ISSN 2225-6717

Доклады Независимых Авторов

Периодическое многопрофильное печатное научно-техническое издание

Выпуск № 53
(вторая редакция)

2021

The Papers of independent Authors

volume 53, in Russian, 2021

Опубликовано 02.08.2021
Напечатано в США, Lulu Inc., ID r2qd7v
ISBN 978-1-4717-1809-0
EAN-13 9772225671006
ISSN 2225-6717
Сайт со сведениями для автора
http://dna.izdatelstwo.com
Контактная информация
publisherdna@gmail.com
Адрес: POB 15302, Bene-Ayish, Israel, 0060860
Художник – Гельфанд Л.М.
Фотографии для обложки были в свободном доступе в Интернете.
Передается и регистрируется в национальных библиотеках
- **России -** Российская национальная библиотека**,** Российская государственная библиотека, ВИНИТИ
- **Израиля -** The National Library of Israel**,**
- **США -** The Library of Congress USA**.**

Журнал размещен на платформе публикаций Readera
https://readera.org/dna-izdatelstwo

Истина – дочь времени, а не авторитета.

Френсис Бэкон

Каждый человек имеет право на свободу убеждений и на свободное выражение их; это право включает свободу беспрепятственно придерживаться своих убеждений и свободу искать, получать и распространять информацию и идеи любыми средствами и независимо от государственных границ.

Организация Объединенных Наций.
Всеобщая декларация прав человека. Статья 19

От издателя

"Доклады независимых авторов" - многопрофильный научно-технический печатный журнал на русском языке. Журнал принимает статьи к публикации из России, стран СНГ, Израиля, США, Канады и других стран. При этом соблюдаются следующие правила:

1) статьи не рецензируются и издательство не отвечает за содержание и стиль публикаций,
2) автор оплачивает публикацию,
3) журнал регистрируется в международных классификаторах книг (ISBN) и журналов (ISSN), идентифицируется кодом DOI, передается и регистрируется в национальных библиотеках России, Израиля, США. Этим обеспечивается приоритет и авторские права автора статьи.
4) коммерческие права автора статьи сохраняются за автором,
5) журнал издается в США,
6) печатный журнал продается, а в электронном виде распространяется бесплатно.

Этот журнал - для тех авторов, которые уверены в себе и не нуждаются в одобрении рецензента. Нас часто упрекают в том, что статьи не рецензируются. Но институт рецензирования не является идеальным фильтром - пропускает неудачные статьи и задерживает оригинальные работы. Не анализируя многочисленные причины этого, заметим только, что, если плохие статьи может отфильтровать сам читатель, то выдающиеся идеи могут остаться неизвестными. Поэтому мы - за то, чтобы ученые и инженеры имели право (подобно писателям и художникам) публиковаться без рецензирования и не тратить годы на "пробивание" своих идей.

Хмельник С.И. *2005*

Содержание

Серия: **МАТЕМАТИКА**

Чуличков О.Г.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8178-8041

О способах представления чисел (окончание)

5. Что можно доказывать диагональным методом Кантора

(Начало см. в журнале ДНА №51)

В предыдущем русскоязычном номере журнала ДНА данная статья заканчивается выводом, что по совокупности причин доказательства Кантора, Френкеля, Клини о континуальности множества действительных чисел необходимо признать ничтожными. Следует напомнить, что речь шла о доказательствах, в которых каждое «действительное число … однозначно представляется посредством некоторой правильной бесконечной десятичной дроби» и обратно «каждая правильная бесконечная десятичная дробь представляет единственное число» из рассматриваемого в подобных доказательствах полуинтервала. Вослед вышеизложенной критике указанных доказательств хотелось бы отметить в явном виде, что же на самом деле доказывается диагональным методом Кантора в данных теоремах.

Если еще раз вернуться, например, к доказательству Клини, то, как было уже отмечено в первой части данной статьи, главная коллизия по ходу его аргументации заключается в том, что, получив новое слово, составленное из букв им придуманных, он без малейшего сомнения сразу категорично заявляет, что построенное им *конструктивным способом* слово является десятичным числом. В то же время, если он не доказывает непосредственно данный факт явным образом, значит он, если следовать букве формальной логики, использует закон исключенного третьего в неявном виде или действует, как принято сейчас говорить, «по умолчанию». Другими словами, он должен полагать так. Если это слово не является числом десятичного счисления, то в таком случае ему просто нечем быть иным, а если данное слово не может быть ничем другим, то оно обязано быть только числом десятичного позиционного счисления, и следовательно, доказывать здесь нечего и достаточно только это констатировать.

Но история нас учит тому, что в подобных ситуациях закон исключенного третьего не всегда работает корректно. Можно вспомнить, например, ситуацию с непрерывными функциями. Совсем недавно, еще каких-то полтора-два столетия тому назад, такая функция не могла быть никакой другой, как только дифференцируемой. Поэтому тогда в доказательствах дифференцируемости той или иной функции достаточно было доказать (или указать) ее непрерывность, после чего на основе закона исключенного третьего можно было смело делать категоричный вывод о ее дифференцируемости. Вот, например, цитата из краткого изложения уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, преподаваемых в Королевской Политехнической школе О. Коши [7, стр.36]:

«Теорема. Положивъ что функцiя $f(x)$ есть непрерывная между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$, и означивъ чрезъ A наибольшую, а чрезъ B наименьшую величину ея производной функцiи $f'(x)$ между тѣми же предѣлами, окажется что разностное отношенiе

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0} \qquad (4)$$

необходимо будетъ заключаться между предѣлами A и B.» Заметьте, объявив в теореме функцию непрерывной, Коши ничтоже сумняшеся сразу начинает рассуждение о величине ее производной, как будто вопрос с ее дифференцированием уже решен. После открытия, в частности, всюду непрерывной, но не дифференцируемой функции Вейерштрасса, как известно, ситуация изменилась. И сейчас в данном случае закон исключенного третьего не работает. Однако он не работал и до Вейерштрасса, но на это никто не обращал внимание.

В случае с доказательством Клини данный закон также не работает, несмотря на категоричность заявлений этого весьма авторитетного математика. Вспомним, что по условию теоремы, Клини берет бесконечный перечень или пересчет некоторых, но не обязательно всех, действительных чисел, принадлежащих полуинтервалу $0 < x \leq 1$:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots .$$

Затем он выписывает одну под другой соответствующие им бесконечные десятичные обыкновенные дроби в свернутом виде:

$$x_0 = 0, x_{00}\, x_{01}\, x_{02}\, x_{03} \,.\,.\,.\, x_{0(k-1)} x_{0k} \,.\,.\,.$$
$$x_1 = 0, x_{10}\, x_{11}\, x_{12}\, x_{13} \,.\,.\,.\, x_{1(k-1)} x_{1k} \,.\,.\,.$$
$$x_2 = 0, x_{20}\, x_{21}\, x_{22}\, x_{23} \,.\,.\,.\, x_{2(k-1)} x_{2k} \,.\,.\,.$$
$$x_3 = 0, x_{30}\, x_{31}\, x_{32}\, x_{33} \,.\,.\,.\, x_{3(k-1)} x_{3k} \,.\,.\,.$$
$$.\,.$$
$$x_n = 0, x_{n0}\, x_{n1}\, x_{n2}\, x_{n3} \,.\,.\,.\, x_{n(k-1)} x_{nk} \,.\,.\,.$$
$$.\,.$$

Поэтому развернув любую из приведенных строк, мы можем переписать ее в виде, общий формат которого приведем для дроби x_n :

$$x_n = \frac{x_{n0}}{10^1} + \frac{x_{n1}}{10^2} + \frac{x_{n2}}{10^3} + \frac{x_{n3}}{10^4} + .\,.\,. + \frac{x_{n(k-1)}}{10^k} + \frac{x_{nk}}{10^{k+1}} + .\,.\,.\,.$$

Кроме этого, у Клини также из условий построения следует, что

1) $x_{nk} = 0,1,2,\ldots,9$;

2) для каждой дроби x_n (поскольку это число, а мы допустим самый оптимистичный вариант и будем действительно считать его числом, хотя из условий Клини это однозначно не следует) в операции сложения выполняется правило передачи дополнительной значащей единицы справа – налево, т. е., например, при $x_{nk} \neq 0$ и $x_{n(k-1)} < 9$:

$$x_n + \frac{9}{10^{k+1}} = \frac{x_{n0}}{10^1} + \frac{x_{n1}}{10^2} + .\,.\,. + \frac{x_{n(k-1)} + 1}{10^k} + \frac{x_{nk} - 1}{10^{k+1}} + .\,.\,.\,.$$

Здесь следует отметить, что мы не будем сейчас обсуждать проблематично или нет построение строк, каждая из которых обладает всеми перечисленными свойствами, а принимаем, что каждая из них уже обладает ими, согласно (неоднозначно интерпретируемой) декларации Клини.

Затем Клини по ходу доказательства построил «диагональный аргумент» $X_{\text{ДА}}$ в соответствие с им же предложенным правилом выбора каждой цифры в нем:

$$X_{\text{ДА}} = 0, x'_{00}\, x'_{11}\, x'_{22} \,.\,.\,.\, x'_{(k-1)(k-1)} x'_{kk} \,.\,.\,.\,.$$

Анализируя теперь всю совокупность его действий, можно не без оснований утверждать, что в развернутом виде «диагональный аргумент» $X_{\text{ДА}}$ также может (и обязан!!!) быть записан в развернутом виде:

$$X_{\text{ДА}} = \frac{x'_{00}}{10^1} + \frac{x'_{11}}{10^2} + \frac{x'_{22}}{10^3} + \ldots + \frac{x'_{(k-1)(k-1)}}{10^k} + \frac{x'_{kk}}{10^{k+1}} + \ldots,$$

а каждый символ x'_{kk} в $X_{\text{ДА}}$ принадлежит алфавиту десятичного счисления. И это все, что можно логически обоснованно сказать о конструктивно построенной Клини новой строке $X_{\text{ДА}}$, исходя из его собственных аргументов, приведенных им по ходу доказательства. Но тогда из этого и следует, что категоричное заявление Клини, будто слово $X_{\text{ДА}}$ – это ничто иное, как обыкновенная дробь десятичного числа, является опрометчивым и преждевременным, поскольку для утверждения данного факта требуется более подробное аргументирование. Обоснуем данный тезис.

Как известно, в арифметике, кроме обычной операции сложения, где участвуют операнды, для которых выполняется правило передачи дополнительной значащей единицы справа налево, существует операция сложения, например, по модулю десять. Операндами (слагаемыми) в первом случае являются обычные числа десятичного позиционного счисления; в них все разряды, кроме линейного упорядочивания связаны еще и дополнительной связью – необходимостью удовлетворять выше отмеченному правилу трансляции справа налево дополнительной единицы в случае необходимости. Поэтому разряды чисел имеют двойную линейную связь друг с другом. В операции сложения по модулю десять обычные десятичные числа не могут быть операндами; в ней могут участвовать только слагаемые, которые с необходимостью имеют вторую связь утраченной, т. е. слова-операнды, также составленные из цифр (десятичного счисления), размещенных также на линейно упорядоченных «по весу» позициях. В остальном позиции можно считать совершенного независимыми, как координатные орты в векторном пространстве. И в данном случае это будут уже не обычные числа позиционного счисления, а математические объекты совершенно иного рода.

Представим, что существует бесконечномерное линейное пространство, в котором имеется базис из «не совсем» независимых векторов. Отличие данного базиса от обычно рассматриваемого в линейной алгебре базиса линейно независимых векторов в том, что (i) его орты не являются единичными и (ii) они однозначно упорядочиваемы по своей величине (или по значению своей длины):

$$(10^{-1}\overrightarrow{e_1});\ (10^{-2}\overrightarrow{e_2});(10^{-3}\overrightarrow{e_3});\dots;(10^{-n}\overrightarrow{e_n});\dots .$$

Вдобавок к отмеченному, наделим данное пространство метрикой не пифагоровой, т. е. не квадратичной, а линейной. В таком пространстве общий вид произвольного вектора через его составляющие координатные вектора может быть изображен следующим образом:

$$\{V_n\} = \{(a_1 \cdot 10^{-1}\overrightarrow{e_1});\ (a_2 \cdot 10^{-2}\overrightarrow{e_2});\dots;(a_n \cdot 10^{-n}\overrightarrow{e_n});\dots\},$$

где $a_n = 0,1,2,\dots,9$. А длина данного вектора в силу линейности метрики будет представлена выражением:

$$|V_n| = a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + \ \dots + a_n \cdot 10^{-n} + \cdots$$

или в свернутом виде:

$$|V_n| = 0, a_1a_2a_3\dots a_n \dots .$$

Одно из отличий таких математических объектов, как $|V_n|$, в том, что **по причине независимости координат в линейном (дискретном) пространстве векторов** $\{V_n\}$ их суммирование производится в соответствии с правилом, известным как правило сложения по модулю десять, и данное свойство принципиально отличает их от чисел обычного позиционного счисления, с которыми совпадает лишь только форма их записи. Фактически координаты каждого орта в таком пространстве при их увеличении пробегают все свои возможные дискретные значения «по кругу», подобно тому, как часовая стрелка после цифры 12 переходит к 1, затем к 2 и так далее круг за кругом.

Таким образом слово $|V_n|$, отображающее длину произвольного вектора описанного пространства внешне вполне похоже на число десятичного позиционного счисления; к тому же оно обладает в точности почти тем же рядом (хотя и не только им) свойств, что и отмеченные числа. Из сказанного можно заключить, что в силу существования двух разных классов математических объектов, имеющих внешнее сходство в форме записи, вывод о принадлежности конкретного объекта, созданного конструктивно, исключительно только по форме его записи, например, к множеству обыкновенных десятичных дробей методом исключенного третьего не представляется возможным. После вышеприведенных аргументов становится вполне очевидным, что в данном случае соответствие записи объекта определенной форме является необходимым, но недостаточным условием принадлежности его к заданному классу из двух выше оговоренных. Именно поэтому вместо категоричного и безапелляционного заявления Клини должен был сначала аккуратно и в достаточной мере аргументировать свое утверждение и только после этого заявить, что его конструктивно созданный «диагональный аргумент» $X_{\text{ДА}}$ является ничем иным, как числом обсуждаемого счисления. В противном случае его доказательство в целом следует считать некорректным, что и было предложено в завершении основной части данной статьи.

Кстати, в виду независимости (в оговоренном отношении) координат в линейном пространстве векторов $\{V_n\}$ (и позиций в $|V_n|$) нетрудно посчитать мощность множества векторов в пространстве $\{V_n\}$, которая в силу счетности линейно упорядоченного множества базисных векторов (позиций в $|V_n|$) будет равна $10^{\aleph_0}$. Данный факт и стал источником вдохновения математиков, конструировавших биективное соответствие между множеством таких объектов и точками прямой, плоскости, пространства.

Как уже отмечалось в первой части, сам Кантор в работе «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях», датированной 1890/1891г.г. [1, стр.170], начинал разработку своего метода не с чисел десятичного счисления, а с векторов некоторого пространства, представленных в особом виде, и доказывал существование нового вектора, не включенного в список прежде им перечисленных векторов. Если перенести его идею на доказательство Клини, т. е. с двузначного алфавита (m, ω) на алфавит десятичного счисления $(0, 1, 2, \dots, 9)$, то оно вполне было бы эффективным. Действительно, нетрудно заметить, что, если бы Клини расположил в столбец друг за другом «бесконечный перечень или пересчет» не обыкновенных десятичных дробей, а такой же список различных векторов линейного пространства $\{V_n\}$, то тогда в итоге всех последующих его действий следовал бы вполне корректный вывод о несчетности множества векторов именно данного пространства. Поэтому, если бы он изначально заявил, что любому бесконечнозначному (рациональному или иррациональному) числу он биективно сопоставляет (но способ такого сопоставления должен быть представлен в явном виде) один из векторов линейного пространства $\{V_n\}$, и продолжил бы то же самое изложение своей теоремы, то тогда его вывод о множестве действительных чисел был бы корректен (если не учитывать возможную не правомерность такого представления бесконечных чисел), поскольку возникающая двузначность семантики «диагонального аргумента» в любом случае была бы теперь в его пользу. И судя по вышеназванной работе Кантора, для определения мощности множества векторов в таком пространстве диагональный метод работает как нельзя лучше, поскольку именно для этих целей Кантор, видимо, его и разрабатывал, разве что используя не десятичную, а двоичную систему для отображения множества значений каждого из счетного множества базисных векторов. Вполне вероятно, здесь сказалось влияние Дедекинда, с которым Кантор был в активной переписке во время работы над теорией множеств. Ведь в самом начале еще до своей статьи [1, стр.170] он предложил способ упорядочивания всех действительных корней алгебраических уравнений. Показал счетность такого множества и пытался на основе упорядоченного списка его элементов предложить построение диагонального аргумента. Но затем, вероятно после общения с Дедекиндом, перешел на список бесконечномерных векторов в двухзначном счислении и опубликовал приведенную статью. Дело в том, что еще до переписки с Кантором Дедекинд в своем методе сечений использовал данные вектора, сравнивая их по величине, и заполнил их линейно упорядоченным множеством (для чисел в десятичном счислении его мощность равна $10^{\aleph_0}$), которое само по себе является уже континуумом, все промежутки между рациональными числами. Не обращая внимания на аддитивные и мультипликативные операции, а взяв за основу только возможность сравнения и упорядочивания векторов и чисел, а упорядочивать и те и другие можно по внешнему виду, т. е. по позиционно, и введя дополнительную аксиому непрерывности, он предложил способ добиться всюду плотного линейно упорядоченного множества вещественных чисел. Причем все остальные операции (сложение, вычитание, умножение и пр.) с такими векторами он определил опять-таки через процедуры сравнения. Впрочем, не столь важно, был ли Р. Дедекинд автором идеи подобных векторов, или О. Коши, К. Вейерштрасс, Б. Больцано или они появились может быть даже в неявном виде в более ранних работах математиков, но идеей подобных объектов пронизана вся теория бесконечно малых в математическом анализе. Однако относительно объектов, используемых в современном математическом анализе заранее известно, что все они принадлежат, по крайней мере, к полю действительных чисел, т. е. для них изначально вводятся все необходимые операции с тем чтобы гарантировать, что данным объектам действительно сопоставляются числа (главное, не пропускать своевременную проверку свойств конструктивно создаваемых новых объектов), в то время как об объектах, производящих сечение Дедекинда [8], сделать такой вывод не представляется возможным.

Правомерность же представления арифметических и иррациональных чисел такими векторами – это отдельная и достаточно обширная тема. Отметим лишь, не углубляясь в нее, что поскольку существуют числа не выразимые в десятичном счислении, то отображать их можно не только отдельными символами, как то: $\sqrt{2}, \pi, e$, – но и любыми другими способами, например, с помощью групп различных символов или с помощью специальным образом организованных рядов символов, или же с помощью векторов вышеописанного пространства, которые к тому же можно представлять в виде равномерно сходящихся рядов. Хотя в рамках непрерывной математики предпосылки для перехода к такому представлению подобных чисел имеются (для этого достаточно вспомнить определение пределов функции методом "ε–δ" и свойства сходимости рядов), но в какой именно математике такое представление должно стать необходимым и для достижения какой цели такая математика должна быть разработана, – все это остается темой дальнейшего исследования в рамках предлагаемого в работе [4, 5] историко-хронологического метода обоснования и организации как начал, так и всей математики в целом. А в силу чрезвычайной гибкости данного метода, по сути, в силу его гибкости ровно в той мере, которая необходима и доступна Человеку для нужд познания и окружающего мира, и себя самого, существует надежда, что и цели, достигаемые такой математикой, и задачи, ею решаемые, и способ ее построения рано или поздно станут ясными и понятными, а вместе с этим мы определимся и с легитимностью представления, например, иррациональных чисел в виде векторов линейного пространства, со свойствами, проявляемыми в аддитивных операциях, отличающимися от свойств чисел (десятичного) позиционного счисления. Но за этим, вероятно, будущее. А пока стоит отметить весьма занимательный факт: кажущееся, на первый взгляд, не значительным свойство чисел при сложении приводит к мощности $\aleph_0$ множества всех чисел позиционного счисления, в то время как мощность множества векторов выше описанного пространства, не имеющих данного свойства, является континуумом, будучи в полном согласии с «диагональной аргументацией» Кантора.

Ну и в завершение статьи для прояснения различий в свойствах множества десятичных чисел и множества длин векторов линейного пространства $\{V_n\}$ можно привести механическую аналогию или механическую интерпретацию. Еще лет 50-70 назад для выполнения арифметических операций использовались механические арифмометры (типа «Феликс»). Это была такая машинка, имевшая рукоятку, которую можно было крутить, а в центре машинки была лицевая панель, и в ее окошечках для соответствующих разрядов числа появлялись по порядку цифры, если расчетчик вращал, например, круг за кругом данную рукоятку. Для наших целей используем еще более простую механическую модель. Возьмем шестеренку №1, т. е. зубчатое колесо, с 10-ю зубцами, в зацеплении с ней пусть будет шестеренка №2 гораздо большего диаметра и имеющая уже 100 зубцов. Затем в зацепление со второй возьмем еще большую шестеренку №3, имеющую уже 1000 зубцов, и так будем линейно наращивать количество шестеренок и их зубцов и сцеплять их последовательно в меру своих возможностей. Все они, находясь по цепочке в зацеплении друг с другом, сразу приводятся в движение, если начинаем крутить наименьшее колесо под номером один с десятью зубцами. Из соотношения количества зубцов у смежных колес следует, что, если колесо №1 совершает полный оборот, то колесо №2 совершит только десятую часть своего полного оборота. Поэтому, если колесо №1 совершит 10 полных оборотов, то колесо №2 совершит только один полный оборот. Если колесо №1 совершит 100 оборотов, колесо №2 совершит уже 10 оборотов, а колесо №3 совершит только один полный оборот. И так далее. Данная модель, по крайней мере на качественном уровне, достаточно точно интерпретирует результат существования связи между позициями чисел десятичного счисления. Если мы теперь разведем все зубчатые колеса так, чтобы ни одно из них не входило в зацепление ни с каким другим, то мы получим систему «квази-независимых» зубчатых колес, в которой каждое из колес может вращаться совершенно независимо от всех остальных; единственная «связь», которую можно установить между ними, заключается в строго определенном и упорядоченном соотношении их габаритов. Такая механическая модель и будет совершенно точно интерпретировать свойство слов $|V_n|$, которые отображают длину векторов линейного пространства $\{V_n\}$. Теперь разница между свойствами десятичных чисел и слов $|V_n|$ становится практически во всех смыслах вполне очевидной.

Литература

1. Кантор Георг. Труды по теории множеств — М.: Наука, 1985.
2. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте – М.: Наука, 1982. – 112с.
3. Клини С. К. Введение в метаматематику. - М. Издательство иностранной литературы, 1952
4. Чуличков О. Г. Математические основания философии Ноосферы – Самара : ИП Зуев Сергей Анатольевич, 2020. – 191 с.
5. Чуличков О. Г. Интернет-ресурс: https://www.youtube.com/channel/UC-MovAEzgZJd2gNojWVylMA?view_as=subscriber
6. Чуличков О. Г. О способах представления чисел. «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», 2021, вып. 51, ISSN 2225-6717, Lulu Inc., ISBN 978-1-68471-567-1, http://dna.izdatelstwo.com/
7. Коши Г. А. Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. Перевод с французского В. Буняковского. — СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. — 243 с.
8. Дедекинд Р. Непрерывность и иррациональные числа: Пер. с нем. С.О. Шатуновского. Изд. 5-е – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009 – 48с.