ISSN 2225-6717

Доклады Независимых Авторов

Периодическое многопрофильное печатное научно-техническое издание

Выпуск № 51

2021

The Papers of independent Authors

volume 51, in Russian, 2021

Опубликовано 08.03.2021
Напечатано в США, Lulu Inc., ID 5d99wm
ISBN 978-1-68471-567-1
EAN-13 9772225671006
ISSN 2225-6717
Сайт со сведениями для автора -
http://dna.izdatelstwo.com
Контактная информация -
publisherdna@gmail.com
Адрес: POB 15302, Bene-Ayish, Israel, 0060860
Художник - Гельфанд Л.М.
Фотографии для обложки были в свободном доступе в Интернете.

Передается и регистрируется в национальных библиотеках
- **России -** Российская национальная библиотека, Российская государственная библиотека, ВИНИТИ
- **Израиля -** The National Library of Israel,
- **США -** The Library of Congress USA.

Истина – дочь времени, а не авторитета.
Френсис Бэкон

Каждый человек имеет право на свободу убеждений и на свободное выражение их; это право включает свободу беспрепятственно придерживаться своих убеждений и свободу искать, получать и распространять информацию и идеи любыми средствами и независимо от государственных границ.
Организация Объединенных Наций.
Всеобщая декларация прав человека. Статья 19

От издателя

"Доклады независимых авторов" - многопрофильный научно-технический печатный журнал на русском языке. Журнал принимает статьи к публикации из России, стран СНГ, Израиля, США, Канады и других стран. При этом соблюдаются следующие правила:

1) статьи не рецензируются и издательство не отвечает за содержание и стиль публикаций,
2) автор оплачивает публикацию,
3) журнал регистрируется в международных классификаторах книг (ISBN) и журналов (ISSN), идентифицируется кодом DOI, передается и регистрируется в национальных библиотеках России, Израиля, США. Этим обеспечивается приоритет и авторские права автора статьи.
4) коммерческие права автора статьи сохраняются за автором,
5) журнал издается в США,
6) печатный журнал продается, а в электронном виде распространяется бесплатно.

Этот журнал - для тех авторов, которые уверены в себе и не нуждаются в одобрении рецензента. Нас часто упрекают в том, что статьи не рецензируются. Но институт рецензирования не является идеальным фильтром - пропускает неудачные статьи и задерживает оригинальные работы. Не анализируя многочисленные причины этого, заметим только, что, если плохие статьи может отфильтровать сам читатель, то выдающиеся идеи могут остаться неизвестными. Поэтому мы - за то, чтобы ученые и инженеры имели право (подобно писателям и художникам) публиковаться без рецензирования и не тратить годы на "пробивание" своих идей.

Хмельник С.И. *2005*

Содержание

Серия: **МАТЕМАТИКА**

Чуличков О.Г.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8178-8041

О способах представления чисел

Аннотация

В статье приведены аргументы к полемике с некоторыми тезисами теории множеств, предложенной Г. Кантором.

Содержание

1. Вместо предисловия

В своей работе «Об одном свойстве совокупности всех действительных чисел» Г. Кантор писал, что его «теорема … оказывается основанием того, почему совокупность всех действительных числовых величин, образующую так называемый континуум (например, совокупность всех действительных чисел, которые ≥ 0 и ≤ 1), нельзя однозначно отобразить на совокупность (ν)» [1, стр.19]. Через (ν) он обозначал множество целых упорядоченных чисел (1, 2, 3, …). В этой работе он начал формирование особого способа доказательства, который в последствие получил название диагонального метода Кантора. С тех пор после его работ, т. е. с конца XIXв., в математике вошло в норму утверждение о том, что диагональным методом Кантора может быть доказана, например, несчетность множества действительных чисел. Кроме этого, данный метод был задействован в XX в. при доказательстве весьма значимых для всей математики теорем.

В самом начале 2020-го года вышла в свет моя книга «Математические основания философии Ноосферы» [4,5], в которой была приведена публикуемая ниже теорема и ее следствия. Фактически она является основанием для признания диагонального метода Г. Кантора математически некорректным способом аргументации.

Несмотря на то, что теорема была уже мной опубликована, необходимость данной статьи связана с тем, что в книге были допущены опечатки и незначительные ошибки, а также потребовалось содержательно уточнить правомерность некоторых выводов, следующих из нее. Кроме того, здесь впервые публикуются аргументы, опровергнуть которые апологетам метода не позволят законы математики.

2. Теорема о счетности положительных чисел позиционного счисления меньших единицы

Поскольку и пока множество чисел натурального ряда с нулем является счетным, постольку и до тех пор множество положительных (дробных) чисел десятичного позиционного счисления меньших единицы является счетным.

Для доказательства теоремы следует указать способ установления биекции между элементами натурального ряда и дробными числами на полуинтервале [0; 1), выраженными в десятичном счислении.

Введем определение.

Операцией зеркального отображения произвольного слова C_k:

$$C_k = a_k a_{k-1} \ldots a_3 a_2 a_1,$$

состоящего из k ($k = 1,2,3,\ldots$) букв конечного алфавита A_m

$$\{A_m\} = \text{Б}_1,\ \text{Б}_2,\ \text{Б}_3,\ \ldots,\ \text{Б}_m\ ,$$

назовем математическую операцию, в результате которой получается слово, состоящее из тех же самых букв, размещенных в обратном порядке:

$$\overline{C_k} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_{k-1}\, a_k\ .$$

Из приведенного определения и симметрии слов следует, что операция зеркального отображения может быть осуществлена конечной совокупностью операций перестановок в одном из противоположных направлений.

Пользуясь процедурой зеркального отображения чисел, состоящих из цифр десятичного позиционного счисления, нетрудно привести способ установления биекции, требуемой для доказательства теоремы. Так порядковый номер n произвольного (дробного) числа $Д_n$ десятичного позиционного счисления из полуинтервала [0; 1)

$$Д_n = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} \ldots a_{k-1} a_k;$$

где $a_i = 0,1,2,\ldots,9$, в точности равен порядковому номеру n-ого натурального числа $Ц_n$, выраженного на языке десятичного позиционного счисления

$$Ц_n = a_k a_{k-1} \ldots a_{i+1} a_i a_{i-1} \ldots a_3 a_2 a_1, 0;$$

где число $Ц_n$ является зеркальным отображением числа $Д_n$. Теперь рассмотрим обратную процедуру. Для определения числа $Д_m$ заданного множества, т. е. $0 \le Д_m < 1$, соответствующего номеру m, необходимо выписать число $Ц_m$ натурального ряда с номером m на языке десятичного позиционного счисления, произвести всю совокупность перестановок цифр до получения его зеркального отображения, затем слева добавить запятую и ноль (для указания количества целых чисел в нем). Теорема доказана.

Для иллюстрации зеркальной симметрии можно привести два столбца чисел. Слева последовательно в столбце выписаны числа $Ц_n$ натурального ряда, а справа – соответствующие числа из $Д_n$:

0,0	0,0
1,0	0,1
2,0	0,2
…………..	………………………..
9,0	0,9
10,0	0,01
11,0	0,11
12,0	0,21

……………..…………………………..

19,0 0,91

……………..…………………………..

100,0 0,001

……………..…………………………..

156700,0 0,007651

……………..…………………………... .

Существуют и другой алгебраический способ реализации биективного зеркального отображения. В общем виде дробное число $N_Д$ десятичного позиционного счисления из полуинтервала [0; 1) представимо так:

$$N_Д = \frac{x_1}{10^1} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \cdots + \frac{x_i}{10^i} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{10^i}\right);$$

где $x_i = 0, 1, 2, \ldots, 9$ – цифры десятичного счисления и n – число, указывающее количество слагаемых, может быть сколь угодно большим. Целое (натуральное) число $N_Ц$, представляющее порядковый номер дробного числа $N_Д$ в результате зеркального преобразования $N_Д => N_Ц$, будет вычисляться следующим образом:

$$N_Ц = \frac{x_1}{10^1}10^1 + \frac{x_2}{10^2}10^3 + \frac{x_3}{10^3}10^5 + \cdots + \frac{x_n}{10^n}10^{2n-1} = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{x_i}{10^i}10^{2i-1}\right).$$

Приведенное преобразование имеет и обратное, которое нетрудно установить.

Подобного рода отображение может быть выражено и в матричном виде, если учесть, что числа позиционного счисления могут быть представимы в форме композиции бра- и кет-векторов двух бесконечномерных векторных пространств, выстраиваемых на базе двух упорядоченных бесконечных множеств позиций цифр целых и дробных чисел, при том что проекции произвольных векторов в каждом из пространств на любые орты соответствующего базиса являются конечнозначными, а именно десятизначными.

Данная теорема может быть перенесена на позиционное счисление с любым целочисленным основанием.

3. Следствия теоремы

1) В силу существования биективного соответствия между элементами рассматриваемых бесконечных множеств их мощности равны, т. е. мощность множества чисел из полуинтервала $[0; 1)$ равна $\aleph_0$.

2) Способ построения чисел в позиционное счисление с любым целочисленным основанием больше единицы представляет собой способ построения слов непротиворечивого и полного (без повторений и пропусков) языка (данного позиционного счисления), как законченного единого объекта.

3) Каждое из следующих множеств чисел – действительных, комплексных, гиперкомплексных (по крайней мере таких, как кватернионы), – выраженных на языке любого позиционного счисления с целочисленным основанием больше единицы, счетно и перечислимо, мощность каждого равна $\aleph_0$.

Обозначим символом $\mathbb{R}_{10}$ множество всех действительных чисел десятичного позиционного счисления, а символами $\mathbb{R}_{10}^{+}$ и $\mathbb{R}_{10}^{-}$ множества соответственно положительных и отрицательных действительных чисел того же счисления, причем в каждое из них включим ноль: в первое – «положительный», а во второе – «отрицательный».

Известно, что множество, например, всех слов языка в произвольном (конечном) алфавите перечислимо. Содержательно, процедура перечисления такова. Поскольку все слова данного множества могут быть упорядочены в словарном порядке, т. е. в виде $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, то существует алгоритм, дающий по произвольному натуральному числу k получить a_k член данной последовательности.

Множество $\mathbb{R}_{10}^{+}$ всех действительных положительных чисел десятичного позиционного счисления ничем не отличается в этом отношении от множества слов подобного языка. Для иллюстрации приведем способ перечисления его элементов. С этой целью воспользуемся тем, что произвольное действительное положительное число $M^{+} \in \mathbb{R}_{10}^{+}$, выраженное на языке данного счисления может, быть представлено в виде двух отдельных частей (слагаемых): целой a и дробной $\bar{b}$. Дробную часть $\bar{b}$ числа M^{+} после зеркального отображения $\bar{b} => b$ будет представлять целое число b, которое по сути будет порядковым номером дробного числа $\bar{b}$: $(0 \leq \bar{b} < 1)$ или точно такого же дробного числа $\bar{b}$: $((M^{+} - a) \leq$

$\bar{b} < (M^+ - a + 1))$, т. е. числа в множестве дробных чисел на открытом справа полуинтервале *между двумя соседними целыми числами,* в том числе и между целыми числами a и $a + 1$, т. к. множество дробных чисел десятичного счисления между любой парой соседних целых чисел того же счисления одинаково. Теперь нетрудно заметить, что каждая из частей числа M^+, будучи представленной некоторым целым положительным числом a или b, является перечислимой. Действительно, каждая из них является элементом собственно натурального ряда, а способ упорядочивания членов натурального ряда нам известен. Итак, нами установлено, что произвольному числу $M^+ \in \mathbb{R}_{10}^+$ данного позиционного счисления может быть биективно сопоставлена пара чисел натурального ряда.

Так как множество пар $\langle a, b \rangle$ натуральных чисел десятичного счисления перечислимо, например, функцией (n – натуральное число) [2]

$$\varphi(n) = \langle a, b \rangle; \qquad (1)$$

где $n = 2^a(2b + 1) - 1$, то множество $\mathbb{R}_{10}^+$ является перечислимым.

Множество $\mathbb{R}_{10}^+$ счетно в силу того, что оно является результатом объединения счетных множеств – счетного множества целых положительных чисел (натурального ряда) и счетного множества счетных множеств дробных чисел, например, на полуинтервале [0; 1), – выраженных на языке десятичного позиционного счисления. Известен также и альтернативный способ установления счетности результатов (n) перечисления (1), а значит и счетности множества пар номеров, соответствующих двум частям произвольного числа $M^+ \in \mathbb{R}_{10}^+$ – целой и дробной, – а следовательно, и счетности собственно чисел в $\mathbb{R}_{10}^+$. Графически результаты (n) перечисления (1) могут быть представлены в форме двумерной таблицы (матрицы), в которой каждый номер (n) помещается на пересечении соответствующих значений абсциссы a и ординаты b. Краткая запись подобной таблицы (двумерного массива) может выглядеть так:

$$\begin{matrix} n_{00} & n_{01} & n_{02} & \cdots \\ n_{10} & n_{11} & n_{12} & \cdots \\ n_{20} & n_{21} & n_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Здесь индексами обозначены значения абсциссы a и ординаты b соответственно. Как известно, подобный массив может быть биективно сопоставлен натуральному ряду. Для этого необходимо по порядку выписывать его члены, лежащие на параллельных диагоналях, начиная с первого – углового:

$$n_{00}\,,\quad n_{01}\,,\quad n_{10}\,,\, n_{20}\,,\quad n_{11}\,,\quad n_{02}\,,\cdots.$$

Это и есть альтернативный способ доказательства счетности множества $\mathbb{R}_{10}^{+}$ всех положительных действительных чисел десятичного позиционного счисления; его в свое время использовал Кантор для доказательства счетности множества рациональных чисел.

Точно такой же результат мы получим и для множества $\mathbb{R}_{10}^{-}$ вещественных отрицательных чисел данного счисления, если во всех операциях по определению соответствующих порядковых номеров будем игнорировать знак минус перед числами из $\mathbb{R}_{10}^{-}$, заменив переменные в (1) на n^{-}, a^{-}, b^{-}, так что, например, натуральный ряд для чисел данного множества будет обозначаться следующим образом: $(n^{-}) = 0, 1, 2, 3, ...$ Итак, мы получили способ вычисления номеров (n) и (n^{-}) для чисел двух различных множеств $\mathbb{R}_{10}^{+}$ и $\mathbb{R}_{10}^{-}$. После этого уже для произвольной пары чисел $M^{+} \in \mathbb{R}_{10}^{+}$ и $M^{-} \in \mathbb{R}_{10}^{-}$ вычислим функцию $\varphi(n^{\pm})$ от пары им биективно соответствующих номеров $\langle n^{-}, n\rangle$:

$$\varphi(n^{\pm}) = \langle n^{-}, n\rangle, \qquad (2)$$

где $n^{\pm} = 2^{n^{-}}(2n+1) - 1$ и где первым аргументом является порядковый номер из множества (n^{-}) для отрицательного числа M^{-}, а вторым – порядковый номер из (n) для положительного числа M^{+}. Возможность установления биективного соответствия полученного двумерного массива элементов $(n^{\pm})$ с числами натурального ряда (см. выше метод параллельных диагоналей) позволяет доказать также альтернативным методом счетность множества пар (M^{+}, M^{-}) чисел $\mathbb{R}_{10}^{+}$ и $\mathbb{R}_{10}^{-}$.

Существует и обратный алгоритм, позволяющий по произвольно заданному номеру (натуральному числу) $n_0^{\pm}$ из $(n^{\pm})$ установить ему биективно соответствующую пару чисел $M_0^{+} \in \mathbb{R}_{10}^{+}$

и $M_0^- \in \mathbb{R}_{10}^-$. С этой целью необходимо сначала установить по заданному номеру $n_0^{\pm}$ из $(n^{\pm})$ какая пара номеров n_0 из (n) и n_0^- из (n^-) ему соответствует. Для этого требуется вычислять $\varphi(n^{\pm})$ до тех пор, пока не получим $n_0^{\pm}$; используемые при этом значения для n^- и n будут указывать на искомые номера n_0^- и n_0. Затем, например, по значению номера n_0 необходимо аналогичным образом установить номера a_0 и b_0, соответствующие двум частям искомого числа $M_0^+ \in \mathbb{R}_{10}^+$, целой и дробной. После этого, отобразив зеркально второе число, мы получим $\overline{b}_0$, а приписав его справа через запятую к номеру a_0, который является в то же время и собственно целой частью числа M_0^+, мы получим искомое положительное действительное число M_0^+ из множества $\mathbb{R}_{10}^+$, биективно соответствующее заданному номеру $n_0^{\pm}$. Этому же числу будет биективно соответствовать и определенное отрицательное действительное число $M_0^- \in \mathbb{R}_{10}^-$, которое не сложно вычислить по аналогии с положительным, имея значение второго номера n_0^-. Тем самым по произвольно заданному номеру $n_0^{\pm}$ из натурального ряда $(n^{\pm})$ и будет установлена ему соответствующая единственная пара чисел M_0^+ и M_0^- из множества $\mathbb{R}_{10}$ всех положительных и отрицательных действительных чисел десятичного позиционного счисления.

Приведенный способ позволяет также перечислить, упорядочить и определить мощность (она равна $\aleph_0$) множества $\mathbb{C}_{10}$ всех комплексных чисел данного счисления. Для этих целей потребуется задействовать результаты не двух функций (1) и (2), как для действительных чисел, а четырех подобных функций, учитывая возможные знаки перед мнимой и вещественной частями комплексных чисел. Тем же способом можно перечислить, упорядочить и определить мощность (равную $\aleph_0$) множества $\mathbb{H}_{10}$ гиперкомплексных чисел (кватернионов) данного счисления, используя для этих целей уже восемь функций, подобных (1).

Два позиционных счисления с любым целочисленным основанием, как известно, являются эквивалентными в том смысле, что существует алгоритм, дающий по записи произвольного целого числа в первом счислении, запись этого же числа в другом, а также алгоритм, дающий по записи произвольного целого числа во втором счислении запись этого же числа в первом. В силу их так определенной эквивалентности числовая функция (1), вычислимая в одном из них, вычислима и в другом. Отсюда вывод: множество всех чисел позиционного счисления с любым целочисленным основанием счетно и перечислимо, его мощность равна $\aleph_0$. В завершение следует отметить, что данный вывод правомерен несмотря на то, что в биекции с натуральным рядом участвуют дробные числа из полуинтервала [0; 1) таким образом, что элементам с одним и тем же порядковым номером в разных счислениях (в позиционных счислениях с двумя разными целочисленными основаниями) соответствуют разные точки на участке прямой [0; 1). В частности, это видно и по самому первому ненулевому дробному члену l -значного позиционного счисления. Поскольку один и тот же отрезок от нуля до единицы делится на соответствующее каждому счислению свое оригинальное значение параметра l , постольку и конечные точки первых $(1/l)$ -ых частей отрезка [0; 1], отображающие первые дробные числа с порядковыми номерами «1» в каждом счислении, не совпадают. Здесь, конечно, имеется в виду, что для дробного числа в данном счислении верно равенство: $(0{,}1)_l = 1/l$. Тем самым тезис данного параграфа доказан.

Весьма интересно, что исторически по мере введения в математику новых типов чисел (отрицательных, комплексных, гиперкомплексных) свойства перечислимости и счетности расширенного множества чисел десятичного позиционного счисления оставались неизменными. Это следствие одного из главных и неотъемлемых свойств позиционного счисления.

4. Подробный анализ диагонального метода

1) В силу специфики способа построения позиционного счисления диагональный аргумент Кантора является, в первую очередь, эффективным методом иллюстрации одного из важнейших свойств языка позиционного счисления – его компактности. Выпишем, например, первые десять упорядоченных членов полуинтервала [0, 1), выраженных на языке десятичного позиционного счисления:

$$
\begin{array}{l}
0{,}0000000000\\
0{,}1000000000\\
0{,}2000000000\\
0{,}3000000000\\
0{,}4000000000\\
0{,}5000000000
\end{array}
$$

0,6000000000
0,7000000000
0,8000000000
0,9000000000 .

Аргументом Кантора может быть число $0{,}1211111111$, состоящее из десяти цифр после запятой, которое заведомо не равно ни одному из десяти приведенных членов, но в той же упорядоченной последовательности членов полуинтервала [0, 1) имеет собственное строго определенное место под номером 1111111121 и данный порядковый номер намного превышает номер 9, т. е. даже номер последнего из десяти вышеприведенных чисел. Вот другой пример. В 60 -значном позиционном счислении для первых 60 членов упорядоченной последовательности дробных чисел, каждое из которых также состоит не более, чем из двух знаков после запятой (если таковых сейчас нет, то их надо придумать), аргументом Кантора может быть диагональное число $0{,}1211 \dots 1$, в котором единиц вместе с двойкой уже не десять, а шестьдесят; данное число также имеет вполне определенное место в упорядоченной последовательности, номер которого является намного большим номера 59.

Таким образом диагональный метод Кантора действительно демонстрирует свойство компактности позиционного счисления, состоящее в том, что, во-первых, число n является числом намного меньшим числа 10^n, состоящего из n цифр, т. е. $n < 10^n$, а во-вторых, разница между количеством позиций, на которых они представлены, тем больше, чем больше целочисленное основание позиционного счисления, т. е. $10^n < 20^n < 60^n$. Иными словами, то, что диагональный элемент (который с равным успехом может быть построен и на натуральном ряде, если он строится не параллельно, а ортогонально первому), состоящий из n цифр, всегда будет находиться в упорядоченной последовательности первых n чисел намного позже последнего из них, имеющего значение n, является внутренним и неотъемлемым свойством позиционного счисления, использованного Кантором для аргументации своего тезиса.

2) Само по себе свойство диагонального метода Кантора быть прежде всего убедительным аргументом при демонстрации компактности позиционного счисления не ограничивает нас в

возможности его применения именно для тех целей, для которых применяют его последователи Кантора.

Хотя, если быть точным, сам автор в работе «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях», датированной 1890/1891г.г. [1, стр.170], представил свой метод на примере не позиционного счисления, а на примере бесконечной каким-то образом упорядоченной последовательности всех векторов из множества с бесконечной, но счетной размерностью (мощность множества упорядоченных базисных векторов равна $\aleph_0$) при том, что каждый из ортогональных векторов базиса мог принимать только одно из двух возможных (не обязательно числовых) значений m или ω. По сути, не указывая никакого счисления, он имел в виду просто слова, состоящие из бесконечного набора букв двоичного алфавита. Это уже потом, апологеты Кантора, видимо, хотели как лучше и применили его метод к двоичному, а затем десятичному позиционному счислению и не к множеству целых чисел, а к множеству положительных чисел не больших единицы. Вот пример того, как эта идея Кантора была реализована в одном из современных вариантов доказательства континуальности множества действительных чисел.

3) Приведем диагональный метод Кантора в изложении Клини [3, стр.13-14]. «Посредством знаменитого “диагонального метода” Кантора было доказано, что в математике рассматриваются и такие бесконечные множества, которые не могут быть пересчитаны. Множество *действительных чисел* несчетно.

Рассмотрим сначала *действительные числа* x *в полуинтервале* $0 < x \leq 1$. Каждое действительное число из этого полуинтервала однозначно представляется посредством некоторой правильной бесконечной десятичной дроби, т. е. десятичной дроби, первая значащая цифра которой стоит правее запятой и в которой имеется бесконечно много цифр, отличных от 0. Число может представляться в виде конечной десятичной дроби, т. е. дроби с повторяющимися нулями, но такую дробь можно заменить на бесконечную с повторяющимися девятками. Например, 0,483 или 0,483000... можно заменить на 0,482999.... Обратно каждая правильная бесконечная десятичная дробь представляет единственное число из этого полуинтервала.

Допустим теперь, что

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

– бесконечный перечень или пересчет некоторых, но не обязательно всех, действительных чисел, принадлежащих этому полуинтервалу. Напишем теперь одну под другой соответствующие им бесконечные десятичные дроби

$$
\begin{array}{l}
0, x_{00}\ x_{01}\ x_{02}\ \ x_{03} \ldots \\
0, x_{10}\ x_{11}\ x_{12}\ \ x_{13} \ldots \\
0, x_{20}\ x_{21}\ x_{22}\ \ x_{23} \ldots \\
0, x_{30}\ x_{31}\ x_{32}\ \ x_{33} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Образуем диагональную дробь, указанную стрелками. Заменим в ней
каждую из последовательных цифр x_{nn} на отличную от нее цифру x'_{nn} так, чтобы при этом не получилась конечная дробь. Например, пусть $x'_{nn} = 5$, если $x_{nn} \neq 5$, и $x'_{nn} = 6$, если $x_{nn} = 5$.

Полученная дробь

$$0, x'_{00}\ x'_{11}\ x'_{22}\ x'_{33} \ldots$$

представляет некоторое действительное число x, которое принадлежит нашему полуинтервалу, но не входит в рассматриваемый пересчет. Действительно, эта дробь отличается от первой из данных дробей своей первой цифрой после запятой, от второй - своей второй цифрой после запятой, от третьей - третьей цифрой после запятой и т. д.

Поэтому данный пересчет не является пересчетом всех действительных чисел полуинтервала $0 < x \leq 1$. Пересчета всех действительных чисел этого полуинтервала не существует.»

Несмотря на кажущуюся прозрачность и убедительность приведенного доказательства, сформулируем следующее утверждение.

Доказательство континуума мощности множества всех действительных чисел, например, на полуинтервале [0, 1) диагональным методом Кантора является математически не корректным.

Ниже приводятся аргументы в защиту данного тезиса.

4) Из теоремы, приведенной в начале статьи следует, что, если мы удалим все десятичные числа позиционного счисления из полуинтервала [0, 1), то возможны два взаимоисключающих вывода:

- между конечными значениями отрезка 0 и 1 отсутствуют какие бы то ни было числа;

- между конечными значениями отрезка 0 и 1 отсутствуют какие бы то ни было иные числа, кроме тех, точное значение которых выразимо или на языке позиционных счислений с иными целочисленными основаниями, или на языке, заведомо не эквивалентном языку позиционного счисления с каким бы то ни было целочисленным основанием.

Первый вариант относится к дискретной математике, второй – к непрерывной. И здесь важно отметить следующее. В любом случае, если мы удаляем из полуинтервала [0, 1) все слова (а их счетное множество) языка десятичного позиционного счисления, то на этом интервале больше не может быть *никаких иных чисел десятичного позиционного счисления.*

5) В работе «К учению о многообразиях», датированной 1878г. [1,стр.22], обсуждая возможность доказательства своей теоремы на множестве десятичных чисел, Кантор настаивал, что дробные числа, которые заканчиваются справа незначащими (так они называются, по крайней мере, в современной терминологии) нулями, должны рассматриваться как исключенные, ибо они относятся к «конечным десятичным представлениям». Видимо имея в виду то же самое, Клини предложил, что, например, такое число, как 0,483 «можно заменить» на 0,482999.... Однако данное предложение оказывается деструктивным. В рассматриваемом нами счетном множестве чисел десятичного позиционного счисления имеет свое место и 0,483, и 0,482999..., поэтому, если мы на место первого поставим второе, то в счетном множестве получим два одинаковых числа, расположенных на разных позициях. Это будет противоречить начальному условию, зафиксированному Клини: «…каждая правильная бесконечная десятичная дробь представляет единственное число из этого полуинтервала». Поэтому единственный способ из числа 0,483 сделать бесконечную дробь, избегая противоречия с начальным условием самого Клини – это добавить бесконечное множество незначащих нулей в конец числа. Кстати, их можно без ущерба добавлять как справа от последней значащей цифры, так и слева от

первой значащей цифры – это нормальное правило элементарной арифметики; поскольку эти нули вообще ничего не значат, то их можно добавлять конечное или произвольное количество или не добавлять совсем. Таким образом, если у Клини одно число «можно» заменять другим, то мы вынуждены признать, что «можно» и не заменять, т. е. не следовать его пожеланиям, дабы не противоречить его же более категоричному условию. Если так, то теперь полуинтервал Клини $0 < x \leq 1$ без проблем заменяется на интервал $0 < x < 1$. Он заменял 1 на 0,999…, а последнее число и так должно быть в нашей счетной последовательности. Поэтому без ущерба для доказательства единицу можно удалить из рассматриваемого множества действительных чисел, а ноль добавить. Итак, если теперь к каждому дробному числу, список которых приведен в теореме в начале статьи, добавить справа бесконечное множество незначащих нулей, то мы получим счетный список действительных чисел полуинтервала $0 \leq x < 1$ в форме бесконечных дробей, где «каждая правильная бесконечная десятичная дробь представляет единственное число…» на избранном полуинтервале.

Так вот, если мы теперь исключим из данного полуинтервала не только те числа, о которых говорил Кантор, но и счетное множество чисел десятичного позиционного счисления, то больше чисел данного счисления на указанном полуинтервале быть не может, по определению собственно данного счисления и согласно вышеприведенной теореме. Хотелось бы сказать, что метод формулирования по Кантору диагонального элемента десятичного позиционного счисления является по сути разновидностью парадокса о Лжеце, да беда в том, что метод – это не говорящий субъект, данная категория, увы, безмолвна «по определению», но парадоксальность имеет место. Ведь данный метод составления элемента Кантора связан со свойством диагонали квадратной матрицы, которая проходит через элементы, расположенные на пересечении одинакового количества строк (чисел позиционного счисления в упорядоченной последовательности) и столбцов (количество цифр после запятой). Но из свойства позиционного счисления, не обязательно десятичного, следует, что диагональное слово (или число) Кантора, не приводя к противоречию, может быть членом данного позиционного счисления только в случае рассмотрения конечной последовательности чисел с добавлением к каждому числу определенного количества незначащих нулей для выравнивания количества строк и столбцов и получения квадратной матрицы; ведь без обязательного добавления незначащих нулей диагональное слово Кантора не может быть построено даже в конечной последовательности чисел в силу свойства компактности счисления. При данных условиях диагональное слово, имея заведомо не нулевую последнюю цифру (т. к. ноль должен быть заменен на любую другую цифру), будет обладать порядковым номером, намного превышающим номер последнего числа в квадратной матрице, а потому оно действительно будет расположено далеко за границей матрицы, но, тем не менее, оно будет находиться в пределах счетного множества всех десятичных чисел. В ином случае, когда последовательность охватывает все числа данного счисления, диагональное слово Кантора (если оно вообще может быть составлено) должно быть чем угодно, но только не числом, имеющим свое точное значение на языке данного счисления, т. е. чем угодно, но только не тем, чем ему предписывается быть по утверждению Кантора-Клини. Ну посудите сами. Если это число является числом десятичного позиционного счисления, то оно должно быть расположено внутри счетного множества таких чисел, которые полностью и по порядку располагаются в строках матрицы. Но тогда оно не может служить аргументом, убеждающим нас в существовании, по крайней мере, *еще одного десятичного числа*, кроме счетного множества десятичных чисел, приведенных в бесконечной матрице. А если оно находится вне приведенной бесконечной матрицы, то оно не может быть числом десятичного позиционного счисления даже при том, что оно составлено из цифр десятичного алфавита. Следовательно, и в этом случае оно утрачивает силу аргумента, способного убедить нас в существовании еще одного такого же числа, но не равного ни одному из их приведенного счетного множества. Известно, что числа позиционного счисления составляют множество элементов, упорядоченных четырьмя способами: во первых, каждая цифра – по алфавиту, во-вторых, каждая позиция – по номеру n от запятой, в-третьих, одна и та же цифра на разных позициях – по «весу», пропорциональному десятке в степени n с соответствующим знаком для целой и дробной частей, например, $10^{\pm 0}, 10^{\pm 1}, 10^{\pm 2}, \ldots$, и, в-четвертых, каждое следующее целое число и каждый номер следующего дробного числа – по порядку на единицу больше текущего. Во избежание вышеотмеченного противоречия диагональное слово Кантора может представлять собой, если не слово языка, аналогичного, например, русскому, то, в лучшем случае, только слово языка позиционного счисления, основанием которого является бесконечное целое число, т. е. слово, состоящее, например, из символов бесконечного алфавита, включая и символы алфавита десятичного счисления, которые не упорядочены и не могут быть упорядоченными в нем должным образом, а потому данное слово может быть уже не только элементом иного множества, нежели просто счетного десятичного позиционного, но и элементом именно континуального множества в силу принципиальной невозможности упорядочивания его букв хотя бы по «весу»:

$$(\infty)^{\pm 0}, (\infty)^{\pm 1}, (\infty)^{\pm 2}, \ldots.$$

В любом случае диагональное слово Кантора – Клини во избежание указанных противоречий не должно быть числом, а значит его использование в доказательстве так, как это делали они, является не корректным. Клини, например, не мудрствуя лукаво просто констатирует, что полученная дробь «… представляет некоторое действительное число x, которое принадлежит нашему полуинтервалу, но не входит в рассматриваемый пересчет». Однако чтобы оно стало действительно убедительным аргументом при доказательстве, например, континуума рассмотренного множества чисел, необходимо сначала в явном виде привести доказательство того, что данное слово является числом, а значит обладает всеми его свойствами, а потом уже констатировать этот факт как доказанное утверждение, иначе это действительно будет «не математика, а теология».

С другой стороны, и точное значение каждого алгебраического числа из их счетного множества, которое Кантор упорядочил известным методом (исходя из корней алгебраических уравнений), никак не может быть выражено на языке десятичного позиционного счисления, разве что точные значения лишь некоторых из них. Точные же значения многих из них могут быть выражены только иными символьными средствами при том, что на языке десятичного позиционного счисления каждое из них имеет бесконечное множество лишь приближенных значений, зависящих от выбранной точности округления.

6) С учетом сказанного можно предположить, что к множеству чисел на полуинтервале [0, 1) относятся:

- счетное множество чисел, значение которых однозначно выражаемо на языке данного позиционного счисления, например, десятичного;

- множество чисел (рациональных, алгебраических и пр., факт существования которых доставляет нам алгебра), представляющих результаты алгебраических операций и выразимых в соответствии со своим точным значением или на языке позиционных счислений с иными целочисленными основаниями, если числа рациональные, или, если числа иррациональные, на символьном языке (например, $\pi - 3$, $e - 2$, $\sqrt{2} - 1$ и т. п.), не эквивалентном языку ни данного ни любого другого целочисленного позиционного счисления, а потому в рамках, по крайней мере, данного позиционного счисления каждое из них имеет бесконечное множество только приближенных значений в зависимости от заданной (требуемой) точности.

В противоположность диагональному слову Кантора, любое из приведенных чисел потому и является числом, что оно может быть верифицировано алгебраически, в том числе и с подстановкой корней в алгебраические уравнения. Например, символьное выражение $\sqrt{2}$ является числом, потому что при возведении его в квадрат мы получим ни что иное как число десятизначного позиционного счисления, а потому и, обратно, извлекая из этого числа квадратный корень, мы принимаем, что результатом будет тоже некоторое абстрактное число, которое и принято обозначать символически так: $\sqrt{2}$. Поскольку для диагонального слова способ верификации неизвестен, то именно поэтому для утверждения его в статусе числа и требуется доказательство этого факта в явном виде.

7) Существует еще один фактор, который является хотя и опосредованным, но тем не менее весьма убедительным аргументом в пользу приведенной критики диагонального метода Кантора. Речь идет о двух формах представления произвольного числа (алгебраического, трансцендентного и т. п.) с неограниченным количеством цифр: гомоморфной и полиморфной. В гомоморфной форме число представляется в символьном виде, например π, что отображает его единственное точное значение. В полиморфной – с помощью неограниченного множества строго упорядоченных значений, например, в десятичном счислении: $3; 3{,}1; 3{,}14; 3{,}141; \ldots$. В последнем случае вся бесконечная совокупность его приближенных значений является единым полиморфным объектом. Между данными формами может быть установлено обусловленное биективное соответствие. Это значит, что трансцендентное число (гомоморфизм) π, имеющее единственное точное значение, не выражаемое на языке десятичного позиционного счисления, может быть взаимно однозначно сопоставлено с одним из значений полиморфного объекта, если оно обусловлено получением заранее заданной точности. Конечно, сама по себе *возможность представления*

неограниченных чисел в таких формах не имеет особого значения в дискуссии о методе Кантора. Однако с *необходимостью их представления* именно в таких формах, которые к тому же являются еще моносемантической и полисемантической соответственно, связан весьма существенный фактор для всей математики в целом.

В принципе принимая гипотезу, основываясь на одном из приведенных выводов (см. выше пункт 4), можно получить, как уже отмечалось, или дискретную математику, или математику непрерывных величин, т. е. два уровня математики, которые в современной науке не обязательно должны сосуществовать в «параллельных мирах» и, тем более, ни в коем случае не должны взаимно исключать друг друга. Здесь будет неуместным подробное обсуждение способа объединения их в рамках единой системы. Поэтому сначала лишь справочно отметим, что в книге [4, 5] представлен общий метод однообразно мотивированного поэтапного расширения математики, начиная с начального уровня (в качестве которого обоснованно выбрана аддитивная математика шумеров), возможно, до конструкции, объединяющей единым алгоритмом все известные математические структуры; а затем кратко опишем его.

Такой, назовем его историко-хронологическим, метод построения начал математики предполагает способ последовательного расширения математических конструкций (каждая из них называется некоторой математикой, отличной от других), начиная с шестидесятизначной аддитивной математики шумеров. Содержательно, на каждом этапе доказывается теорема о независимости результатов измерения некоторого геометрического объекта от определенных способов измерения. Имеется в виду, что существуют, например, два различных конструктивных способа измерения, которые одновременно в конкретном процессе измерения являются принципиально несовместными, т. е. взаимно исключающими друг друга. С каждым из них связан несколько отличающийся от другого, допустим, выполнением некоторого условия, алгоритм вычисления результата. Хотя оба алгоритма представляют одну и ту же математику текущего уровня, они в то же время являются как бы двумя ее «разновидностями» или вариантами. Доказательство вышеобозначенной теоремы для данных случаев предполагает объединение конструктивных процессов в единый мультиплет (подобно спину в физике).

Понятно, что собственно данный мультиплет в принципе не имеет никакого отношения к реальности (реальными по отдельности являются только значения им объединяемые), поэтому и структуры, в которых такой мультиплет выступает, например, операндом, являются также идеальными. А, следовательно, и в целом обустраиваемая специально для данного абстрактного процесса-мультиплета математика также должна быть абстрактной. И именно такая математика, несмотря на ее статус, помогает доказать требуемую теорему для совершенно реальных процессов.

Это достигается, в частности, тем, что результат измерения во вновь построенной математике редуцируется по очереди к одной к одной из «разновидностей» расширяемой математики и сравнивается с результатом измерения, полученным в ней; затем из равенства результата новой математики порознь каждому из двух возможных результатов расширяемой математики и следует вывод доказываемой теоремы.

Затем опять симметризуются некоторые другие несовместимые условия конструктивных процессов измерения и математическая конструкция снова расширяется. Анализ показал, что в подобный способ последовательного расширения математик могут быть вовлечены все известные математические структуры, т. к. в рамках каждой из них что-нибудь да симметризуется. На худой конец любое уравнение является средством симметризации множества значений в мультиплете, который мы обычно называем переменной. Здесь важным остается лишь поиск обоснования и причины того, какие способы измерения объединяются и почему они объединяются. Тем самым в рамках единой стройной системы каждая из известных на сегодня математических структур найдет свое убедительное обоснование. Следовательно, без всякого преувеличения можно сказать, что данный метод и является искомым уже не одно столетие методом обоснования начал математики.

Нетрудно заметить, что в нем обращение, например, к абстракциям – это не самоцель, а вынужденная мера; абстрактное обобщение является необходимым средством в процессе решения ее основной многоуровневой задачи – поэтапного доказательства главной теоремы. (Кстати, этот аргумент показывает, что в дискуссии о том, что абстракционизм в форме «махрового бурбакизма» не может быть и не является основанием математики, должна быть окончательно поставлена жирная точка.)

Дополнительно отметим, что данный метод построения начал математики содержательно использует приемы аналогичные тем, что известны, например, в объектно-ориентированном программировании (и не только в ООП) с наследованием, с полиморфными и абстрактными объектами (классами) и пр. В частности, расширение математики в нем происходит с добавлением новых математических ресурсов (объектов, операций, отношений, алгоритмов и т. п.), при этом получаемая новая математика наследует в полной мере и всю математику расширяемую с ее собственными ресурсами.

В рамки данного метода органично вписывается и этап подобного расширения математик, упомянутых выше в начале настоящего параграфа: с уровня математики дискретных величин до (более высокого) уровня математики непрерывных величин с возможностью (обратного) редуцирования результатов с верхнего уровня на нижний. И главная роль в возможности обратного непротиворечивого и биективного редуцирования результатов именно в данном объединении математик отводится особому свойству (идеальных или абстрактных) чисел, факт существования которых доставляет нам алгебра (которая кстати является и способом их верификации), а не только структура позиционного счисления сама по себе. Это свойство и заключается в том, что каждое подобное число с *необходимостью* должно представляться в любой из двух возможных форм – гомоморфной и моносемантической или полиморфной и полисемантической.

Возможность установления при заранее заданных условиях взаимно однозначного (т. е. обусловленного биективного) полиморфно-гомоморфного отображения и будет основанием биективного редуцирования (гомоморфного значения) моносемантического результата π, полученного в расширенной (непрерывной) математике, обратно к одному из ему соответствующих результатов – значений в расширяемой (дискретной) математике в рамках позиционного счисления, в котором он представлен полисемантическим объектом.

Таким образом для историко-хронологического способа обоснования не только начал, но и всей математики в целом необходимо, чтобы в данном диалектическом (двойственном) статусе представления данные числа проходили сквозь всю ее систему, поскольку она выстраивается методом вложения математик одной в другую и с одновременным наследованием всех ресурсов и средств математик расширяемых. Данное представление чисел заведомо исключает «способ упорядочивания», например, всех корней алгебраических уравнений, который предложил Кантор, а значит он применял диагональный метод к тому, чего быть не может. Таким образом, если к теореме Кантора подойти с другой стороны, через критику того, что именно должно быть упорядоченно (т. е. до того, как применять собственно диагональный метод), то и там обнаруживается, мягко говоря, противоречие.

Именно потому, что данный историко-хронологический метод обоснования и организации всей математики в целом является намного более важным феноменом для науки, чем «теологообразные» дискуссии вокруг диагонального способа аргументирования того или иного вывода, причем вывода в приложении к тому, чего быть не может, именно поэтому автор статьи считает, что приведенных аргументов вполне достаточно, чтобы и в этой дискуссии на все последующие времена была также окончательно поставлена жирная точка, а посему по совокупности причин доказательства Кантора, Френкеля, Клини и иже с ними о континуальности множества действительных чисел необходимо признать ничтожными.

Особо хотелось отметить еще раз, что речь идет не о континуальности множества таких чисел как таковой, а о диагональном методе доказательства данной континуальности.

8) Математическая некорректность диагонального аргумента Кантора в применении к позиционным счислениям для установления существования бесконечных множеств мощности континуума ставит под сомнение легитимность его использования и в других резонансных теоремах прошлого столетия.

Литература

1. Кантор Георг. Труды по теории множеств — М.: Наука, 1985.
2. Успенский В.А. Теорема Геделя о неполноте – М.: Наука, 1982. – 112с.

3 Клини С.К. Введение в метаматематику. - М. Издательство иностранной литературы, 1952

4. Чуличков О.Г. Математические основания философии Ноосферы – Самара : ИП Зуев Сергей Анатольевич, 2020. – 191 с.
5. Чуличков О. Г. Интернет-ресурс: https://www.youtube.com/channel/UC-MovAEzgZJd2gNojWVylMA?view_as=subscriber