядка, то есть уравнение имеет вид

$$F(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ y^{(n-2)},\dots,y^{(k)},x)=0. \tag{5.19}$$

123eq2

Тогда, полагая $y^{(k)}=p$, мы уравнение представим так

$$F\left(\frac{d^{n-k}p}{dx^{n-k}},\ \frac{d^{n-k-1}p}{dx^{n-k-1}},\ \frac{dp}{dx},p,x\right)=0.$$

Порядок этого уравнение ниже порядка данного уравнения на k единиц. Если бы мы нашли его общий интеграл, то он был бы промежуточным интегралом k-го порядка:

$$\varPhi(p,x,C_1,\dots,C_{n-k})=0,$$

куда входило бы $(n-k)$ произвольных постоянных. Проинтегрировав его, мы найдем общий интеграл данного уравнения. Всего постоянных будет $(n-k)$ от первого интегрирования и k от второго, то есть всего $n-k+k=n$ произвольных постоянных.

5.3 Дифференциальные уравнения, не содержащие независимого переменного

Переходим к новому типу дифференциального уравнения, в которой входит n производных и сама функция, но не входит независимое переменное:

$$F(y^{(n)},\ y^{(n-1)},\ y^{(n-2)},\dots,y',y)=0. \tag{5.20}$$

123eq3

Принимаем $y'=p$, а y считаем за независимую переменную, тогда

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},\quad y'''=\frac{dy''}{dx}=p\frac{dy''}{dy}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,\dots$$

Поступая так далее, легко видеть, что каждая производная y-ка по x выразиться через производные p по y:

$$y^{(k)}=\varPhi_k\left(p,\frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2},\dots\frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}\right),$$

и данное уравнение представится так

$$\Psi\left(\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}, \frac{d^{n-2}p}{dy^{n-2}}, \dots \frac{dp}{dy}, p, y\right) = 0.$$

Получили уравнение $(n-1)$-го порядка. Если бы мы его проинтегрировали, то получили бы промежуточный интеграл вида

$$\Phi(p, y, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0.$$

Интегрируя его, введем еще одно постоянное и получим общий интеграл данного уравнения.

Разберем для примера уравнение второго порядка вида

$$F(y'', y', y) = 0.$$

Применим к нему указанные преобразования. Положим

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Уравнение принимает вид

$$F\left(p\frac{dp}{dy}, p, y\right) = 0.$$

Проинтегрировав его, найдем

$$\Phi(p, y, C_1) = 0,$$

где $p = y'$. Это — промежуточный интеграл. Его интегрирование вводит еще одно постоянное C_2 и доставляет общий интеграл данного уравнение.

5.4 Однородные уравнения

5.4.1 Уравнение, однородное относительно y и ее производных

Обращаемся к рассмотрению нового типа уравнения, а именно

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где F — однородная функция относительно y и производных, когда x рассматривается как параметр. Напр., уравнение

$$yy'' - x(y')^2 = 0$$

однородно относительно y, y', y''. Мы можем понизить порядок уравнения такого типа на единицу, как только введем новое переменное. Полагаем

$$y = e^{\int z dx},$$

тогда

$$y' = e^{\int z dx} z = yz$$

или $z = y'/y$. Далее

$$y'' = e^{\int z dx}\left(z^2 + z'\right), \quad y''' = e^{\int z dx}\left(z^3 + 3zz' + z''\right)$$

и так далее; в каждой после преобразования, экспонента $\exp \int z dx$ войдет общим множителем. Пусть, вообще,

$$y^{(k)} = e^{\int z dx} \Phi_{k-1}[z],$$

где $\Phi_{k-1}[z]$ есть дифференциальное выражение, составленное из z и ее производных до $(k-1)$-го порядка. Дифференцируя, имеем

$$y^{(k+1)} = e^{\int z dx}\left(z\Phi_{k-1}[z] + \frac{d}{dx}\Phi_{k-1}[z]\right) = e^{\int z dx}\Phi_k[z],$$

следовательно, этот закон составления — общий. Подставляем значение найденных производных в данное уравнение. Все они имеют общий множитель $\exp \int z dx$, который в некоторой степени выйдет общим множителем из функции F в следствии ее однородности, поэтому получим

$$e^{m\int z dx} F(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \Phi_{n-1}[z]) = 0.$$

Сокращая на $\exp m \int z dx$, мы будем иметь уравнение вида

$$\Psi(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Порядок преобразованного уравнения на единицу меньше порядка данного уравнения. Проинтегрировав его, получим выражение z, а y найдется квадратурой. Всех постоянных будет n.

Пример 5.4.1. Применим изложенный метод к уравнению

$$yy'' - x(y')^2 = 0.$$

Вводим новое переменное:

$$y = e^{\int z dx},$$

тогда

$$y' = e^{\int z dx} z, \quad y'' = e^{\int z dx}\left(z^2 + z'\right),$$

подставляя это в данное уравнение, получим

$$z^2 + z' - xz^2 = 0.$$

Это уравнение можно записать как

$$\frac{dz}{dx} = z^2(x-1)$$

и в нем переменные разделены:

$$\frac{dz}{z^2} = (x-1)dx,$$

поэтому его интеграл дается квадратурой

$$\frac{1}{z} + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{C_1}{2} = 0.$$

Отсюда

$$z = \frac{2}{C_1 - (x-1)^2}, \quad y = \exp \int \frac{2dx}{C_1 - (x-1)^2}.$$

Полагая

$$C_1 = a^2, \quad x - 1 = t,$$

имеем

$$\int \frac{2dx}{C_1 - (x-1)^2} = \int \frac{2dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a} \ln \frac{a+t}{a-t} + C_2, \quad (a = \sqrt{C_1}).$$

Подставляя, окончательно имеем

$$y = \exp \frac{1}{a} \ln \frac{a+t}{a-t} + C_2 = b \sqrt[a]{\frac{a+t}{a-t}},$$

где a и b — произвольные константы.

Сделаем одно замечание по поводу этого типа уравнений: покажем, что если однородному уравнению удовлетворяет какое-нибудь частное решение $y = \varphi(x)$, то ему будет удовлетворять и решение $y = C\varphi(x)$, где C — произвольное постоянное.

В самом деле, если мы заменим y через Cy, тогда y' замениться через Cy' и т.д. Все производные множатся на один и тот же множитель C, но по предположению уравнение однородно, следовательно от умножения $y, y', y'', \dots$ на C все уравнение умножится на C^m:

$$F(x, Cy, Cy', Cy'', \dots) = C^m F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Отсюда видно, что есть уравнение удовлетворяется при $y = \varphi(x)$, то оно удовлетворяется и при $y = C\varphi(x)$, и что одно из произвольных постоянных должно входить в общий интеграл в виде множителя.

5.4.2 Уравнение, однородное относительно x, y и их дифференциалов

Рассмотрим еще уравнение однородное относительно x, y и их дифференциалов. Заметим, что

$$y^k = \frac{d^k y}{dx^k};$$

поэтому всякое уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

можно рассматривать как уравнение в дифференциалах

$$G(x, y, dx, dy, dy^2, \dots, d^n y) = 0.$$

Напр., если бы нам было дано уравнение

$$x^2 y'' + yy' + 2y = 0,$$

то умножив его на квадрат дифференциала dx, найдем

$$x^2 d^2 y + ydxdy + 2ydx^2 = 0.$$

Это соотношение представлено в дифференциальной форме. Займемся теперь рассмотрением уравнения однородного относительно $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$. Покажем, что порядок такого уравнения может быть понижен на единицу.

Заметим, что если x, y заменить на Cx, Cy, то оно удовлетвориться попрежнему. Действительно, при умножении x и y на C и все дифференциалы получать общий множитель C: dx обратиться в Cdx и т.д., но, поскольку уравнение однородное относительно всех аргументов, то в уравнении появится общий множитель C^m, где m — показатель однородности, и на C^m мы можем уравнение сократить. Следовательно, уравнение удовлетвориться по-прежнему.

Принимая во внимание это замечание, введем новое переменное u, положив

$$u = \frac{y}{x}.$$

Переменное u не измениться, если мы совершим предшествующую замену. Если мы введем u вместо x, то новое уравнение будет обладать таким свойством: оно допускает замену y через Cy, когда u остается без изменения. Таким свойством обладают, как мы видели, однородные уравнения и это свойство типическое для однородных уравнений. Следовательно, преобразованное уравнение однородное и его порядок можно понизить на единицу. Мы можем дать и ту подстановку, которая прямо приведет к цели:

$$x = e^z, \quad y = e^z u,$$

тогда

$$dx = e^z dz,\ dy = e^z(udz + du),\ d^2y = e^z(udz^2 + 2dudz + d^2u), \ldots$$

Всюду e^z будет общим множителем. Подставим эти значения в данное уравнение, тогда e^{mz} выйдет общим множителем, сократим на него уравнение. Получим дифференциальное уравнение между u и z, не содержащее переменного z. Мы приходим, таким образом, к уравнению уже разобранного типа, которое допускает понижение порядка.

Обращаемся к примеру, который уже был упомянут:

Пример 5.4.2. Дано

$$x^2y'' + yy' + 2y = 0.$$

Полагаем

$$x = e^z, \quad y = ue^z,$$

имеем

$$dx = e^z dz,\ dy = e^z(udz + du),\ d^2y = e^z(udz^2 + 2dudz + d^2u)$$

и

$$y' = \frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dz}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (u + \frac{du}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2})e^{-z}$$

Подставляем в данное уравнение эти значения:

$$e^z(u + u' + u'') + e^z u(u + u') + 2e^z u = 0.$$

Сокращаем все уравнение на e^z:

$$u'' + u' + uu' + u^2 + 3u = 0.$$

Получили уравнение 2-го порядка, куда не входит независимое переменное. Его порядок, может быть понижен на единицу. Для этого полагаем

$$u' = p, \quad u'' = \frac{dp}{dz} = p\frac{dp}{du},$$

уравнение принимает вид

$$p\frac{dp}{du} + p + up + u^2 + 3u = 0.$$

Это уравнение — 1-го порядка относительно p.

Иногда приводит к цели и такая подстановка более общего характера

$$x = e^z, \quad y = e^{mz}u,$$

тогда

$$y' = e^{(m-1)z}(mu + \frac{du}{dz}), \dots$$

Если уравнение однородно, когда мы считаем x 1-го измерения, y — m-го, y' — $(m-1)$-го измерения и т.д., то при подстановке экспоненты уходят и мы получаем уравнение, не содержащее независимого переменного.[2]

[2]Говорят, что функция $\varphi(x_1, \dots x_n)$ однородная относительно $x_1, \dots x_n$ с измерениями $m_1, \dots, m_n$,

если

$$\varphi(\lambda^{m_1} x_1, \ldots \lambda^{m_n} x_n) = \lambda^m \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$