О. Г. Чуличков

Постоянная тонкой структуры и «золотое сечение» – поиск альтернативы аксиоматическому методу

Постоянная тонкой структуры и «золотое сечение»

Проблема постоянной тонкой структуры (ПТС) стала уже притчей во языцех. Физики (и не только) не одного поколения задаются вопросами: почему она равна числу 1\137? в чем причина того, что связь между релятивизмом, квантованием и теорией элементарных частиц, определяемая этой константой, выражается таким «странным» числом? Нашей рабочей гипотезой будет утверждение, что корни этой, а также некоторых других насущных проблем физики надо искать в специфическом языке – **языке математики**, которым мы пользуемся, в частности, и для описания физических процессов.

Обратимся к истории появления этой замечательной константы, которая связана с результатами исследований Планка и достаточно подробно изложена в литературе [1]. В формуле, носящей его имя, показана в явном виде зависимость спектральной плотности энергии от частоты излучения и (абсолютной) температуры:

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3} \times \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}, \qquad (1)$$

где $\rho = \rho(\nu,T)$ – спектральная плотность энергии (т.е количество энергии, отнесенное к единице объема и к единице частоты волны); ν – частота волны; T – абсолютная температура; k – постоянная Больцмана; h – постоянная Планка; c– скорость света. Чтобы получить объемную плотность энергии $u(T)$ (энергию, отнесенную только к единице объема), необходимо проинтегрировать спектральную плотность энергии ρ по всем частотам волн ν:

$$u(T) = \int_0^\infty \rho(\nu,T)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \times \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} Z T^4, \qquad (2)$$

где интеграл $Z = \int_0^\infty [\nu^3 d\nu/(e^{h\nu/kT}-1)]$ можно вычислить. Его значением будет

$$Z = \frac{\pi^4}{15}. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), мы получим выражение для объемной плотности энергии, известное как закон Стефана-Больцмана

$$u(T) = aT^4, \qquad (4)$$

в котором постоянная a равна

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3c^3}. \quad (5)$$

Заметим, что если записать закон Стефана-Больцмана в виде $u(T) = b(kT)^4$ (перейдя к температуре, измеренной по энергетической шкале), то для постоянной b получим выражение

$$b = \frac{8\pi^5}{15h^3c^3} = \frac{\pi^2}{15e^6} \times \alpha^3 , \quad (6)$$

где α - постоянная тонкой структуры (ПТС). Из (6) следует, что ее значение должно быть

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch} . \quad (7)$$

Дирак обнаружил (неопубликованное сообщение), что полученное выражение с огромной точностью (до пяти десятичных знаков) совпадает со следующим:

$$b' = \frac{1}{(4\pi e)^6} . \quad (8)$$

Отсюда для величины, обратной ПТС, имеем следующее примечательное выражение:

$$\frac{1}{\alpha} = "137" = (4\pi)^2 \left(\frac{\pi^2}{1\cdot 3\cdot 5}\right)^{\frac{1}{3}} , \quad (9)$$

которое оказывается справедливым с колоссальной точностью. Далее авторы [1] пишут: «Это совпадение Дирак интерпретирует следующим образом. В классической электродинамике (так же, впрочем, как и в современной квантовой электродинамике) квантование электрического заряда является привнесенным извне, чужеродным понятием, т. е. с точки зрения электродинамики электрон мог бы иметь и сколь угодно малый заряд. Но при $e \to 0$ мы имели $a' \to \infty$ [в нашем обозначении: $b' \to \infty$ О.Ч.]». И еще: «Будущая теория элементарных частиц должна выяснить причины квантования заряда и установить смысл соотношения $hc/2\pi e^2 = 137$, связывающего релятивизм (c), квантование (h) и теорию элементарных частиц (e). Вместе с тем есть основания думать, что в этой будущей теории и выражения для a' [в нашем обозначении: b' О.Ч.] ... и для $1/\alpha$... перестанут быть простыми совпадениями и получат рациональное объяснение.»

Такова история появления в физике постоянной α. Однако, ее «анамнез» будет не полным без статистики бозонов и фермионов. Кратко об этом. Если весь спектр энергии, которую могут принимать частицы разбить на равные и пронумерованные «ячейки» (Рис.1.1), то можно изучать взаимодействие объектов микромира через изменение такого параметра, как, например, количество частиц N_i в энергетической «ячейке» ε_i с определенным номером i $(i = 1,2,3\dots)$. В статистической физике его называют парциальным числом заполнения (конкретной энергетической «ячейки» ε_i или уровня энергии ε_i). Экспериментальные исследования показали, что существуют два сорта частиц (бозоны и фермионы), для которых функциональные зависимости $N_i = f(\varepsilon_i)$ (такую зависимость называют статистикой) принципиально различны. В аналитическом виде обе статистики можно записать одним выражением:

$$N_i = \frac{g_i}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/kT} \mp 1}\ , \qquad (10)$$

в котором знак минус перед единицей в знаменателе правой части выражения относится к статистике бозонов, знак плюс – к статистике фермионов. В выражение (10), кроме известных парциального числа заполнения N_i и уровня энергии ε_i, входят следующие параметры: g_i – кратность вырождения энергетического уровня ε_i; μ – химический потенциал одной частицы (химический потенциал вещества равен произведению μ на число Авогадро); k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Сделаем одно преобразование в формуле (10), поскольку в статистике обоих сортов нас будут интересовать относительные парциальные числа заполнения n_i, т.е парциальные числа заполнения N_i, отнесенные к кратности вырождения g_i:

$$n_i = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_i - \mu)/kT} \mp 1}\,. \qquad (11)$$

Этого объема сведений из статистической физики будет нам достаточно для дальнейшего анализа.

Две статистики под номером (11) показывают, что существуют два способа подсчета количества частиц, помещенных на определенный энергетический уровень (имеющих определенную энергию). Это значит, что при одной и той же температуре T «заселенность» конкретного уровня зависит от сорта частиц. Вычислим какова должна быть энергия ε_i, чтобы в среднем хотя бы одна частица любого сорта могла существовать на этом уровне.

Для этого подсчитаем полусумму обеих статистик и приравняем ее единице:

$$\frac{1}{2}(n_{i_{\text{Б}}} + n_{i_{\Phi}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/kT}-1} + \frac{1}{e^{(\varepsilon_i-\mu)/kT}+1}\right) = 1\,, \qquad (12)$$

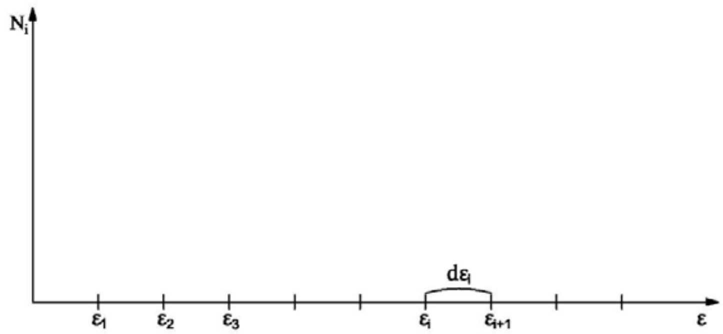

Рис.1.1 Весь спектр энергии от 0 до ∞ разбит на равные малые ячейки шириной $d\varepsilon$. ε_i- энергетический уровень с номером i. N_i – парциальное число заполнения энергетического уровня с номером i.

где $n_{i_Б}, n_{i_\Phi}$ – бозонная и фермионная статистики (11) соответственно. Обозначим:

$$\Phi = e^{(\varepsilon_i-\mu)/kT}\;, \qquad (13)$$

тогда (12) примет вид

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0\,. \qquad (14)$$

Мы получили одно из простейших алгебраических уравнений. Оно называется уравнением «золотой пропорции». Его корни

$$\Phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\;. \qquad (15)$$

При этом $\Phi_1 = -\frac{1}{\Phi_2}$ или $\Phi_1 \cdot \Phi_2 = -1$.

Обзор темы «золотой пропорции» или «золотого сечения» (ЗС) и обширную литературу можно найти на интернет-ресурсе А. П. Стахова [2]. Численное значение положительного корня (15) $\Phi \approx 1{,}618\ldots$ Выпишем несколько выражений для ЗС:

$$\Phi^2 = \Phi + 1;$$
$$\Phi(\Phi - 1) = 1;$$
$$\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1\,. \qquad (16)$$

Используя положительное значение корня уравнения ЗС, из (15) получим выражение для i -го уровня энергии:

$$\varepsilon_i = \mu + kT\, ln\, \Phi\,. \qquad (17)$$

Очевидно, что минимально необходимая энергия на i -м энергетическом уровне для существования на нем хотя бы одной частицы «среднего» сорта, обусловленная нулевым химическим потенциалом ($\mu = 0$), равна

$$\varepsilon_i = kT\, ln\, \Phi\,. \qquad (18)$$

Отсюда видно, что энергетические уровни нашего гипотетического «фермиобозона» являются функцией температуры. Однако представление этих уровней связано с уникальными свойствами алгоритмизации ЗС. Различные примеры алгоритмов можно найти у Стахова в указанном выше источнике, а здесь можно привести следующий:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi^n = F(n)\cdot\Phi + F(n-1)\,, \qquad (19)$$

где $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$; $F(0) = 0$; $F(1) = 1$ – это числа Фибоначчи. Из последнего следует, что ЗС может быть представлено и через свои степени:

$$\Phi = \frac{\Phi^n}{F(n)} - \frac{F(n-1)}{F(n)}.$$

Поскольку Φ из (13) связано со знаменателем в формуле Планка (1) для спектральной плотности энергии, то ПТС (7) с необходимостью должна содержать Φ или функцию от нее. Тогда причину странности константы α можно будет объяснить с помощью исключительно геометрического параметра Φ, обладающего к тому же оригинальными алгебраическими свойствами. Используя современные значения для постоянных, входящих в (7), и вычислив «в лоб» параметр α, мы получим с точностью порядка 0,36%, что

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{ch} = \frac{\Phi}{2} \cdot 10^{-12}[\text{ф/м}] \quad ,$$

откуда следует, что в системе единиц СИ α будет иметь следующее значение:

$$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 ch} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2\pi e^2}{ch} = \frac{\Phi}{8\pi\varepsilon_0} \cdot 10^{-12}\,, \qquad (20)$$

где ε_0– электрическая постоянная. С учетом последнего выражения закон Кулона в этой же системе единиц примет следующий вид:

$$F = k\frac{e^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^2}{r^2} = \frac{2\cdot 10^{12}\alpha}{\varepsilon\Phi}\frac{e^2}{r^2} = \frac{2\cdot\alpha\Phi e^2}{\varepsilon(r\Phi\cdot 10^{-6})(r\Phi\cdot 10^{-6})}, \qquad (21)$$

где F— сила электростатического поля между двумя электрическими зарядами e, r— расстояние между двумя зарядами, k — коэффициент пропорциональности. Для вакуума и расстояний в соответствующем масштабе, запись закона упростится:

$$F = \frac{2\cdot\alpha\Phi e^2}{\bar{r}^2}, \qquad (22)$$

где $\bar{r} = \Phi \cdot 10^{-6} \cdot r$ — безразмерный радиус.

Имея в виду, что между электростатическими и гравитационными полями существует формальная аналогия, есть основания полагать, что подобные выражения могут быть получены и для ньютоновских потенциалов в теории гравитации. Тогда мы вправе задаться вопросом: почему ЗС, по крайней мере, формально может являться атрибутом различных потенциальных полей? но может это не только формальная игра с символами, а в подобном представлении полей заложен более глубокий смысл?

«Золотое сечение» и философия

Известно, что ЗС является прямым следствием евклидовости пространства – появляется в геометрии Евклида как одно из следствий пятого постулата. Однако более детальное исследование показывает, что нарушение значения ЗС (или результата «деления в крайнем и среднем отношении») взаимообразно связано с нарушением теоремы Пифагора. Иными словами, исключительность евклидовой геометрии в совокупности всех возможных геометрий взаимно однозначно связана с алгеброй ЗС, стоящей особняком среди множества других алгебр. В используемом со времен Аристотеля аксиоматическом методе для построения линейных причинно-следственных цепочек не возникает необходимость в использовании подобного рода пар взаимозависимых выводов. Достаточно избрать один из них, например, теорему Пифагора, и полностью игнорировать другой, чтобы восстановить непротиворечивую цепочку последовательных выводов. Учитывая существование этого необычного фактора «двойственности» для фундаментальных положений, используемых в современной науке, есть основания полагать, что более детальное изучение свойств такого «историко-эстетического феномена» как ЗС позволит нам значительно продвинуться не только в познании физических явлений, но и научной методологии. В связи с этим обратимся к философии античности, где использование подобного фактора возводилось в основополагающий принцип рассуждений. Высказывания многих известных ученых в пользу выбора такого направления исследований можно обобщить словами В. Гейзенберга [4, стр.37] : «...современная физика идет вперед по тому же пути, по которому шли Платон и пифагорейцы. Это развитие физики выглядит так, словно в конце его будет установлена очень простая формулировка закона природы, такая простая, какой ее надеялся видеть еще Платон.» Доверимся же их интуиции, тем более что в данном случае у нас имеется серьезный повод обратиться к идеям мыслителей далекого прошлого.

Своими корнями ЗС или «деление в крайнем и среднем отношении» уходит вглубь тысячелетий. У Платона оно упоминается как далеко не рядовой факт одной только геометрии, а он, как известно, был наиболее последовательным пифагорейцем. В философии этой школы, по словам А. Ф. Лосева, весь «мир представляет собой некоторое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления» [2]. В то же время, в евклидовой геометрии ЗС преподносится нам как ничем не выделяющееся из ряда других утверждений (теорем). Действительно, ну чем может выделяться одна внутренняя точка отрезка от множества других, расположенных на нем, скорее можно выделить его концевые точки или точку, делящую его пополам, из всех остальных вместе взятых. В то же время здесь стоит вспомнить, что до Евклида геометрия излагалась и преподносилась иначе, и все науки, которые «...пытаются постичь хоть что-нибудь из бытия (речь идет о геометрии и тех науках, которые следуют за ней)» [3, Государство, 533c], действительно следовали за ней в общей системе знаний о бытии. А об этой системе Платон высказывается вполне определенно: «У кого началом служит то, чего он не знает, а заключение и середина состоят из того, что нельзя сплести воедино, может ли подобного рода несогласованность когда-либо стать знанием?» [Там же]. Мы с подачи Аристотеля два с лишним тысячелетия усердно вырабатывали асимптотический метод для построения различных теорий (математических, физических и пр.) и он стал неотъемлемой частью нашего мировоззрения. В его начале всегда должна декларироваться группа гипотез, знание которых мы полагаем установленным вследствие их «естественности» для нашего мироощущения. Но это иллюзия. На самом деле мы абсолютно ничего не знаем о них. Мы только полагаем, что знаем, но не более того. Далее. О каком заключении «сплетенном» с серединой может идти речь в аксиоматическом методе, если мы строим с его помощью не замкнутую систему? Значит само заключение остается недосягаемым для нас, как пучок сена для насреддиновского ишака, и потому неведомым. Разве что в нем середина может быть «сплетена» с серединой. И только. История показывает, что Платон недвусмысленно оценил идеи Аристотеля, и факт преемственности в руководстве платоновской Академии тому красноречивое доказательство. Гармония должна быть основой подобной системы и ее строительство должно осуществляться в соответствии с законами гармонии, а потому от начала и до конца она должна создаваться из элементов, находящихся в гармонической взаимосвязи – это по Платону. Если так велика роль гармонии, то она сама проявится среди всего многообразия, а потому и начинать, и развивать строительство системы можно любым способом – это (или примерно это) по Аристотелю. Разве такие точки зрения не являются принципиально различными?

Несомненно, что в основе мировоззрения философов античности (по Платону) была диалектика и они следовали главному ее принципу: нет ничего абсолютного, есть только относительное. Презумпция тотальной относительности – основа их метода. Вспомним определения части и целого: «Целое – это то, что не имеет ни одной отсутствующей части»; «Часть – это то, из чего состоит целое». Да, можно спорить о расплывчатости подобных дефиниций. Можно по-разному интерпретировать предикаты «иметь» и «состоять»: они могут охватывать или не охватывать такие предикаты, как например, «принадлежать» или «быть включенным». Вероятно, существуют и много других критических замечаний. Тем не менее, пифагорейцы соблюдали принцип: вводить понятие одного относительно другого. Данный принцип формировал и специфический способ рассуждения о каком-либо из введенных элементов во взаимосвязи с другим. Например, если имеется одно, то существует другое, ему сопряженное, и обязательно наоборот; такая пара утверждений связана с парой обратных – если отсутствует одно из них, то теряет смысл ему сопряженное. У пифагорейцев, в отличие от Аристотеля, «знание» данного понятия (гипотезы) обусловливалось «знанием» того, относительно чего оно вводилось. Такого было правило ввода всех новых понятий в систему, и оно касалось структур любой степени сложности. Исходя из этого попытаемся проанализировать возможность построения геометрии в стиле Пифагора.

Геометрия пифагорейцев

Как повелось еще со времен Евклида, современная геометрия начинается с элементов, которые считаются простейшими. Это – точки, прямые, плоскости. Альтернативная же система построения геометрии, как науки, если следовать Платону, должна начинаться, скорее всего, с некоторых уже известных геометрических объектов, с таких как, например, квадраты (прямоугольники) или, если шире, то с правильных многоугольников, а возможно, и с окружностей, т. е. с некоторых объектов, свойства которых мы знаем; а уж затем постепенно в ней через определения должны вводиться элементы, которые сегодня считаются простейшими.

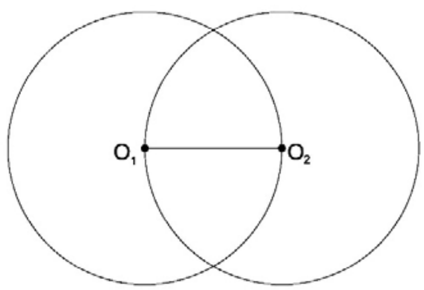

Рис.1.2. Взаимоотношение конгруэнтных окружностей.

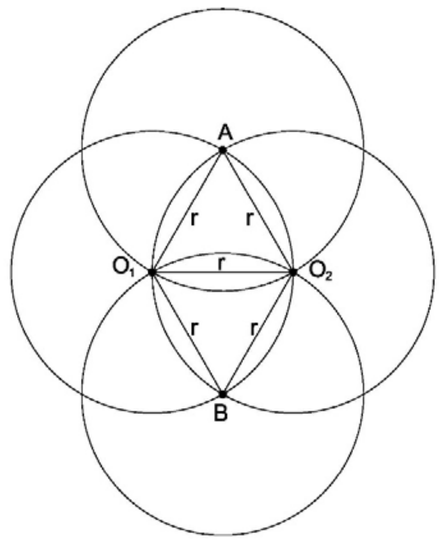

Рис.1.3. Воспроизведение новой пары конгруэнтных окружностей.

В соответствии с данной точкой зрения представляется наиболее вероятным, что в основу геометрии они положили систему отношений между окружностями и их элементами. Хорошо известно, что окружность в целом – это объект, в котором всегда можно указать все три его необходимых элемента: центр окружности (точка), радиус и замкнутую линию (окружности). В противном случае это будет уже не окружность. А если так, то сразу же проясняются, например, границы применимости самой геометрии (планиметрии) или геометрических отношений (на плоскости), а именно, границы объекта, вводимого как геометрическая плоскость, с необходимостью определяются возможностью построения триединых объектов. Заметим, что речь идет не о бесконечной прямой и даже не о произвольном отрезке, а только о радиусе (или луче). Так как точкой в геометрии Пифагора, например, может быть только центр окружности, то радиус еще не является отрезком – на нем указана пока только одна точка, как элемент объекта. Вторую можно определить только через другую окружность такого же радиуса (Рис.1.2). В этом случае и сам триединый объект (замкнутая кривая, центр, радиус), с которого начинается построение геометрии Пифагора, может определяться постольку и до тех пор, поскольку и пока имеется возможность построения другого такого же объекта на одном и том же радиусе. Таким образом избегается абсолютизация и его – два объекта определяются только друг через друга. Действуя аналогичным способом, нужно строить и далее всю систему на геометрической плоскости (будь это лист бумаги или физическое пространство) до тех пор, пока у нас имеются средства конструктивно указывать каждый необходимый элемент вновь надстраиваемого объекта. С другой стороны, такие средства всегда существуют для актуально построенных объектов.

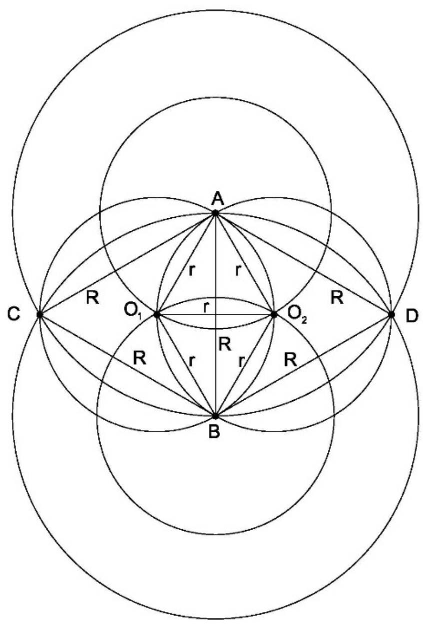

Рис.1.4. Воспроизведение пары конгруэнтных окружностей радиуса $R > r$.

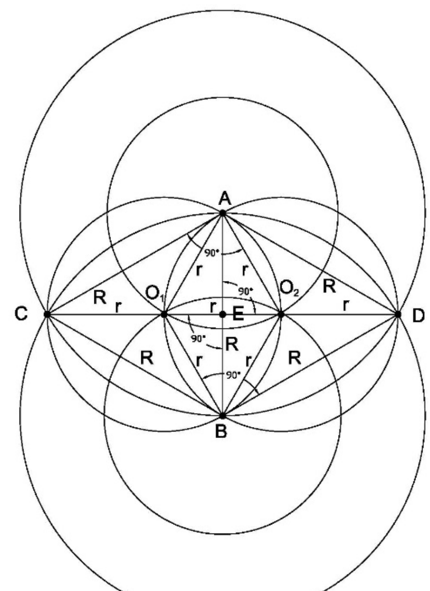

Рис.1.5. Построение перпендикуляров и точек пересечения радиусов.

Далее. Если имеются две окружности, размещенные на одном радиусе (Рис.1.3), то они должны пересекаться в двух точках. Такие пересечения будут точками, если можно построить новую пару окружностей из точек пересечения первой так, чтобы каждая из новых проходила через центр одной из старых. Затем, если это возможно, добавляется еще одна пара окружностей равного радиуса (Рис.1.4), каждая из которых будет содержать, по крайней мере, одну точку пересечения самой первой пары (мы знаем, что радиус последних связан с радиусом первых так: $R = r\sqrt{3}$). Данным методом можно продолжать строить множество окружностей, радиусы которых будут равны уже построенным или отличаться от них. То есть мы системно будем воспроизводить некую конструкцию и тем самым подготавливать базу для последующих теорем о фигурах (треугольниках, четырехугольниках и т. д.), составленных из радиусов. Но у нас еще ничего не сказано о том, что из себя представляют возможные пересечения радиусов (отрезков). Для этого с учетом вышеизложенного правила должны быть введены понятия перпендикуляра и точки пересечения радиусов (Рис.1.5).

Это, а также затем вводимая (или доказываемая?) теорема Пифагора позволит нам непротиворечиво ввести понятие диаметра и развить геометрию «окружностей» (или геометрию Пифагора). При этом геометрия строится так, что нельзя сказать: ее «началом» служит то, чего мы не знаем; ее «начало» и «середина» никак не связаны. Пока остается открытым вопрос о «заключении» геометрии и его связи с построенной системой. Но это отдельная тема (см. конец данной статьи). Она связана с построением единого непротиворечивого и полного[1] языка математики, она достаточно объемна. Ей будет посвящена одна из последующих работ.

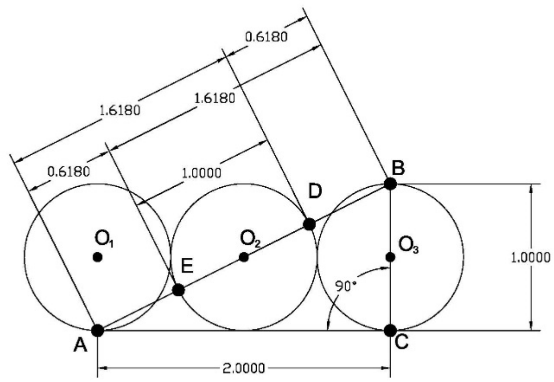

Рис.1.6. «Золотое сечение гипотенузы прямоугольного треугольника (пропорция катетов 1:2) средней окружностью с $d = 1$. На гипотенузе длиной $AB = \sqrt{5}$ получены отрезки
$AD = BE = \Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803\ldots$ и
$AE = BD = \Phi_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}61803\ldots$.

Наряду с тем, что мы несколько продвинулись в поиске метода построения системы геометрии, соответствующей философии пифагорейцев, мы пока ничего не можем сказать о понятии меры в ней. Известно, что радиусы могут быть соизмеримыми и не соизмеримыми, поэтому нам крайне важно найти

[1] О термине «полный» смотрите в конце данной статьи.

меру и для тех, и для других, т. е. «меру всего». Для ее определения Пифагор использовал одну «изюминку», которая

а) непосредственно следует из «геометрии окружностей»,

б) уникальна сама по себе и по своему предназначению определять «меру всему» во всей системе выстраиваемой геометрии, в том числе определять и меру соизмеримым, и меру не соизмеримым объектам (см. Приложение).

Этой «изюминкой» является «золотое сечение». И роль «статиста», да еще одного из множества, для него в этой геометрии (в отличие от изложенной Евклидом) не подходит в силу вышеуказанных пунктов «а» и «б» (несмотря на существование обобщенных «золотых пропорций», о чем будет также сказано в Приложении). Обратимся к Рис.1.6. Три касающиеся последовательно друг друга окружности одинакового радиуса имеют одну общую касательную.

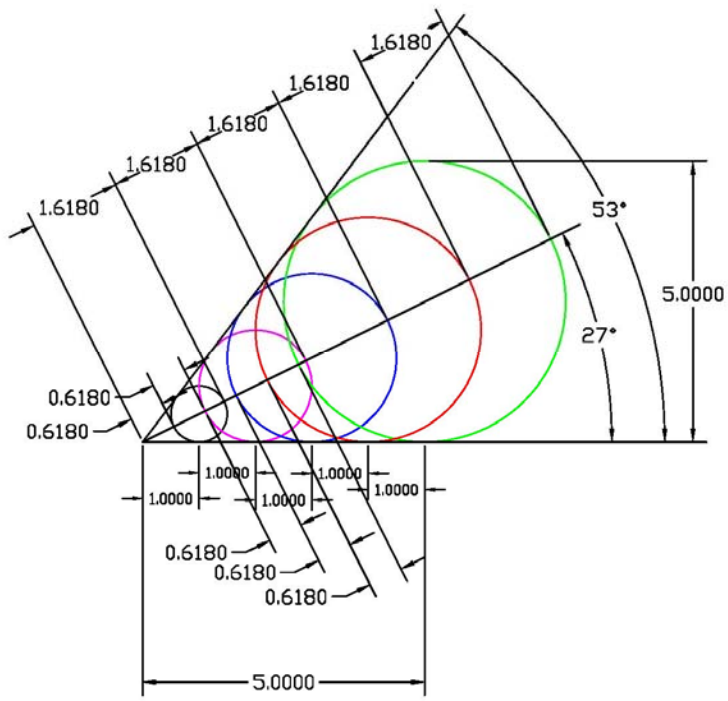

Рис.1.7. «Золотое сечение» и равномерное распространение фронта волны:

а) от «излучателя» на величину $\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803\ldots$;

б) к «поглотителю» на величину $\Phi_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}61803\ldots$.

Для одной из крайних окружностей восстановим ее диаметр, перпендикулярный к общей касательной. Затем соединим линией этот диаметр с общей касательной так, чтобы получился прямоугольный треугольник. Отметим для себя, что его катеты относятся как один к двум, и это выполнимо для любых радиусов трех одинаковых окружностей, касающихся друг друга. Гипотенуза полученного треугольника пересекает среднюю окружность в двух точках. Отношение отрезков, на которые внутренняя окружность рассекает гипотенузу одинаково для всяких треугольников с катетами, относящимися как 1:2. Это и есть «золотое сечение» гипотенузы такого треугольника внутренней окружностью.

Весьма интересный вывод о свойстве пространства геометрии Пифагора следует из анализа «продвижения фронта волны» в интерпретации, ставшей классической, наверное, еще (или уже?!?!) со времен Гюйгенса. С этой целью сделаем несложные графические построения (Рис.1.7). Изобразим на общей касательной несколько окружностей, диаметр которых последовательно увеличивается на величину диаметра наименьшей, а точки их касания общей касательной прямой сдвигаются также последовательно на такую же величину. Выбрав за единицу диаметр наименьшей окружности, строим всю систему однозначным способом, очень простую и тоже уникальную. Она и будет интересовать нас для описания волн излучения и волн поглощения, фронт которых сдвигается не одинаково соответственно вблизи источника (в сторону расширения) и вблизи приемника (в сторону поглощения) Рис.1.8.

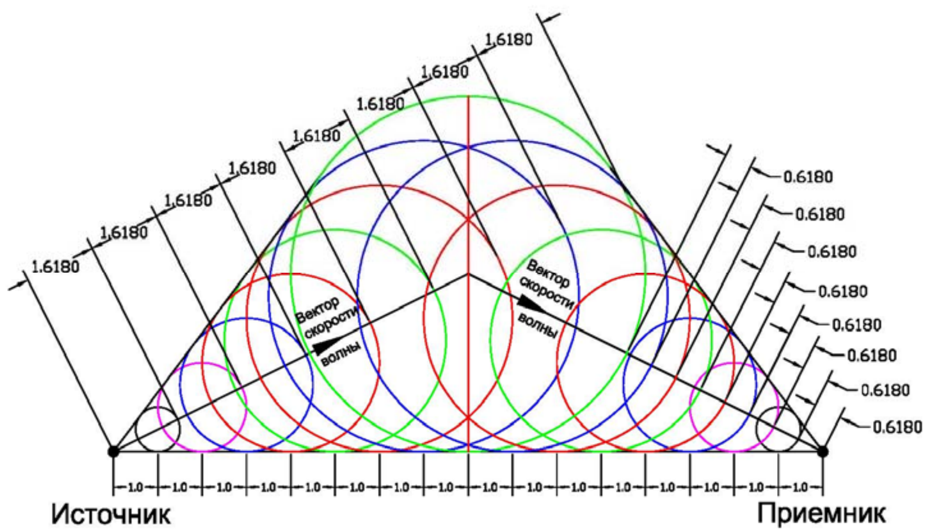

Рис.1.8. Асимметричное распространение фронта волны после излучении ее источником и перед поглощением ее приемником.

Непосредственное измерение приведенных на рисунке элементов показывает, что пространство геометрии Пифагора обладает явно выраженной **масштабной анизотропией**. Но из сравнения геометрий Пифагора и Евклида нетрудно заметить, что данное свойство присуще и евклидовому пространству. Таким образом, без всякой «физики», а только в результате геометрических измерений в евклидовом пространстве мы получаем, что, если фронт волны «излучения» единичной длины равномерно распространяется на величину Ф, то фронт этой же волны в «процессе ее поглощения» приемником будет при той же степени равномерности сдвигаться вперед только на величину $\Phi - 1$.

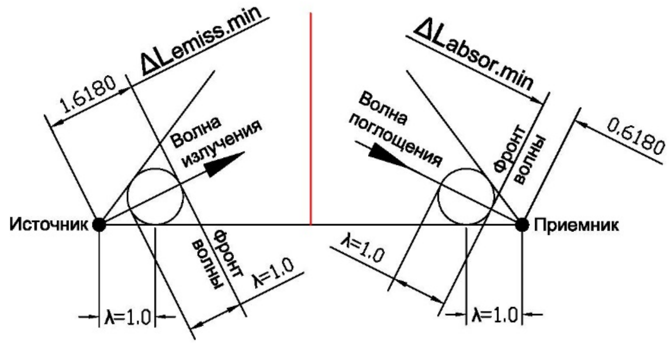

Рис.1.9. Следствие масштабной анизотропии:
$\Delta L_{absor.min} - \Delta L_{emiss.min} \cong \lambda$,
где λ – конечная длина волны.

На Рис.1.9 представлена интерпретация элементов волны – условно показаны положения источника и приемника, а также фронта волны непосредственно после акта излучения и фронта волны непосредственно перед актом ее поглощения. Из предельно простых геометрических построений, приведенных на нем, следует, что дистанция $\Delta L_{emiss.min}$ (от англ. emission – излучение, испускание) между источником, излучающим волну конечной длины λ , и (условно) положением начальной возможной фиксации фронта волны после ее излучения не может быть бесконечно малой, а непременно должна быть конечной. Точно так же и дистанция $\Delta L_{absor.min}$ (от англ. absorption – поглощение) между приемником, поглощающим волну конечной длины λ, и (условно) положением последней возможной фиксации фронта волны перед ее поглощением непременно должна быть конечной. Иначе и быть не может, поскольку вполне очевидно, что

$$\Delta L_{absor.min} - \Delta L_{emiss.min} \cong \lambda,$$

где длина волны λ – это конечная положительная величина. В общем случае наблюдатель с необходимостью будет получать следующий результат:

$$\Delta L_{absor} - \Delta L_{emiss} \cong n\lambda,$$

где $n = 1,2,3, \dots$.

Остановимся на этом еще раз. Здесь нет никакой «физики», а имеется только евклидовое пространство со своими свойствами. Следует заметить, что как в классической электродинамике «квантование электрического заряда является привнесенным извне», точно так и в динамике волн квантование последних является «чужеродным понятием», т. е. с точки зрения классической динамики процесса волна могла бы иметь и сколь угодно малую длину. Однако, если следовать приведенной геометрической интерпретации, то мы с необходимостью приходим к выводу, что такой физический объект, как волна, должен или уже существовать, будучи излученным источником, или его еще нет; волна не может быть «немного» излученной или «не до конца» излученной. То же самое можно сказать о поглощении волны приемником. Другими словами, оба процесса представляют собой вполне финитные акты в строгом соответствии с приведенной интерпретацией. Следовательно, именно это свойство евклидового пространства обусловливает появление различий между статистиками бозонов и фермионов. Именно из этой наглядной модели можно сделать вывод, что в формуле Планка для спектральной плотности энергии излучения мы учитываем распространения волн только в одну сторону изменения масштаба и игнорируем описание процесса в противоположную, исключая тем самым масштабную анизотропию пространства Евклида. Ко всему перечисленному именно масштабная анизотропия является причиной и того, что постоянная тонкой структуры α (в том виде как ее используют сейчас) очень быстро и хорошо сходится в математических выражениях для электрослабых взаимодействий (фермионная статистика) и принципиально расходится для сильных (бозонная статистика). Отсюда также следует вывод, что и идея асимптотической свободы и связанного с ним конфайнмента в квантовой хромодинамике призвана совершенно по тому же сценарию не более как математической необходимостью восстановить предполагаемую (или желаемую) инвариантность направлений масштабирования, и совместно с введением идеи различающихся статистик частиц микромира должна обеспечить удовлетворительное объяснение тех результатов, которые с завидным постоянством фиксирует наблюдатель, проводя всего лишь геометрические измерения (при изучении физических процессов) в пространстве Евклида. В конце концов, нетрудно заметить, что и вся квантовая теория микромира в целом основана на идее Планка о квантовании излучения, к которой он вынужден был прийти, чтобы не нарушать «совершенную» изотропию пространства, ставшей общепринятой после Ньютона. Таким образом, реальная «физика» состоит в том, что Планк осознанно или интуитивно связал распространение волн излучения и поглощения с определенной кинематической схемой, а посему исключительно геометрическому эффекту в евклидовом пространстве была придана специальная физическая интерпретация динамики движения волн и приложена некоторая алгебра, что позволило утверждать о зарождении новой физической теории – квантовой механики. А уже затем его квантовая теория «проросла» и «противоположными» статистиками для элементарных частиц, и быстро «сходящейся-расходящейся» постоянной тонкой структуры в соответствующих взаимодействиях, и другими феноменами, как «пояснительно-интерпретационного», так и математического характера, которые вместе с идеей Планка о квантах призваны исключительно для того, чтобы заменить естественное евклидовое пространство некоторым идеальным, в котором должна отсутствовать масштабная анизотропия. С другой стороны, также вполне очевидно, что и теория тяготения Ньютона была создана таким образом, чтобы обойти факт существования масштабной анизотропии евклидового пространства, сведя его также к абсолютно или совершенно изотропному идеалу, но при этом вообще без какого-либо квантования во взаимодействии масс. Цена, которую до сих пор приходится при этом платить, вводя в теорию «компенсирующие» элементы математического характера, – наличие «неистребимой» сингулярности в теории потенциалов, словно злой рок преследующая повсюду исследователей явлений в окружающей Природе.

Некоторые математические следствия

1) У Евклида вся первая книга посвящена геометрическим построениям так, что в ее заключении выводится теорема Пифагора. Вторая книга завершается выводом «золотого сечения». Эти факты появляются независимо друг от друга как следствие материала изложенного в первой книге и предшествующего теореме Пифагора. Скорее всего в пифагорейской школе им придавалось одинаковое значение. Более того, по всей видимости, они выводились так, что существование одного из них являлось бы необходимым основанием существования другого и наоборот. Обратимся к Рис.1.10. Обозначим

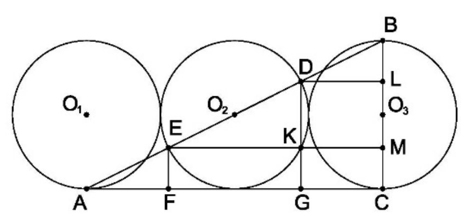

Рис.1.10. «Золотое сечение» и теорема Пифагора.

$$AD = EB = z; BC = ED = d; AC = 2d;\ DG = y;$$
$$AG = x; AB = 2z - d; DB = AE = z - d.$$

Тогда

$$\frac{y}{d} = \frac{x}{2d} = \frac{z}{2z-d}, \tag{23}$$

откуда

$$y = \frac{zd}{2z-d};\ x = \frac{2zd}{2z-d}.$$

Используем теорему Пифагора для треугольника ADG:

$$\left(\frac{zd}{2z-d}\right)^2 + \left(\frac{2zd}{2z-d}\right)^2 - z^2 = 0\ . \quad (24)$$

Отсюда, как и следовало ожидать: $z = \Phi d$, где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803\ldots$ Аналогично можно доказать, что

$$\frac{AD}{ED} = \frac{ED}{AE}\ ,\ \text{т. е.}\ \frac{\Phi}{d} = \frac{d}{\Phi - d} \quad (25)$$

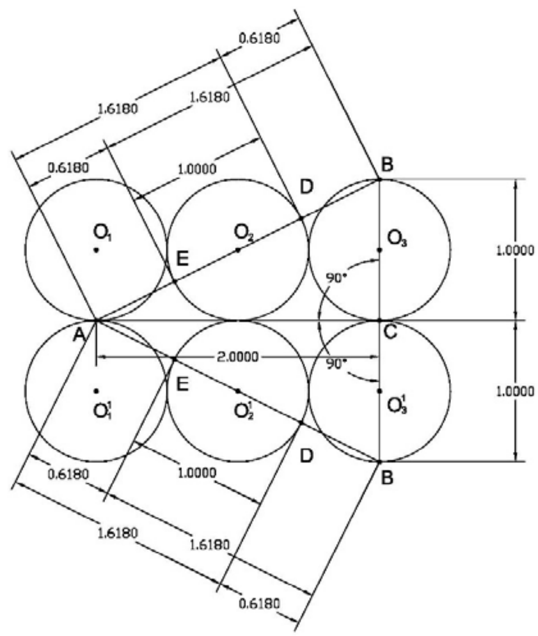

Рис.1.11. «Золотое сечение» и изотропия при поворотах в пространстве Евклида.

2) Теперь о математике и «живой материи». Вернемся к Рис.1.6. Уникальность изображенной на нем структуры еще и в том, что отразив ее зеркально относительно горизонтальной касательной («удвоив» ее определенным способом) (Рис.1.11), мы получаем графическое отображение принципа «роста живой материи»: увеличение на единицу «в длину» (по горизонтали), сопровождается «ростом» в ширину на эту же единицу (на 0,5 вверх и на 0,5 вниз) и с

обеих сторон симметрично расположены «золотые сечения». Данный факт, наряду с существованием окружностей, еще раз подтверждает изотропность евклидового пространства в различных (ортогональных) направлениях в рамках одного и того же масштаба. Не удивительно, что в Природе при общей изотропности пространства и его масштабной анизотропии реализуется именно такой способ развития некоторых систем «живой материи», что и объясняет, например, «проблему филлотаксиса» (связанную с ростом «сосновых шишек, кактусов, ананасов, головок подсолнечников и т.д.»; см. у Стахова).

3) Встречается мнение, что десятичное счисление нам досталось потому, что те, «древние», полагали связать его с количеством пальцев на руках человека; мол, природа же не случайно наделила нас пятью пальцами на каждой руке. Это похоже на правду, но не полную. Более правдоподобным представляется выбор, связанный с ЗС, с помощью элементов которого в любую окружность можно вписать правильный десятиугольник (Рис.1.12).Число Ф выражается через косинус так:

$$\Phi = 2\,cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \text{или} \qquad 2\pi = 10 \cdot arc\,cos\,\Phi.$$

Отсюда можно восстановить $\sqrt{3-\Phi} = 2 \cdot sin(\pi/5)$; $e^{i\pi/5} = \Phi/2 + i\sqrt{3-\Phi}$.

Таким образом, симметрия десятичного счисления совпадает с симметрий деления окружности на равные части с помощью «золотого сечения» Ф.

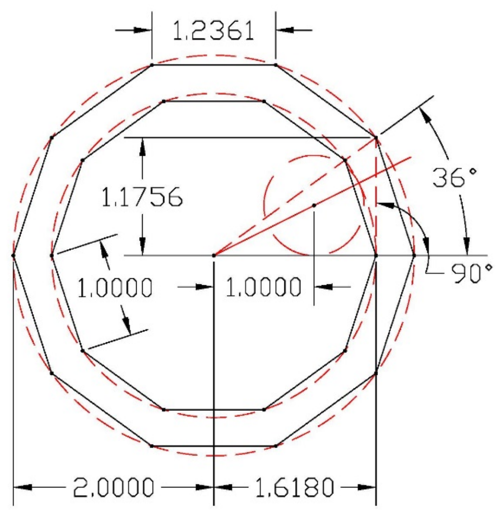

Рис.1.12. «Золотое сечение» и параметры вписанного правильного десятиугольника.

Если мы будем последовательно делить все стороны правильного десятиугольника на две части, затем еще на две части и т. д., следуя известному способу дихотомии, то получим последовательность вписанных правильных $(2^n \cdot 10)$-угольников, где $n = 0,1,2,\ldots$. Используя теорему косинусов, находим выражение для стороны такого многоугольника, вписанного в окружность радиуса Ф:

$$a_n = 2\Phi\, sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right). \qquad (26)$$

С учетом этого периметр такого многоугольника будет:

$$P_n = 2^{n+1}\cdot 10\cdot \Phi\cdot sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right). \qquad (27)$$

Отсюда получаем, что длина окружности радиуса Ф есть предел, к которому стремится периметр в (27) при $n \to \infty$:

$$L_{cir} = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left[2^{n+1}\cdot 10\cdot \Phi\cdot sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right)\right]. \qquad (28)$$

Из последнего выражения следует, что

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left[2^{n}\cdot 10\cdot sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right)\right]. \qquad (29)$$

Здесь число Пифагора вычисляется через «золотое сечение» Ф (см. Приложение). Можно считать, что выражение (29) – это и есть определение числа Пифагора, однако имеются основания полагать, что он выбрал не этот путь и не тот, которым мы пользуемся сейчас, поскольку оба из перечисленных вариантов могут быть получены как следствия из того определения, которое, скорее всего, он должен был выбрать для построения своей единой и полной теории. Но об этом мы поговорим в одной из следующих статей.

4) О свойствах гармонического осциллятора. Рассмотрим окружность радиуса Ф. Осциллятор будет гармоническим, если период обхода его диаметра в обоих направлениях совпадет с периодом обхода периметра любого правильного n -угольника, вписанного в данную окружность. Исходя из этого и формулы (27) можно записать:

$$V_{cir} = \frac{V_{lin}}{4\Phi} P_n = 2^{n-1}\cdot 10\cdot sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right) V_{lin}, \qquad (30)$$

где V_{lin} – линейная скорость вдоль диаметра; V_{cir} – линейная скорость вдоль периметра вписанного n -угольника. Отсюда получим зависимость спектра частот ν_n гармонического осциллятора от линейной скорости и, в частности, когда она равна скорости света c:

$$\nu_n = \frac{V_{\text{окр}}}{2\pi\Phi} = 2^{n-2} \cdot 10 \cdot sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right)\frac{V_{\text{лин}}}{\pi\Phi} = 2^{n-2} \cdot 10 \cdot sin\left(\frac{\pi}{5\cdot 2^{n+1}}\right)\frac{c}{\pi\Phi}. \quad (31)$$

5) Из равенства единице суммы квадратов косинуса и синуса, приведенных выше, следует выражение:

$$\left(\frac{\Phi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3-\Phi}}{2}\right)^2 = 1. \quad (32)$$

Система пифагорейцев

Кто знает, какова бы была история нашего развития, если бы не уничтожили орден Пифагора и все, что было связано с его философией. Обратимся еще раз к геометрии пифагорейцев. Может сложиться мнение, что вместо наших первичных (категориальных) понятий и гипотез в аксиоматическом методе они всего лишь использовали другие, но тоже первичные (например, такие понятия: пара окружностей, пара центров, пара радиусов), полагаемые в основу. Думаю, что не совсем так. Да, первичная гипотеза была: презумпция тотальной относительности. Именно она определяла выбор дальнейшего метода. Но у них ничего не было предназначено для выполнения роли особо выделенных (первичных) элементов (категориальных понятий). У них любое могло быть выбрано в качестве первичного, т. е. равноправие причин и следствий в некотором смысле. Любое могло быть выбранным в качестве первопричины, из которой далее можно было найти всю цепочку следствий, а в конце вновь вернуться к первопричине, как необходимому следствию всех предыдущих следствий. Ясным, но весьма грубым примером может служить обход длины окружности. Мы можем начать его с любой точки. Переход в следующую точку возможен тогда и только тогда, если перед этим мы были в начальной, переход в третью возможен, если перед этим были во второй с начала. И так далее. В конце концов, обойдя всю окружность мы вновь возвращаемся к начальной, но переход в нее возможен тогда и только тогда, если перед этим мы были в точке, предшествующей ей. Таким образом, начальная точка, являясь стартовой для цепочки «следствий» с необходимостью является и «следствием» всей этой цепочки. Если реализовать такое равноправие в науке – это одно. Но если в политике?!! в религии?!! В XXI веке наша цивилизация уже имеет успешный опыт сдерживания ядерной угрозы и представляет, что такое движение по «лезвию бритвы», когда неверный шаг равносилен самоуничтожению. Теория Пифагора порождает новое и достаточно серьезное средство убеждения. Если ее понять и следовать ей до конца – это реальный и надежный путь эволюции. Но в те времена, исказив и «подмяв» ее под себя, можно было провозгласить панацеей от всех бед человеческих все, что угодно: марксизм, фашизм, каннибализм; все, что только может прийти в здоровую или больную голову. Такое мировоззрение делало легитимным любую оппозицию, сеяло хаос, разброд и шатание, напрямую угрожало устойчивости любого государства, любой идеологии, любой религии. Кто мог позволить им существовать в то время? Они были обречены на гибель, их учение – на уничтожение и длительное забвение. А Платон? Он по крупицам пытался восстановить их философию и сделал-таки это. Более того, за сотни лет предупредил «пещерных людей» о предстоящей Голгофе. Но, увы, никто не внял ему. Воистину, «всему свое время...».

Так что же хотели пифагорейцы? Наиболее вероятно, что, построив механизм они хотели завещать членам своего ордена: берите и пользуйтесь – поскольку и пока он нужен вам для реальной жизни, постольку и до тех пор он эффективно непротиворечив и максимально полон и, обратно, если что-то нужно вам для реальной жизни, используйте его не разрушая, но надстраивая эффективно непротиворечиво и максимально полно; потому что если вы его будете надстраивать таким способом, то обязательно получите что-то новое, полезное вам в реальной жизни. Замкнутость такой двойной «круговой поруки» непробиваема ни идеями, ни реалиями; порукой чему является она сама (как идея) и, в конце концов, все то, что вам будет дано в ваших ощущениях из всех, что вы бы хотели иметь или не хотели, и что будет позволено совершить из всего того, что вам бы хотелось сделать или не хотелось, поскольку только так вы сможете максимум получить и максимум совершить при минимуме затрат. Такой механизм не разделяет, а объединяет людей. Что это? Это – ядро и науки, и религии их братства. Это – суть мировоззрения всеобщей гармонии. Управляющая идея, которую при удобном случае они хотели донести до нас и которую донес-таки «идеалист» Платон. Нечто подобное, возможно, подразумевал и Вернадский [6], говоря о Ноосфере, как высшем этапе эволюции биосферы, «когда осознанная человеческая деятельность выступает главной ... силой» в ее (Ноосферы) преобразовании (в том числе, и в своем собственном). Трудно не согласиться и с Анаксагором: «Разум правит миром».

О «заключении» геометрии

Вернемся к замечанию о «заключении» геометрии, его «сплетении» с «началом» и «серединой», поскольку без этого наша теоретическая конструкция, по словам Платона, не «может ... когда-либо стать знанием». В современной терминологии, вероятно, это можно изложить так. Теория должна быть замкнутой, т. е. обладать предельной границей. Эта граница должна иметь свои корни внутри самой теории, будучи связанной и с теми первичными категориями (а в качестве таковых, как уже отмечалось, могут быть выбраны любые из всех возможных), которые мы можем положить в начало изложения в качестве «причин», и со всеми теми «следствиями», которые должны выводиться. Тогда условия замкнутости теории в совокупности с ее внутренней степенью свободы к непротиворечивой пластичной деформации определят ее полноту и непротиворечивость. Следует заметить, что числа Фибоначчи в (19) обладают весьма примечательным свойством:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x+1)}{F(x)}=\Phi,$$

а также

$$e^{\frac{i\pi}{5}}=\frac{\Phi}{2}+i\sqrt{3-\Phi}\,.$$

Поэтому «математика гармонии» будет таковой, если мы учтем, например, такие факты, что

$$\lim_{x\to\infty}[e^{F(x+1)}/e^{F(x)}]=e^{\Phi}$$

и

$$\lim_{\Delta y\to 0}[(e^{y+\Delta y}-e^{y})/\Delta y]=e^{0}=1,$$

где параметр x пробегает все целочисленные (дискретные) значения, а параметр y – все непрерывные числовые значения. Если мы будем использовать в теории подобные предельные ограничения, то тем самым обеспечим выполнение платоновских условий замкнутости для системы знаний. Кроме этого, как уже отмечалось выше, важным фактором является актуальная масштабная анизотропия алгоритмогеометродинамики. Мы должны учитывать это при теоретических построениях, она будет играть немаловажную роль при выборе нами аналитических и синтетических средств и методов. Конечно, синтезируемая нами непротиворечивая и полная конструкция, должна быть одним из частных случаев всех возможных конструкций, которые могут быть построены с помощью синтеза, и обладать возможностью и содержать внутренние средства для анализа именно этих ее свойств. С другой стороны, эта же самая конструкция должна быть одним из частных случаев всех возможных конструкций, которые могут быть построены с помощью аналитических методов и обладать возможностью и содержать внутренние средства для синтеза именно этих ее свойств. Таким образом, интересующая нас конструкция может быть получена из самой общей теории алгоритмов и самой общей теории геометрии, и одним из их частных случаев, общих для обеих, будет «математика гармонии».

Для ее построения нам необходимо «сшить» математику дискретных величин с математикой непрерывных. Мы будем использовать ряды и интегралы Фурье. Ядром такой математики будет выражение:

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} e^{\pm ix}\right) \simeq \int_0^\infty e^{\mp ix}\,dx, \tag{33}$$

где в условном равенстве справа стоит интеграл Фурье, в котором параметр x пробегает множество непрерывных значений от нуля до бесконечности, а в скобках слева – ряд Фурье, в котором параметр x пробегает множество дискретных значений от нуля до бесконечности. Оператор F преобразует ряд Фурье в форму, представляющую совокупный поворот в кронекеровом произведении бесконечного ряда последовательно вложенных десятимерных векторных пространств. Условное равенство в этом выражении используется для того, чтобы показать, что совокупность решений уравнения (33) будут составлять только те решения, область определения которых удовлетворяет как области определения для выражения в левой части (33), так и области определения для выражения в его правой части (ср. теорию обобщенных функций). Из этого следует, что совокупность всех решений (33) имеет область определения, которая является пересечением множества всех дискретных числовых значений от нуля до бесконечности с множеством всех непрерывных числовых значений от нуля до бесконечности. Фактически, решением (33) будет последовательность выражений, порожденная «золотым сечением».

Таким образом, «математика гармонии» – это основа числового счисления, т. е. теории числа. Все остальные математические структуры – это порождение данной теории, ее надстройки. В частности, дифференциальное, интегральное, вариационное исчисления и т.д. Далее, применение, например, дважды дифференциального и дважды вариационного операторов (со всеми возможными коммутациями) к выражению (33) с последующим интегрированием будет определять «динамику процесса перечисления» при использовании не только десятичного, но и любых других счислений (двоичного, троичного, ..., восьмеричного, и т.д.).

Именно подобную последовательность, являющуюся основой десятичного счисления (общей теории чисел) можно использовать для построения «процесса эволюции». Нетрудно заметить, что, введя в обе части выражения (33) масштабные коэффициенты для физических величин (масс, зарядов и т. д.), мы можем получить надстройку в виде теоретической физики, введя, например, масштабные коэффициенты для стоимостных величин – получить надстройку в виде теоретической экономики и т.д. Причем в каждой такой теоретической системе знаний будут использоваться общая теория алгоритмов (алгебр) и общая теория геометрии (геометрий). Поэтому с любым «процессом эволюции» могут быть связаны законы общей алгоритмогеометродинамики.

Выше уже отмечалась масштабная анизотропия (терминология подобрана, конечно, не самая удачная) алгоритмогеометрического пространства Евклида. В современном прикладном программировании этот факт учитывают при составлении $3D$ программ. В аналитическом изложении средств подобного прикладного программирования в матричном представлении можно использовать аппарат матриц Дирака. Как, собственно говоря, и в аналитическом изложении теории числа (для всех возможных числовых счислений), в целом, можно использовать этот же аппарат.

К слову сказать, для построения теории обобщенных алгоритмов неоценимую помощь окажет нам открытие Ю. И. Кулаковым фундаментальных физических структур (унарных, бинарных) и огромная работа, проделанная им, его учениками и Ю. С. Владимировым в этом направлении.

Таков должен быть фундамент всей математики (и всех теорий, использующих математику). Предполагаемой структуре фундаментальной модели математики будет посвящена одна из статей, готовящихся к публикации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем некоторые соотношения, введя обозначение $\frac{\pi}{5} = A; 2 + \Phi = B$.

$$\Phi^2 = \Phi + 1; \qquad \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} = \sqrt{2 - \Phi}; \qquad cos\,A = \frac{\Phi}{2};$$

$$sin\,A = \frac{\sqrt{3-\Phi}}{2} = \frac{\sqrt{2+\Phi}}{2\Phi}; \qquad cos\left(\frac{A}{2}\right) = sin(2A) = \Phi\,sin(A);$$

$$cos(2A) = sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2\Phi} = \frac{cos(A)}{\Phi\Phi} = \frac{\Phi-1}{2};$$

$$sin\left(\frac{A}{2^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{B}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\cdot\Phi\,sin\,A}; \quad cos\left(\frac{A}{2^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{B}};$$

$$sin\left(\frac{A}{2^3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{B}}}; \qquad cos\left(\frac{A}{2^3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{B}}};$$

$$sin\left(\frac{A}{2^4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{B}}}};$$

$$cos\left(\frac{A}{2^4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{B}}}};$$

$$sin\left(\frac{A}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 1^1 - \sqrt{2 \cdot 1^2 + \sqrt{2 \cdot 1^3 + \ldots + \sqrt{2 \cdot 1^{n-1} + \sqrt{B}}}}};$$

$$cos\left(\frac{A}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 1^1 + \sqrt{2 \cdot 1^2 + \sqrt{2 \cdot 1^3 + \ldots + \sqrt{2 \cdot 1^{n-1} + \sqrt{B}}}}}.$$

На основе золотого сечения можно, как уже отмечалось, построить всю теорию чисел, показав наглядно, что оно может выступать действительно «мерой всего». Принцип построения хорошо изложен в [5]. Все последующее предлагается для осмысления только в качестве общей идеи.

Введем обозначение:

$$E = \Phi\Phi - \Phi$$

Определение 1.

Целое число, равное единице – это E , т. е. $E \equiv \Phi\Phi - \Phi = 1$.

Далее можно дать определение любого целого числа:

$$E + E = 2 \text{ и т. д.}$$
$$\underbrace{E + \ldots + E}_{n} = n.$$

Определение 2.

Натуральный ряд чисел ω – это последовательность следующего вида:

$$\omega = \{E, (E + E), (E + E + E), \ldots, \underbrace{(E + \ldots + E)}_{n}, \ldots\}.$$

Ряд отрицательных чисел ω_{-} можно сгенерировать аналогичным образом, если положим, что

$$E_{-} \equiv \Phi - \Phi\Phi = -1.$$

Определение 3.

$$E^E = 1, \qquad E^{E_{-}} \equiv \frac{1}{E^E} = 1.$$

Определение 4.

$$(\underbrace{E + E + \ldots + E}_{n})^{E} = \underbrace{E^{E} + E^{E} + \ldots + E^{E}}_{n}$$

.

$$E^{\overbrace{E+E+\ldots+E}^{n}} = (\underbrace{E \cdot E \cdot \ldots \cdot E}_{n}).$$

Можно последовательно рассмотреть все свойства натуральных чисел и убедиться, что ω соответствует всем требованиям натурального ряда. Для примера рассмотрим возведение некоторого целого числа m в степень n $(m, n \in \omega)$:

$$m^{n} = (\underbrace{E + \ldots + E}_{m})^{\overbrace{(E+\ldots+E)}^{n}} ,$$

а с учетом определения 4:

$$m^{n} = \overbrace{(\underbrace{E + \ldots + E}_{m})^{E} \cdot (\underbrace{E + \ldots + E}_{m})^{E} \cdot \ldots \cdot (\underbrace{E + \ldots + E}_{m})^{E}}^{n} = \overbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}^{n}.$$

Построив натуральный ряд чисел, можно сконструировать множество всех рациональных чисел вида m/n. Если на основе самого числа Φ можно сконструировать множество иррациональных чисел, тогда мы получим множество всех действительных чисел.

Определение 5.

Мнимая единица i: $\quad i^{2} = \Phi - \Phi\Phi = -1.$

Или

$$i = \sqrt{\frac{1-\Phi}{\Phi-1}} \equiv \sqrt{-1} .$$

Определение 6.

Мы определили, что $\quad \underbrace{E + \ldots + E}_{n-\text{раз}} = n .$

Число Непера e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left[E + \frac{E}{\underbrace{E+\ldots+E}_{n-\text{раз}}} \right]^{\overbrace{E+\ldots+E}^{n-\text{раз}}} .$$

Или

$$e = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[E + \frac{E}{\underbrace{E+\ldots+E}_{n-\text{раз}}}\right]^{E} \cdot\ldots\cdot \left[E + \frac{E}{\underbrace{E+\ldots+E}_{n-\text{раз}}}\right]^{E}}_{n}.$$

Или $$e = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{e_1 \cdot e_1 \cdot\ldots\cdot e_1}_{n});$$ где

$$e_1 = \left[E + \frac{E}{\underbrace{E+\ldots+E}_{n-\text{раз}}}\right]^{E}.$$

И последнее. А. П. Стахов приводит «обобщенные золотые пропорции» [2]. Таким образом, создается впечатление, что собственно «золотая пропорция» Ф в системе пифагорейцев также могла быть представлена в роли «рядового статиста» среди множества подобных. Но, как показывают геометрические построения (Рис.1.13 – Рис.1.16), алгебраические соотношения для обобщенных пропорций не столь очевидно и тривиально проявляются из геометрии. Поэтому исключительная роль «золотой пропорции» Ф в системе пифагорейцев вполне обоснована.

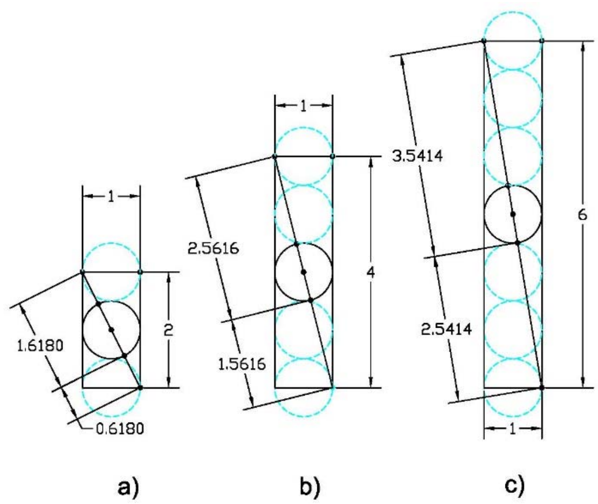

Рис.1.13. Сечение гипотенузы на «крайние и средний» отрезки при отношении катетов $1/n$, где n – четное натуральное число.

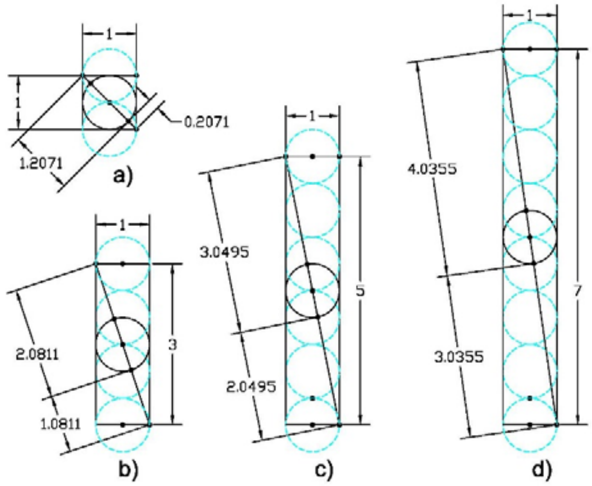

Рис.1.14. Сечение гипотенузы на «крайние и средний» отрезки при отношении катетов $1/n$, где n – нечетное натуральное число.

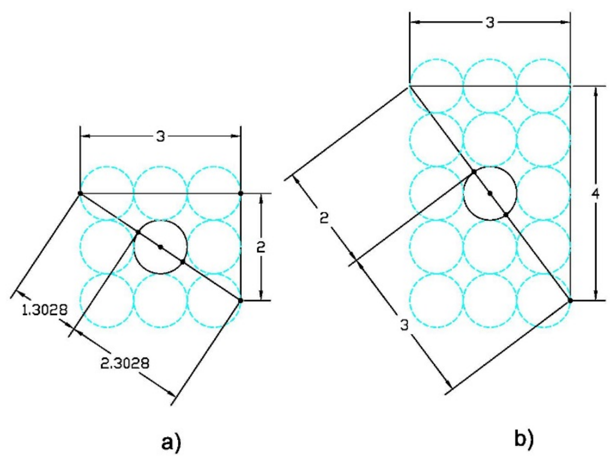

Рис.1.15. Геометрическое построение обобщенных «золотых пропорций».

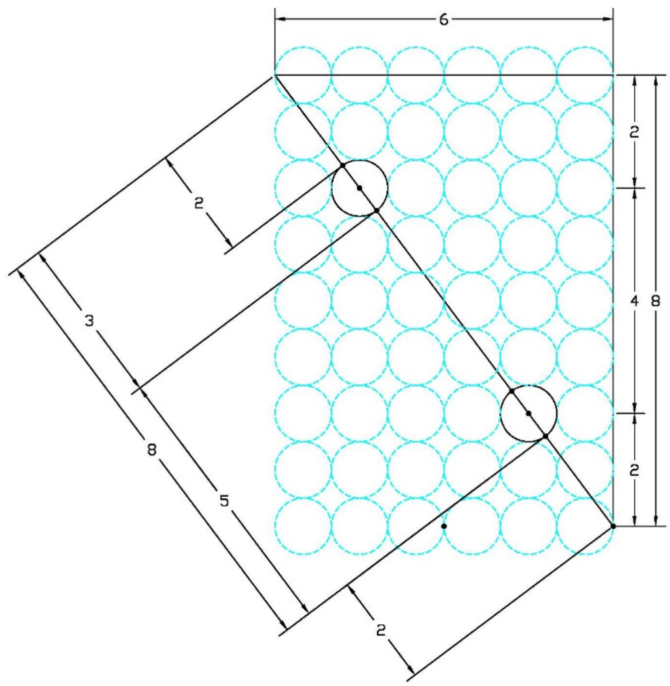

Рис.1.16. Геометрическое построение обобщенных «золотых пропорций».

Литература

1. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972.
2. Стахов А. П. Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики. Интернет-ресурс: http://www.peacefromharmony.org/docs/7-26_Stakhov_Math_of_Harmony_RU.pdf
3. Платон Сочинения в четырех томах, Т.3. Ч.1. СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та; «Изд-во Олега Абышко», 2007.
4. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989.
5. Казанова Г. Векторная алгебра. М.: Мир, 1979.
6. Вернадский В. И. Научная мысль и планетное явление. М.: Наука, 1991.