

О.Г. Чуличков

**Математические основания
философии Ноосферы**

Аннотация

Для широкого круга читателей, интересующихся основаниями математики, предлагается обзор начального этапа становления современной математики, фундамент которой был заложен в эпоху древних шумер и развит мыслителями Древней Греции. Обсуждаемая версия оснований науки фактически является весьма плодотворным компромиссом, позволяющим при ее последовательном расширении учесть достижения всех математических школ, начиная, в первую очередь, с эпохи древних шумер, пифагорейской и вплоть до современных, опирающихся на идеи конструктивизма, логицизма, формализма и теории множеств, оставляя при этом ее открытой и для дальнейшего развития в будущем. Вместе с этим вскрываются достаточно неожиданные в наше время новые или очень давно незаслуженно забытые старые аспекты математики, физики и гносеологии, что непременно должно найти отражение в современном мировоззрении, существенно изменяя его. Вся математика в данной книге представлена Единым Разрешимым Алгоритмом, открытым для расширения не только до философии Природы, но и до философии Ноосферы.

Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1 Основы теоретической математики	11
1.1. Специальное средство коммуникации шумеров	12
1.2. Отображение как функция языка	15
1.2.1. Предметная область отображения	15
1.2.2. Метод отображения шумеров и способ его вербализации	17
1.3. Отображение простейших моделей и примитивный язык	23
1.4. Единая метрическая система шумеров	28
1.5. Потенциал неконструктивного расширения системы шумеров	32
1.6. Теория симметрии конечной информации	39
Глава 2 К физической картине мира	42
2.1. Ревизия физической картины мира	43
2.2. Комментарии к ревизии физической картины мира	44
2.2.1. Пространственноподобность физических величин	44
2.2.2. Восстановление нерелятивизма	45
2.2.3. Конечность информации о микромире	47
2.2.4. Механика Ньютона и «бритва Оккама»	48
2.2.5. К вопросу симметризации физики микро- и макромира	50
Глава 3 К философии Ноосферы	53
3.1. Начала философии Ноосферы	54
3.2. Комментарии к началам философии Ноосферы	55
3.2.1. О математической модели	55
3.2.2. О динамике взаимодействия	55
3.2.3. Источник наблюдаемых симметрий	56
3.2.4. Геномо-симметричная информационная система	59
Приложение	60
П.1. Основы алгебро-геометрического отображения моделей	61
П.1.1. Конечный незамкнутый контур: первая попытка	61
П.1.2. Конечный незамкнутый контур: вторая попытка	63
П.1.3. Бесконечный незамкнутый контур	64
П.1.4. Простейшие алгебраические структуры отображения	68

П.1.5. Симметричное отображение моделей с разной топологией	69
П.1.6. Альтернативный формат алгебраических структур	76
П.1.7. Правильный многоугольник с конечным числом сторон	77
П.2. Отображение скалярных и векторных пространств	83
П.2.1. Изоморфные алгебры с бинарными операциями	85
П.2.2. Роль и значение изоморфных алгебраических структур	90
П.2.3. Древний метод доказательства и способ его вербализации	92
П.3. Позиционное счисление с целочисленным основанием	99
П.4. Конструктивная математика шумеров	108
П.4.1. Корреляция метрик разнородных величин	108
П.4.2. Конвенция изоморфизма шумеров	113
П.4.3. Математика шумеров	119
П.5. Концепция теоретической математики	127
П.6. Расширенная математика Пифагора	136
П.6.1. Симметрии инструмента шумеров (Теорема Первая)	136
П.6.2. Постановка промежуточной задачи	142
П.6.3. Необходимые ресурсы для решения промежуточной задачи	147
П.6.4. Альтернативная конвенция и ее преимущества	151
П.6.5. Математика альтернативной конвенции	163
П.6.6. Конвенция Пифагора (Теорема Вторая)	167
П.6.7. Математика Пифагора	176
П.7. Геометрия и параметризованное Золотое сечение	179
П.8. О позиционном счислении	184
П.8.1. О представлении чисел позиционного счисления	184
П.8.2. О пересчитываемости чисел позиционного счисления	186
Примечания	188
Литература	191

Предисловие

Благодаря многочисленным исследованиям естествоиспытателей и философов в мировоззрении современного человека достаточно устойчиво укоренились такие два феномена как биосфера и ноосфера. Первая из них – это активно развивающаяся оболочка Земли, в которой осуществляется деятельность живых существ. Высшим этапом ее эволюции, когда осознанная человеческая деятельность выступает главной геологической силой планетарного масштаба, является ноосфера. Подобные определения можно найти еще в трудах В. И. Вернадского, внесшего огромный вклад в формирование учения о биосфере. Они же без изменения используются в некоторых научных изданиях и по сей день. Однако человек стал уже не только «геологической», но, как предполагал В. И. Вернадский, и «космической силой» – это факт. Имеются выводы исследователей о возможности распространения и развития Разума до масштабов, далеко превышающих «планетарные». Вероятно, воздействие Разума будет оказывать влияние на эволюцию не только нашей планеты, но и других объектов Вселенной, а они, в свою очередь, на эволюцию его самого. Нет видимых оснований сомневаться в правомерности таких обобщений. Все это должно найти отражение в современном представлении феномена ноосферы, оказать влияние на прояснение границ и характера взаимодействия в ней.

В этой связи необходимо подвергнуть ревизии современную физическую картину Мира, где Человеку отводится всего лишь роль пассивного наблюдателя – статиста, фиксирующего события, – и полностью игнорируется его свойство взаимодействовать с Природой. Поскольку де-факто он – полноправный субъект всех физических взаимодействий, поэтому его отношение к Природе и взаимодействие с ней с необходимостью должны быть учтены. Коренные трудности физического моделирования такого явления связаны с тем, что развитие Ноосферы должно **сознательно** направляться человечеством. Казалось бы, для физики это нонсенс: нечто нематериальное (умозаключения; сознание) должно управлять материальными процессами. Тем не менее, учитывая вышесказанное, сформулируем вопрос в следующем виде: возможно ли дополнить физическую картину Мира так, чтобы придать Наблюдателю статус равноправного объекта (субъекта) физических взаимодействий в

Ноосфере, диалектическом единстве противоположных, взаимонеобходимых и взаимодополнительных сущностей: Пси-объекта и Природы (окружающей среды)?

Данная незаурядная проблема стала предметом исследований автора. В настоящее время получены обнадеживающие результаты, на основании которых уже сейчас можно сделать предварительный вывод: нет никаких объективных препятствий для создания теории, принципиально изменяющей физическую картину; существует только одно, чисто субъективное, – инерция нашего мышления. Следует заметить, что способ взаимоотношения человека с окружающим миром является, по своей сути, ядром мировоззрения. Поэтому для обновления физики необходимо динамичное и кардинальное изменение способа и образа мышления разработчиков физических теорий, это позволит критически пересмотреть накопленный опыт и имеющиеся стереотипы и выработать новое «воззрение на Мир».

Зачастую, когда предлагают пересмотреть накопленный опыт, авторы призывают к ниспровержению существующих теорий и к замене их новыми, более «совершенными». Примечательно то, что в данной книге никакой опыт научных исследований не только не отвергается, но, наоборот, все, что уже имеется и зарекомендовало себя, должно быть встроено в общую картину мира. Система воззрения на мир, как целое, способствующее решению глобальных задач, стоящих перед нашей цивилизацией, с необходимостью должна содержать все общепризнанные достижения человеческой мысли, ничто не только не может быть утраченным, но и обязано быть востребованным в частных случаях.

Вполне возможно, что в чем-то автор ошибается, где-то недостаточно убедительно аргументирует. Все может быть. Автор не пытался донести истину «в последней инстанции», а лишь свои размышления, опираясь на твердое убеждение, что наблюдатель должен быть встроен в общую физическую картину как равноправный субъект всех взаимодействий, поскольку цивилизация действительно является источником силы, преобразующей мир. В связи с этим, не удивляйтесь, как говорил Платон, к словам которого хотел бы присоединиться автор, «если мы, рассматривая во многих отношениях много вещей, ... не достигнем в наших рассуждениях полной точности и непротиворечивости. Напротив, мы должны радоваться, если наше рассуждение окажется не менее правдоподобным, чем любое другое, и притом помнить, что и я, рассуждающий, и вы, мои судьи, всего лишь люди, а потому нам приходится довольствоваться в таких вопросах правдоподобным мифом, не требуя большего» [9]. Только опыт может поправить, направить и разрешить любые рассуждения.

Введение

Анализируя существующие физические теории с точки зрения общих принципов гносеологии, вероятно, было бы корректнее предположить, что имеется особое физическое взаимодействие (между «разумной» материей или Пси–материей и Природой), которое физики отсекали «бритвой Оккама», предполагая его недостаточную значимость. Данное допущение позволило им сосредоточиться на познании объектов только «неживой» природы, игнорируя существо самого субъекта, активно преобразующего собственно познаваемые объекты и специфически преломляющего, «пропуская через себя», добываемую о них информацию. Тот же шаг привел в философии к легитимному обособлению отдельной дисциплины, эпистемологии, изучающей структуру и методы получения научного знания об объектах, не уделяя внимания субъекту, его добывающего. Главным методом последующих затем исследований в физике стал сравнительный анализ результатов измерений, проводимых как в естественных условиях пребывания подобного рода – внешних – объектов, так и в инсценированных с ними экспериментах. Поскольку непреложным атрибутом любого измерения и его конечным результатом является число, постольку и числам, и всей математике в целом отводилась и отводится в данных исследованиях вовсе неординарная роль. Дело в том, что математический аппарат служит и источником, и средой для организации математических форм, используемых в подобных исследованиях в качестве «числовой мельницы» (или «числовой рулетки»), в которой значения чисел «перемешиваясь» могут возникать только в некотором порядке. В силу того, что преобразование определенным способом чисел в такой математической «оболочке» (форме) никак не связано ни с собственно исследуемыми объектами Природы, ни с их состоянием, ни с их движением или изменением, постольку используемый математический аппарат, будучи не сравнимым ни с чем другим по степени своей объективности, стал признанным инструментом неопровержимого способа аргументации. Все развитие физики, по крайней мере, за последние 4-5 столетий связано с поиском и выбором подходящих математических форм и структур, внутри которых преобразование числовых значений наилучшим образом соответствовало бы результатам практических измерений, осуществляемых при исследовании объектов неживой Природы. Идентифицирование способа

преобразования чисел в них с характером изменения параметров, сопоставляемых объектам неживой Природы, позволило на языке математики изложить наше представление о движении (изменении) собственно объектов. Помимо этого, более глубокий анализ тех же самых математических структур с необходимостью привел к появлению формализации таких физических понятий, как состояние объектов и их взаимодействие. Однако, начиная с Ньютона, пришлось вводить и абсолютные категории, т. е. категории, существующие независимо от проводимых (или предполагаемых) наблюдателями измерений: абсолютное пространство, абсолютное время, фундаментальные (абсолютные) типы взаимодействий. Для корректной интерпретации тех или иных математических форм, применение которых достаточно хорошо согласуется с экспериментальными результатами измерений, введение таких абсолютов необходимо, но помимо этого отсутствуют какие-либо другие объективные причины их существования, согласующиеся с какими-нибудь иными внешними факторами или обусловленные ими. На первый взгляд, для искомой ревизии в рамках имеющейся физической модели сложно найти объективные аргументы, допускающие введение некоторых необходимых категорий, тем не менее у нас имеется резерв: можно попытаться, согласно вышеупомянутой гипотезе, восполнить усеченную «бритвой Оккама» или каким-либо иным способом физическую модель до полной так, чтобы ввести тем самым в нее Наблюдателя как полноправного субъекта взаимодействий. С философской точки зрения необходимо расширить эпистемологию, вновь вернувшись к гносеологии.

Итак, подробный анализ такого факта, что можно установить однозначное соответствие результатов преобразований чисел в используемых математических формах получаемым данным в ходе экспериментальных измерений, привел физиков к идее введения некоторых абсолютных категорий, в том числе и взаимодействий. Следовательно, все, что требуется теперь, так это объяснить (интерпретировать) появление именно таких результатов, которые получаются в процессе измерения, с точки зрения внутренней сущности самого Наблюдателя, осуществляющего измерения, т. е. Человека.

Для этого необходимо прежде всего проанализировать процедуры измерения и отображения результатов измерения числами, соответствующие математические (геометрические и алгебраические) формы, а также роль используемых математических структур и в целом роль алгебры и геометрии. Детальный анализ показал, что для достижения вышеуказанной цели в первую очередь требуется обратиться к основаниям математики, поскольку при всей значимости математики для современной науки и ее многотысячелетней истории до сих пор отсутствует единое, приемлемое для всех изложение ее основ. Существуют различные школы, представившие свое видение на данный предмет. Каждая из них, исходя из собственного мировоззрения и свойственной ей философии, выбирает определенные понятия и принципы, полагает их в фундамент возводимой конструкции, а затем приводит конкретные примеры

построения тех или иных математических структур, добиваясь при этом весьма впечатляющих результатов. Тем не менее у всех имеется одна общая проблема. Существуют факторы, не позволяющие на основе концепции одной конкретной школы непротиворечиво построить кроме отдельных структур еще и всю математику в целом. Вывод напрашивается сам собой: слишком многогранна наука и чрезмерно узки выдвигаемые ими концепции. Требуется иной подход.

Исторический анализ ключевых вех формирования математики как науки показывает, что весьма плодотворной может быть представленная в данной книге версия оснований математики.

В ней предлагается рассматривать математику в качестве единого языка. Да, если сказать, что кроме множества традиционных языков, на которых общаются люди в разных концах нашей планеты, существует единственный, универсальный для всех людей, называемый языком математики, то в наше время этим никого не удивишь, более того, это даже не будет новостью. Однако существует весьма важный нюанс в том, как именно мы понимаем данную фразу, при всей ее расхожести, а если шире, то правильно ли вообще мы понимаем математику. Ключ к более глубокому пониманию того, что представляет собой современная математика в целом, ее роли в достижении устойчивого существования всей нашей цивилизации сокрыт в той эмпирио-теоретической конструкции, которую разработали древние шумеры и которую с тех пор человек с успехом эксплуатирует вплоть до настоящего времени, не ведая, порой, ни о том, чем он пользуется, ни тем более о ней самой. Разве что Пифагору раскрылся этот шедевр в полной мере и он сумел его прояснить доказательством ряда выводов, из него следующих. К сожалению, ни вся цепочка его рассуждений, ни все его результаты, кроме нескольких, не вышли за пределы узкого круга его единомышленников. Тем не менее вывод о сумме квадратов катетов да десятичное позиционное счисление остаются главными математическими ресурсами уже много столетий даже при отсутствии понимания их сущности по Пифагору или по-шумерски.

Примечательно, что теоретическая конструкция математики, в основу которой положена, по сути, не просто конструктивная, а именно физическая концепция, весьма эффективно может быть использована и для анализа принципиально важных вопросов и решения насущных проблем физики. И, пожалуй, самое главное в том, что результаты данного аспекта исследований позволяют сделать первые и достаточно убедительные шаги в построении теории взаимодействий в Ноосфере, где Наблюдателю действительно отводится роль полноправного их участника.

Концептуально, предлагаемая версия не только не исключает из рассмотрения успешные методы отдельных математиков, но в ее рамках так или иначе должны быть востребованы для решения конкретных задач все уже существующие достижения математической мысли и, кроме того, она остается

совершенно открытой для дальнейшего развития в будущем. Анализ результатов приведенного в приложении детального исследования оснований математики показывает, что ни одна современная математическая школа не может достичь успехов в объяснении того, что есть математика, главным образом, потому, что не уделяет должного внимания исследованиям математики шумеров. В то время, как именно ими созданная система, и ничто другое, лежит в основании всей современной математики и, более того, является ее фундаментом или краеугольным камнем, без которого было бы невозможным ее построение в современном виде, без которого невозможно постичь ее глубинной сущности, ее структуры, ее реального потенциала. С другой стороны, тот же анализ показывает, что содержательно, при всех различиях, научный багаж каждой математической школы является совершенно необходимым в решении частных задач, задач тактического характера, в едином ряду таковых, который обусловлен необходимостью последовательного и определенно направленного развития математики; стратегия же ее развития формируется в процессе поэтапного доказательства главной теоремы, логически замыкающей эмпирио-теоретическую систему шумеров в самодостаточную структуру, которая, в свою очередь, является математической моделью, отображающей структуру Ноосферы.

Общая концепция решения главной задачи в данной книге излагается поэтапно так, что:

- в предлагаемом аспекте оснований математики: математика предстает как совокупность правил построения и оперирования конечными словами единого языка – целыми числами вполне определенного счисления;
- в предлагаемом аспекте оснований гносеологии: язык математики предстает как язык Наблюдателя, как необходимое и достаточное средство, опосредующее процесс познания им Ноосферы;
- в предлагаемом аспекте оснований генетики: язык Наблюдателя предстает как отображение сигнальной системы (командно-управляющей системы) его исполнительным органам, физическое формирование которой обусловлено существованием многообразия (пространства определенной симметрии) различных свойств генома Человека, при том, что симметрии данного многообразия полностью определяют симметрии всего языка Наблюдателя в целом;
- в предлагаемом аспекте оснований философии Ноосферы: язык Наблюдателя предстает как промежуточное звено (отображение) в физическом процессе взаимодействия Наблюдателя и внешней среды.

Используемые в тексте выводы автора следует интерпретировать приводимым в приложении материалом, содержащим в том числе и широко известные математические факты.

Глава 1

Основы теоретической математики

За последние несколько столетий в математической науке назрел кризис ее оснований. С чего начинается математика? Это главный вопрос, на который до сих пор не получен ответ, несмотря на старания ученых многих поколений. Почему мы так доверяемся результатам математических расчетов, рискуя, порой, жизнями многих и многих людей? Почему современная математика успешно «работает», несмотря на до сих пор не доведенные до конца дискуссии о ее роли, значении и месте в жизни человека? Эти вопросы, ясные ответы на которые тоже отсутствуют, даже не обсуждаются в научной среде уже столетия.

В данной главе предлагается теория математики, берущая свое начало с эпохи древних шумер, вероятно, тысяч семь лет назад, теория, которая дает ответ на первый вопрос и которая в предлагаемых способах ее прикладного использования прояснит ответы на остальные в главах последующих.

1.1. Специальное средство коммуникации шумеров

В фокусе данной книги находится система, созданная древними математиками и дошедшая до нас в виде шестидесятизначного позиционного счисления, которое является специальным языком шумеров [2,10], причем, в первую очередь, именно языком. В принципе, все, что доступно сформулировать на нем для передачи другому субъекту, может формулироваться и на многих других языках, в том числе и на любом из традиционных национальных, например, на русском. Вопрос в том, сколько для этого потребуется времени, сил и прочих ресурсов, если, конечно, их вообще потребуется ограниченное количество. Можно сказать, что при межличностном общении харизма языка их математики заключается и в экономии ресурсов, и в лаконичном оформлении информации, в простоте и доступности сравнительного анализа его выражений, и во многом другом, и она хорошо всем известна по языку математики современной. И, в конце концов, этот язык дает возможность пользоваться только вербальными (алгебраическими) средствами для решения широкого круга геометрических задач, не прибегая непосредственно к собственно геометрическим построениям. Однако, при весьма широкой известности преимуществ математики, в том числе и современной, остаются недостаточно исследованными ее некоторые аспекты. Именно это и не позволяет в должной мере оценить заслугу математиков далекого прошлого в деле процветания, в конце концов, и современной цивилизации. К указанным аспектам можно отнести, например, и историю появления собственно математики, и отсутствие единодушно принимаемой всем ученым миром теории, которую называют основаниями математики. Да и система всей математики, как многообразие математических структур, разделов, теорий и школ, мягко говоря, далека от архитектурного совершенства. Уже несколько столетий аналитики в своих теоретических построениях пытаются свести концы с концами, но в целом математика так и остается похожей на покрывало из «неудобных» лоскутов, которые как ни перешивай – вместо одних прорех и изломов появляются новые. И продвигаться в решении, по крайней мере, перечисленных проблем поможет, как это ни странно, конструкция, разработанная математиками эпохи древних шумер. Ее ни с чем не сравнимые достоинства можно оценить только опосредованно,

через предоставляемые ею для нас преимущества. В частности, исследования показали, что именно шестидесятизначное позиционное счисление, как язык, предоставляет возможность адекватно наблюдаемым феноменам отображать (или описывать) внутреннюю предметную сущность геометрической модели, состоящей из объектов в пространствах, если не с произвольной, то, по крайней мере, с различной топологией, и, прежде всего, описывать в таких пространствах непротиворечиво, единообразно и компактно отношения геометрических объектов, получивших название метрических; причем, что наиболее важно, описывать на языке, слова которого, будучи составленными из символов одного и того же шестидесятизначного алфавита, всегда представлены конечным и только конечным числом символов. С точки зрения современной математики это значит, что не любое, но, по крайней мере, шестидесятизначное позиционное счисление шумеров точно является основой математики целых (конечных) чисел, в рамках которой (т. е. только с помощью целых чисел данного счисления) выразимы метрические отношения заведомо всех, в том числе и *разнородных*, величин. Другими словами, это означает, что обрабатываемая математическими методами целые числа, т. е. числа в форме конечных слов, и вычисляя результаты в такой же форме, мы получаем математический аппарат для *отображения конечной информации*, которая только благодаря *полной определенности каждого числа (слова)* может быть биективна, т. е. *взаимно однозначна*, информации отображаемой.

Итак. На языке шумеров каждая **буква внутри слова на любой позиции имеет однозначную интерпретацию**, т. е. ограничена в свободе интерпретации единственной семантикой. **Каждое слово – конечно**. Словами и буквами (в слове) допускается оперировать специальными правилами: разрешается использовать практически **аддитивную алгебру**, разве что с добавлением **умножения и деления** не на любое число, а **только на основание счисления**. Содержательно все указанные факторы **позволяют сохранять информацию** не только **от случайного искажения** (ограничены даже в непреднамеренном изменении интерпретации), но и **поддерживать биективность** в процессе ее отображения и преобразования, а также в процессе ее передачи (транслирования) и восприятия (при интерпретации), т. е. **на всем пути от ее источника и вплоть до ее получателя**.

Если этого недостаточно, чтобы по достоинству оценить заслугу древних шумеров в деле процветания нашей цивилизации, то к вышесказанному можно добавить следующее. Взяв систему шумеров в качестве исходной, появляется возможность на базе целых чисел разработать теорию оснований математики, сформулировать общую структуру всей математики в целом, выделить условие, в соответствие с которым в ней найдет свое место каждая из известных на сегодняшний день математических структур, причем место, определенное именно для нее, и, кроме того, предложить способ дальнейшего развития математики. Все вместе это означает, что, благодаря шумерам, можно показать

что, как и зачем было сделано в математике за всю ее историю то, что, по Кронекеру, кроме целых чисел действительно является «делом рук человеческих». Хотя при этом стоит оговориться, что речь идет все-таки не просто о целых числах, а о числах шумеров.

Ниже в данной главе будут приведены в развернутой форме наиболее важные выводы исследований, отчеты о которых помещены в Приложение, а также их некоторые результаты, возможно, иногда несколько подробнее, чем тому следовало быть. Однако, ввиду чрезвычайной важности некоторых и для удобства восприятия всех теоретических построений, частичное дублирование отдельных результатов можно считать вполне оправданным.

1.2. Отображение как функция языка

Построение общей теории оснований математики начнем с определения и анализа предпосылок и причин, которые повлияли на выбор шумерами шестидесятизначного позиционного счисления для создания языка математики и которые послужили широкому распространению языка в дальнейшем. Поскольку, как было уже отмечено, их счисление позволяет достичь биективности при отображении, то, прежде всего, обратимся непосредственно к отображениям, их предметам и методам.

Наиболее полная информация о языке шумеров может быть получена из его сравнения с другим языком. Собственно говоря, информация, если отбросить все наносное, это и есть результат сравнения исследуемого образца с некоторым эталоном. В качестве эталонного, назовем его метаязыком, для отображения геометрической модели используется в данном случае язык, близкий к общепринятому для научных дискуссий нашего времени. Это значит, что привлекаются произвольные ресурсы из доступных современных средств, в том числе и математических, сокращающие изложение без нарушения его логики, а также тех, что помогают выделить наиболее важные причинно-следственные связи. В свою очередь, и язык шумеров, представляемый здесь как отображение уже созданного метаязыка, будучи переложенным на современный лад, содержит не только специфические для него ресурсы, но и в качестве сопутствующих или вспомогательных ресурсы общеизвестные; такие как логические выражения, сокращения, обозначения и прочее, – все, что необходимо человеку нашей эпохи для постижения их замысла, сокрытого в ресурсе главном. Прежде, чем перейти к более детальному изложению метода описания отображений, обозначим их предметы

1.2.1. Предметная область отображения

Предметной областью отображения являются одномерные геометрические пространства, в том числе и различной топологии, а именно счетная упорядоченная совокупность точек с одинаковым расстоянием между любой парой соседних, расположенная в одном случае на прямой, а в другом – на окружности. Назовем такого рода пространства векторными, если в них

выделено одно направление последовательного обхода всех точек, в противном случае, пространства будем называть скалярными. Таким образом, одной геометрической моделью является полупрямая, состоящая из счетного числа одинаковых отрезков, второй – правильный многоугольник. В зависимости от того, обусловлено ли в данных моделях направление обхода их точек или нет, они могут быть или векторными, или скалярными.

Кроме этого, выделим два типа пространств. К первому типу отнесем односвязное пространство, в котором существует единственный способ обхода всех его граничных точек, при том, что непрерывная деформация полученного пути (граничного контура) приводит к непрерывной деформации сразу всего пространства.

Примечание. Под граничным контуром здесь будем понимать совокупность всех обозначенных точек на отрезке между двумя крайними (включая и их), которые назовем начальной и конечной. Данный (незамкнутый) контур является граничным для одномерного пространства, т. к. двигая начальную точку в направлении к конечной и последовательно проходя одну за другой все встречающиеся по пути внутренние точки одномерного пространства и по ходу вовлекая их в этот процесс движения, мы можем при этом деформировать (стянуть) все данное пространство в одну точку.

В множестве таких граничных точек пространства данного типа можно выделить только две особые – начальную и конечную. В некотором смысле такой тип пространства может представлять ряд костяшек домино, поставленных на торец вертикально вдоль прямой линии и достаточно близко друг к другу так, что, качнув одну из крайних, все остальные под ее воздействием приходят в движение и падают; при тех же условиях после аналогичного трюка с любой из промежуточных костяшек всегда, кроме упавших, некоторые из них останутся стоять вертикально, как и прежде.

Ко второму типу отнесем односвязные пространства, в которых подобная деформация всего пространства осуществима деформацией граничного контура, способ построения которого неоднозначен. Отсюда следует, что в таких пространствах существует более одной начальной и/или конечной точек граничного контура, охватывающего все пространство. Данный тип пространства может представлять такой же набор костяшек домино, но выстроенных не вдоль прямой, а вдоль окружности. В такой конфигурации к коллапсу всей конструкции без остатка приводит нарушение равновесия любой из костяшек.

Одномерное пространство, которое представляет упорядоченная совокупность вершин правильного многоугольника с выделенным направлением обхода, является односвязным пространством второго типа в том смысле, что из произвольной точки данной совокупности, двигаясь последовательно по сторонам многоугольника (хордам окружности) только в направлении, определенном порядком точек, можно пройти любую точку данной совокупности. Таким образом, можно указать более одной пары точек, имеющих название начальной и конечной, пройденный путь между которыми представляет контур, непрерывная деформация которого приведет к деформации сразу всего одномерного пространства. Одномерное пространство, представленное

упорядоченной совокупностью точек на прямой с выделенным направлением, т. е. как частный пример незамкнутого контура, является односвязным пространством первого типа. Действительно, из произвольно выбранной в качестве начальной точки невозможно, не выходя за пределы данного одномерного пространства, пройти множество точек, находящихся от нее в направлении, противоположном установленному направлению порядка точек (аналог топологии оси времени). Весьма важно, что, в данном пространстве существует только одна начальная точка, начиная обход из которой можно пройти любую точку всей последовательности, двигаясь в обусловленном направлении. Следовательно, существует один способ построения контура, непрерывная деформация которого приведет к деформации сразу всего пространства. Скалярные пространства как на замкнутом, так и незамкнутом контуре относятся к односвязным пространствам второго типа.

1.2.2. Метод отображения шумеров и способ его вербализации

Наверное, навсегда останется загадкой то, каким образом древние шумеры аргументировали логические выводы за неимением современных математических средств. Остается лишь только догадываться, что все это происходило, как и у древних греков, с вычерчиванием геометрических фигур, например, в песочнице (а может быть на глине, из которой они могли затем вырезаться) и с физической демонстрацией с помощью камушков (или палочек) того, что они имеют в виду, говоря об объектах и операциях над геометрическими объектами. Данный способ позволяет наглядно и весьма убедительно предъявить те манипуляции с камушками, которые с наибольшей точностью и достоверностью соответствуют феноменам, подлежащим описанию в геометрической модели. Более того, именно только те феномены из геометрической модели, что соответствуют демонстрируемым манипуляциям с камушками, согласно идее древних математиков, должны быть объектами описания. Обозначив требуемые феномены – объекты, процедуры, отношения, – они переходили ко второму этапу демонстрации, на котором ролевая функция камушков изменялась: объекты-камушки становились символами-камушками. Теперь они могли с помощью тех же самых камушков показать, что в предлагаемом ими способе создания конструктивных элементов –символов счисления – группы символов-камушков совершенно идентичны группам объектов-камушков, которые приводились на первом этапе, и определения конструктивных операций над символами-камушками также совершенно эквивалентны тем группировкам (перестановкам, сочетаниям и пр.) объектов-камушков, которые приводились в первом случае. Другими словами, они использовали конструктивные объекты (камушки) и конструктивные процедуры с ними в

качестве промежуточного средства, чтобы показать, что возможности данного средства эквивалентны одновременно и тому, что должно быть описанным в геометрической модели и тому, что предлагается в качестве средства описания. А если две структуры порознь эквивалентны третьей (камушкам и манипуляциям с камушками), то они должны быть эквивалентны и друг другу. Откуда и следовало, что предлагаемый шумерами язык должен совершенно точно соответствовать геометрической модели, а модель – языку. Будет не лишним отметить еще один фактор: все три отображения, в том числе и модель на песке, формировались исключительно конструктивным способом.

В наше время вместо наглядно-демонстрационного способа доказательства древних используется вербальный. Он позволяет, как полагают, достичь в точности тех же самых целей, что достигали и древние, и при этом все то же самое донести до слушателей и читателей в намного более лаконичной форме, в том числе и заочно. Однако современный способ игнорирует, к сожалению, не только физическую демонстрацию, но, порой, и конструктивизм, а неминуемой расплатой за это является усложнение вербальной конструкции. Так, чтобы убедить человека на первом этапе доказательства, требуется вербально привести достаточно подробное отображение современными математическими средствами. Именно поэтому в данной книге приводится отображение конструктивных объектов и физически реализуемых процедур над ними на метаязыке, т. е. выстраивается метаотображение с определенной алгеброй. И хотя вербальное отображение (см. Приложение), которое отображает в свою очередь уже метаотображение, является конструктивным, тем не менее оно также излагается в форме некоторой алгебры, в которой, по крайней мере, вспомогательные ресурсы представляются вербально.

В современной математике существует единственный критерий, по которому возможно оценить эквивалентность двух алгебр: если две алгебры изоморфны, то они эквивалентны (с точностью до изоморфизма). Именно поэтому выстраивая вербальное отображение, мы неукоснительно соблюдаем требование его изоморфности метаотображению. Следовательно, вербальное отображение будет ровно в той же степени адекватно описывать содержание геометрической модели, насколько адекватно это будет осуществлять метаотображение. А поскольку в данном исследовании метаотображение – это суррогат камушков древних, постольку от степени его соответствия тому, что подлежит описанию в геометрической модели, зависит корректность всего последующего изложения.

Таким образом, логически выверенным современными средствами аргументации (доказательства) будет следующий вывод: наличие изоморфизма между отображением шумеров и метаотображением обеспечивает адекватность отображения (языка) шумеров внутренней сущности собственно геометрической модели.

Кроме уже отмеченного, имеется еще несколько деталей, без которых традиционная методика современного конструирования будет значительно уступать способу древних греков и шумеров. Обсудим первую из них.

Любые исключительно умозрительного характера логические цепочки рассуждений, если в них, например, пропущено некоторое звено или, наоборот, вставлено лишнее, или некоторые из них переставлены, приведут если не к прямо противоположным, то, по крайней мере, к необъяснимым, а порой и к неверным выводам¹. Объективно же контролировать непротиворечивость теоретических рассуждений человеку позволяет только единственный способ – эксперимент. По этой причине контроль осуществляется с помощью верификации результатов на конструктивных моделях (ср. с вышеприведенным определением для информации). Именно поэтому, во-первых, построение всех объектов, в том числе и простейших, геометрической модели осуществляется только конструктивным способом, т. е. циркулем и линейкой; и, во-вторых, также конструктивно создается структура системы простейших элементов-символов, системы, являющейся основой и главным ресурсом языка шумеров. Непосредственно для построения слов такого языка вначале используется строка, состоящая из совокупности экземпляров только лишь одного символа «1». А все операции с такими строками верифицируются на конструктивных объектах геометрической модели при посредничестве метаотображения. Приведенные факторы все вместе позволяют содержательно уточнить свойство *непротиворечивости языка* шумеров при том, что данный термин в современной математике претерпел весьма существенную семантическую деформацию со времен шумеров и даже древних греков.

Другая деталь связана с тем, что несмотря на кажущуюся примитивность такого вспомогательного инструмента для доказательства, как набор камушков (или палочек), данный инструмент играл еще одну и весьма существенную роль, причем настолько существенную, что и в наше время без его вербального заменителя обойтись невозможно, если мы хотим построить *одну* структуру, а не две, пусть даже и изоморфные друг другу.

У математиков прошлого сначала камушки использовались в алгебре геометрической модели в качестве одного типа переменных – конструктивных геометрических объектов-элементов. Затем, те же самые камушки уже в вербальной алгебре использовались в качестве другого типа переменных – конструктивных символьных элементов. Выражаясь современным языком, эти предметы исполняли по очереди роль двух типов объектов-переменных, которые могли принимать операции и отношения, подобные тем, что мы определяем в каждой из изоморфных алгебр: вербальной E и метаалгебре H . В современной математике имеется такой, можно сказать, «свежевведенный» в нее (в связи с развитием языков программирования) феномен, как полиморфизм. По существующему определению, полиморфизмом называют свойство функций (программных объектов) обрабатывать переменные разных типов.

В данной книге полиморфизм определен как преобразование, обратное гомоморфизму. Типичным примером гомоморфизма является топографическая карта, на которой все объекты населенного пункта переходят в точку – в один элемент карты. С другой стороны, обратным отображением, т. е. полиморфизмом, точечного объекта карты на реальную местность является вся совокупность объектов, различимых в пределах соответствующего населенного пункта.

Рассмотрим способ реализации данных взаимнообратных отображений. Возьмем, например, карту с крупным масштабом – план города, – на которой достаточно ясно различимы и улицы, и строения, и другая городская инфраструктура. В частности, на ней можно выделить два здания, выполненных в форме прямоугольников, определить координаты центра, угол ориентации, ширину и длину каждого. Весь этот город, а вместе с ними и два вышеуказанных здания, на карте более мелкого масштаба, например, на карте всей страны отображается одной точкой. Если к карте страны приложить список всех объектов данного города с указанием параметров каждого, назовем из предикатами данных городских объектов, к которым относятся, например, такие величины рассмотренных выше зданий, как координата центра, угол ориентации, ширина и длина, то по ним обратно из точки, соответствующей данному городу на карте страны, может быть вновь восстановлен план города, возможно, и любого другого масштаба, нежели исходный. Другими словами, для обратного, т. е. полиморфного, отображения точки на карте страны в план города более крупного масштаба так, чтобы он в точности соответствовал исходному плану города, необходимо и достаточно приложить список городских объектов с требуемыми предикатами. Следует заметить, что, например, по четырем указанным параметрам могут быть взаимно однозначно восстановлены все городские объекты прямоугольной планировки, а все другие останутся неразличимыми. Для целей нашего конструирования важно то, что два таких объекта некоторого множества с различной четверкой параметров при гомоморфизме сливаются в один объект или становятся единым объектом, от которого при обратном, полиморфном, отображении в зависимости от используемой четверки параметров возможно перейти однозначно к одному и только одному объекту из пары рассматриваемых.

Если у шумеров при наглядно-демонстрационном методе изложения камушки на первом этапе сопоставлялись непосредственно объектам геометрической модели, а затем символьным элементам вербальной системы, то при вербальном методе изложения им на замену должен прийти такой инструмент, как полиморфные объекты – полиморфные носители, полиморфные множества, полиморфные операции, полиморфные отношения и т. п., которые бы объединяли пары соответствующих объектов из изоморфных алгебр. Если в каждой из двух изоморфных алгебр использовать одинаковое количество соответствующих друг другу носителей, а также соответствующих друг другу операций, отношений, констант и пр., то единообразно составленные из них

полиморфные объекты в целом и будут представлять единое алгебро-геометрическое отображение (АГО).

Полученная таким способом совокупность полиморфных объектов, объединяющая рассматриваемое алгебро-геометрическое биективное отображение в единую цельную структуру, будет определять конкретную математику, т. е. язык шумеров, представляющий собой алфавит с правилами построения слов и выражений и правилами оперирования с ними.

Нарушение биективности в АГО влечет разрушение построенной математики подобно тому, как укол иголки превращает красивый воздушный шарик в кучку цветной резины. В связи с этим попытки построения таких наук, как алгебра и геометрия, совершенно самостоятельных и независимых друг от друга абстрактных теорий, это путь, по меньшей мере, к построению «вербальнообразной» конструкции, в которой, например, наряду с буквами кириллицы и латиницы перемежаются китайские иероглифы с арабской вязью в совокупности с отдельными отрывками правил их использования в языках-оригиналах, и которая менее всего будет эффективна для применения вообще в качестве какого-либо языка для обмена информацией.

И последнее. Один и тот же наглядно-демонстрационный способ аргументации древних, используемый как на первом этапе доказательства с одним типом переменных, так и с другим типом – на втором, должен быть замещен в современном методе конструирования математики единой универсальной (полиморфной) логической средой (оболочкой), роль которой в современной математике превосходно исполняет (а судя по многим факторам, ее предназначение именно в этом) созданная Кантором и впоследствии успешно развитая теория множеств, в терминах которой, как известно, может быть сформулирована любая математическая структура, по крайней мере, из известных на сегодняшний день. Вот и все, что можно на данном этапе почерпнуть из древнего способа конструирования шумеров.

Но теперь, суммируя все результаты анализа их метода и арсенала имеющихся математических ресурсов, действительно появляется новый ракурс, и все сказанное может быть преобразовано во вполне убедительный современный метод построения всей математики – единого АГО.

Замена наглядно-демонстрационного способа построения конструкции алгебро-геометрического отображения как единой структуры вербальным требует введения единой универсальной (*полиморфной*) логической среды (теории множеств), внутри которой по типовым правилам формируются две изоморфные алгебры: метаалгебра и вербальная алгебра. При этом первая выстраивается с целью наибольшего соответствия непосредственно тем феноменам геометрической модели, которые в дальнейшем подлежат описанию вербальными средствами, а вторая, содержащая непосредственно язык и все сопутствующие ему вербальные ресурсы (константы, операции, отношения, алгоритмы и пр.), выстраивается, в свою очередь, так, чтобы она изоморфно

соответствовала первой. В то же время, для получения единой структуры алгебро-геометрического отображения, называемого математикой, необходимо, выстраивая его при посредстве вербальной алгебры и метаалгебры, соблюдать условие, согласно которому объектами математики являются только полиморфные формы, представленные упорядоченными двойками, на первом месте в каждой из которых размещается по порядку один объект из упорядоченной последовательности объектов вербальной алгебры, на втором – соответствующий объект из метаалгебры.

Таким образом, структурно *ресурсная база математики* представляет собой совокупность полиморфных объектов (*носитель* – множество элементов, *константы, операции, отношения, алгоритмы*, и т. п.), упорядоченных в соответствие с порядком структурных объектов любой из построенных алгебр; все объекты данной структуры, будучи *полиморфными бинарными формами*, возвращают и принимают (если для них это определено) переменные двух типов. Обрабатываемые операциями (отношениями, алгоритмами и т. п.) переменные разных типов и возвращаемые ими результаты разных типов находятся в особом соответствии друг с другом, которое определяется изоморфизмом построенных алгебр. Поэтому, с учетом имеющихся в современной математике ресурсов, для корректного описания всей конструкции необходимо строить не только две изоморфные алгебры, но в каждой из них требуется дублировать полный комплект объектов единой математической структуры так, что каждый объект в одной из алгебр содержит или оперирует переменными уже только одного из двух разных математических типов.

Исполнение всего комплекса мер, предусмотренных в структуре данного метода конструирования, должно обеспечить «многослойную» надежную защиту от излишней свободы интерпретации тех или иных его положений. Однако свойства вербальных выражений по своей сути таковы [6,7], что рано или поздно в данном методе будет обнаружена «брешь», т. е. в отличие от способа древних, будет найдена, вероятно, невидимая сейчас степень свободы интерпретации его положений. Тем самым в очередной раз будет найдено подтверждение следующей более общей гипотезы. Доказательством утверждения о предназначении языка математики корректно описывать физические события (объекты и процедуры) является то и только то, что существует подтверждающая данный предикат языка физически исполнимая наглядно демонстрируемая модель, взаимно однозначно интерпретирующая все уложения языка; а переход от аргументирования с помощью наглядной демонстрации физических явлений, например, к вербальному способу, требует неограниченное множество вербальных ресурсов, необходимых для доказательства существования биективного соответствия между элементами языка математики и элементами физически исполнимой модели, подлежащей описанию.

Тем не менее на данном этапе структура представленного метода конструирования математики выглядит, по мнению автора, наиболее надежной из всех, что можно воссоздать, используя современные вербальные ресурсы.

1.3. Отображение простейших моделей и примитивный язык

Два весьма существенных результата, один прогнозируемый, а другой неожиданный, получаем в самом начале исследований: необходимость нуля и аксиомы выбора.

Задача формулируется так: построить один язык для описания векторных пространств на замкнутом и незамкнутом контурах как с конечным, так и неограниченным количеством элементов в каждом.

В данном случае сначала каждое из отображений представляется множеством элементов, соответствующих образам-точкам в геометрической модели векторного пространства обоих типов связности. В частности, в вербальном множестве i -ой точке ставится в соответствие строка из i одинаковых символов. Здесь i – это метка или маркер, значения которого позволяют различать упорядоченные объекты; в качестве множества упорядоченных и попарно различных значений этой метки используются числа десятичного позиционного счисления. Унарная операция в каждой из алгебр соответствует сдвигу от начальной точки к текущей (переменной) в последовательности. Данный выбор был сделан в силу того, что из-за различия типов связности пространств в одном из них – на *полупрямой* – только для начальной точки, ограничивающей полупрямую, существует граничный контур с требуемыми свойствами, в то время как в другом – в *правильном многоугольнике* – такой контур может быть построен с началом в любой вершине многоугольника. Таким образом, определив в каждом пространстве начало граничного контура, их можно рассматривать совершенно симметрично только относительно своих начальных точек. Это позволяет интерпретировать унарную операцию на соответствующем множестве как пройденный путь от начальной точки. При симметричном рассмотрении обоих типов геометрических моделей сразу возникает две проблемы. Дело в том, что на замкнутом контуре всегда точек будет столько же, сколько и отрезков – сторон правильного многоугольника, на незамкнутом – точек будет на одну больше. Второе. При полном обходе вершин замкнутого контура осуществляется сдвиг от первой точки до нее же. Перечисленные факты хорошо известны. На моделях с конечным количеством элементов

(точек) мощности множеств элементов метаотображения для рассматриваемых типов пространств различаются на единицу, что заведомо нарушает условия идентичности (единообразия или унификации) метаалгебр для обоих типов пространств, которое содержится в требованиях задачи. Кроме того, чтобы в последующем, при переходе к неограниченным множествам, получить также единообразную метрику для обоих типов геометрических моделей, требуется сохранить идентичность алгебр, в том числе, и для любого конечного числа элементов, т. к. неограниченное множество можно представлять и как конечное, обладающее свойством расширения (хотя бы на один элемент). Следовательно, необходимо уравнивать мощности множеств. Удаление элемента недопустимо по вполне понятным причинам. Поэтому в множество элементов-точек метаотображения на замкнутом контуре необходимо добавить еще один элемент, который может иметь место в данной модели не иначе, как будучи совмещенным с одним из уже существующих, а потому может быть только пустым, т. е. не имеющим значения ни в геометрической модели, ни в вербальном отображении.

В принципе, в модели с конечным числом объектов данный элемент может быть расположен либо в начале множества упорядоченных элементов, либо в конце, т. к. расположенный иначе, где-либо внутри множества, он нарушает упорядоченность элементов, являясь граничным элементов или еще или уже не имеющим значения среди остальных. Если его расположить в конце конечной цепочки объектов, то при неограниченном объединении таких конечных цепочек, с пустым элементом в конце каждой, в бесконечную цепь, например, на замкнутом контуре также будет нарушаться упорядоченность элементов в каждом месте расположения пустого элемента. Если же объединять цепочки, предварительно исключив из каждой пустой элемент, а затем в конце бесконечной цепи добавить один пустой элемент, то, во-первых, непонятен конструктивный способ реализации такого добавления, а потому, во-вторых, отсутствует смысл его введения. В связи с этим, рассматривая симметрично геометрические модели векторных пространств на *замкнутом контуре* с конечным и неограниченным числом элементов, единственным местом расположения пустого элемента, увеличивающего на единицу мощность множества без нарушения определенного в задаче порядка элементов, является место перед первым элементом, который имеет-таки значение как в геометрической модели (и в метаотображении), так и в вербальном отображении. По этой причине, будучи совмещенным с точкой, имеющей значение в модели, пустой элемент может интерпретироваться только как начальная точка.

Аналогичную интерпретацию обязана иметь и первая точка в метаотображении геометрической модели на *незамкнутом контуре*, поскольку топологии двух моделей являются симметричными только относительно начальной точки. Но тогда, представляя вербальное отображение множества точек, причем также одинаково для обоих типов векторных пространств, натуральным рядом, составленным из членов с соответствующим набором единиц (выше

оговорённых символов), мы обязаны именно первым элементом поставить ноль. Почему? Да потому что, в дополнение к тому, что мы имеем два типа геометрических пространств, отображая каждый элемент строкой символов, шумеры точно также располагали все их вместе в форме последовательных членов натурального ряда, т. е. *в строку*, а данная форма соответствует форме одной из этих двух типов моделей – (векторной) модели отрезков на *незамкнутом контуре* («строка» отрезков). Выражаясь современным языком, они обладают в точности одной и той же симметрией – что выстроенная в строку последовательность одинаковых символов, что выстроенная в ряд последовательность одинаковых точек (или отрезков). Поэтому должно соответствовать и содержание, т. е. первым элементом натурального ряда с необходимостью должен быть ноль – аналог пустого элемента, которым является начальная точка из их совокупности на прямой. И, конечно, таковой данная точка должна быть и в другой геометрической модели (т. е. в метаалгебре), дабы они оставались топологически симметричными и отображаемыми одинаковой алгеброй.

Теперь рассмотрим операции. Полный пройденный путь на *замкнутом контуре* получим только лишь при полном сдвиге (*полном обороте радиуса*) вдоль множества точек после возвращения к начальной, чему может соответствовать унарная операция сдвига от начальной точки к начальной точке. В то же время, чтобы сохранить идентичность алгебр, мы должны в метаотображение модели с *незамкнутым контуром* ввести точно такую операцию. Но в ней операция сдвига от начальной к самой себе никак не может быть пройденным путем. Разве что только, если такая категория, как пройденный путь, может как иметь какое-либо значение, так и не иметь вообще никакого значения. Следовательно, операция сдвига точки в саму себя обязана быть только пустой в метаотображении данной модели, т. е. быть, например, просто операцией переобозначения без какого-либо сдвига. Но данная пустая операция, поскольку она пустая, может иметь и несколько расширенную интерпретацию в метаотображении модели с *замкнутым контуром*. Здесь ее можно интерпретировать как *операцию выбора начальной точки*. В алгебре метаотображения, как уже было сказано, этому соответствует унарная операция, и аргументом и значением которой (после присоединения пустой константы) должна быть одна и та же точка из последовательности. В силу внутренней симметрии модели именно данного типа связности начальная (пустая) точка может быть совмещена с любой из «значащих» точек последовательности. Из этого следует, что мощность множества таких операций на конечном множестве упорядоченных точек в метаотображении данной модели должна соответствовать количеству точек-вершин (многоугольника). Для сохранения идентичности алгебр та же мощность операций должна быть и внутри метаотображения для модели с *незамкнутым контуром*. Но в последней выбор любой промежуточной точки в качестве начальной нарушает симметрию топологии данного пространства

и пространства модели с замкнутым контуром. Чтобы сохранить идентичность алгебр, а, по сути, симметрию между топологиями двух векторных пространств, каждая из операций данного множества, причем одинаково на любой из моделей, должна интерпретироваться просто операцией выбора. Выбора чего? Того элемента, который потребуется.

Итак, только лишь добавив в цепочку логических рассуждений одно дополнительное звено – требование симметризации (т. е. соблюдение единообразия) алгебр над целыми объектами в векторных пространствах различной топологии, – получаем вывод, позволяющий решить сразу две проблемы современной математики: логически обосновать необходимость введения и нуля вначале натурального ряда и аксиомы выбора в аксиоматику.

Таким образом, фундаментом каждой из пары изоморфных рассмотренных алгебраических структур являются три феномена: порождающая операция, множество объектов и пустая операция, результатом которой является пустой элемент. Данные структуры являются отображением того, что мы усматриваем в объективно существующей (в результате исполнения графических построений) геометрической системе, и они положены в основу всей развиваемой впоследствии математики.

Обобщая другие результаты предварительного исследования, отметим следующее. Форма записи информации с помощью натурального ряда (с нулем вначале) предельно проста, достаточно операбельна и в то же время чрезмерно расточительна и обременительна, т. е. недостаточно эффективна. Тем не менее такой способ имеет право на существование. На его основе может быть создан язык, назовем его примитивным. Без сомнения хорошей альтернативой ему по компактности, а следовательно, и по эффективности является язык на основе позиционного счисления с целочисленным основанием. В то же время, по ходу симметризации простейших одномерных пространств не обнаруживается никаких предпосылок, чтобы построение компактного языка стало бы не самоцелью, а было обусловлено необходимостью. В частности, даже скорректировав геометрическую модель с замкнутым контуром в соответствие с требованиями ее конструктивности и включив в процесс симметризации модель с конечным числом вершин правильного многоугольника (поскольку, пользуясь циркулем и линейкой, можно разделить окружность на определенное число равных частей, но не произвольное), мы приходим к тому, что выбор циклической структуры вербального множества (счисления) уже будет вполне обоснованным, но цикличность не является необходимой. Тем более из рассматриваемых моделей не следует необходимость в позиционности счисления. Единственно необходимым следствием остается, как и прежде, его счетность.

Расширение предметной области отображения единым языком, за счет дополнительного формулирования в (усложненной) задаче требования непротиворечивой симметризации векторных и скалярных пространств на обоих типах контуров, приводит к введению дополнительно в каждую из алгебр

обоих отображений типичной бинарной (т. е. замкнутой, коммутативной, ассоциативной) операции, что соответствует операции композиции в один пройденный путь двух других. Данная операция с коммутативными аргументами «игнорирует» отношение порядка элементов, в ней элементы предстают совершенно симметрично. Однако при необходимости имеющиеся ресурсы в алгебрах позволяют восстановить порядок для векторных пространств. В связи с этим, подобная операция позволяет абстрагироваться от различия топологий одномерных пространств, и в ее рамках четыре пространства могут рассматриваться совершенно симметрично. При этом каждая из новых алгебр, т. е. алгебра с добавленной бинарной операцией, будет расширением соответствующей алгебры без нее. Или, по-другому, «старая» алгебра (вербальная или метаалгебра) будет подалгеброй новой. Требуется и в дальнейшем неукоснительно следовать правилу: любая алгебра при ее расширении должна быть вложением в алгебру, ее расширяющую, с неперменным соблюдением изоморфизма между алгебрами обоих отображений. Вновь получаемые алгебры, наряду, возможно, с новыми (например, компактными) формами организации носителя отображения и новыми операциями над ними, должны включать в себя все формы организации носителя алгебры вложенной и совершенно все ее операции². Только тогда вновь получаемые алгебры будут наследовать все свойства предыдущих, и мы по обстоятельствам всегда можем воспользоваться средствами любой из них. В частности, тем же способом каждая из алгебр с бинарной операцией может быть расширена и другими операциями так, чтобы получить достаточно комфортную аддитивную алгебру на множестве целых положительных чисел. Этот принцип дополняет основы метода шумеров, приведенного выше. Более детальный анализ данного принципа, его результат и предлагаемое в соответствии с ним решение по модификации вербального изложения метода шумеров будут приведены ниже. Но сначала приведем результаты анализа непосредственно конвенции шумеров.

1.4. Единая метрическая система шумеров

Необходимость использования позиционного счисления в математике, и к тому же именно шестидесятизначного, появляется тогда, когда переходим к решению проблемы описания также вербальными средствами отношений не только между собственно целыми объектами, но и между целыми объектами разной природы, площадями и углами, а также между частями целых объектов в пространствах различной топологии, т. е. когда пытаемся решить в полной мере проблему метризации объектов в таких пространствах.

Собственно говоря, для решения именно данной задачи все результаты предварительного исследования мы вынуждены считать ничтожными в той части, где они связаны с исследованиями одномерных пространств. С другой стороны, тот материал, который изложен выше, является необходимым для ее решения, т. к. в то же время он будет содержать все необходимые предпосылки для формирования структуры, имеющей предназначение выполнять роль вербальной, в позиционную шестидесятизначную, получившую название счисления, если, поступившись отчасти принципом «от простого к сложному», заменить предмет исследования: вместо одномерных многообразий рассматривать только двумерные.

Отметим более подробно некоторые результаты ее решения.

На начальном этапе требуется определиться с выбором ресурсов как измеряющими, так и измеряемыми. Процедура весьма важная и поэтому требует подробного обоснования, причем всех ее аспектов. В связи с этим вначале приведем окончательный результат, к которому шумеры вынуждены были прийти в результате анализа всех условий, требуемых для решения главной задачи.

Анализ показал, что для ее решения необходимо принять конвенцию, назовем ее *конвенцией изоморфизма шумеров*, согласно которой решение задачи построения единообразной (коррелированной) метрики для определения величин площадей равнобедренных треугольников и углов, находящихся в их вершине, достигается выбором египетского треугольника, который мы обозначим $\Delta 345$, в качестве измерительного инструмента³, позиционного счисления с основанием шестьдесят ($n = 60$) для отображения результатов

измерения в виде строки из конечного числа символов и аддитивной алгебры на избранном счислении.

При выборе измеряющих ресурсов принципиальное значение имеет возможность конструктивно воспроизводить геометрические объекты с помощью циркуля и линейки. Анализ простейшего способа построения треугольника $\Delta 345$ циркулем и линейкой показывает, что возможность (совокупность условий) его существования определяет границы геометрии, необходимой и достаточной для выполнения всех геометрических построений в рамках конвенции. С другой стороны, из невозможности его построения следует ничтожность всех нижеследующих аргументов. Требуемая для его построения геометрия, по современной оценке, не выходит за рамки евклидовой, т. е. является вложением в последнюю.

Чтобы построить правильный многоугольник, необходимо поделить окружность на равные части. Треугольник $\Delta 345$ содержит все необходимые элементы для деления окружности на 60 равных дуг. К этому можно добавить, что поскольку трисекция дуги с помощью циркуля и линейки является, как известно, задачей неразрешимой, а тривиальные бисекции не рассматриваются, данное количество равных дуг является максимальным при пользовании треугольником $\Delta 345$.

С помощью элементов $\Delta 345$ можно последовательно разделить эталонный отрезок D на 60 равных частей.

Площадь произвольного прямоугольника может быть вычислена суммированием максимального количества треугольников $\Delta 345$, заполняющих ее. С учетом семейства треугольников ему подобных с коэффициентом подобия сторон, равным 60, результат измерения возможно получить с любой наперед заданной точностью относительно эталонного $\Delta 345$ в рамках 60-значного позиционного счисления несмотря на то, что соотношение площадей подобных треугольников будет кратно 3600. В рамках как 3600-значного, так и 60-значного позиционного счисления, за счет аддитивного сочетания треугольников $\Delta 345$ в соответствующие для каждого из счислений группы, результат измерения с любой наперед заданной точностью всегда будет выражаться конечным количеством значащих цифр, в том числе и после запятой. Кроме того, между этими двумя счислениями существует биективное соответствие, что позволяет взаимно однозначно переводить результат измерения из одного счисления в другое так, что конечной строке символов одного счисления будет биективно соответствовать конечная строка символов другого. В дополнение к сказанному, поскольку предлагаемая в конвенции алгебра является исключительно аддитивной, само по себе применение 60-значного позиционного счисления является обоснованно допустимым и достаточным для измерения площадей с любой наперед заданной точностью с целью отображения результата в форме строки, содержащей конечное число символов (цифр) даже при

том, что площади прямоугольников смежных масштабов различаются не в 60, а в 3600 раз.

Как известно, площадь прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника, построенного на его катетах, и, наоборот, площадь двух одинаковых прямоугольных треугольников равна площади соответствующего прямоугольника; разделив равнобедренный треугольник по высоте (она же и медиана и биссектриса) на два одинаковых прямоугольных, их можно перестроить в равновеликий прямоугольник. Следовательно, площадь произвольного равнобедренного треугольника также может быть измерена с любой наперед заданной точностью эталонным треугольником $\Delta 345$ и семейством ему подобных, а результат измерения однозначно представлен числом 60-значного позиционного счисления, состоящим из конечного числа цифр.

Последний факт весьма важен для корреляции метрик углов и площадей, составленных из равнобедренных треугольников внутри правильного многоугольника. Действительно, в результате тривиальной триангуляции правильного многоугольника получаем равные равнобедренные треугольники, основанием которых являются стороны многоугольника, а боковыми сторонами – радиусы описанной окружности. Из таких параметров каждого из них, как площадь (с границами, проходящими через вершины многоугольника и центр окружности) и угол (с границами, проходящими через вершины многоугольника) при вершине, могут быть построены упорядоченные множества, каждое из которых будет биективным множеству упорядоченных точек – вершин (и множеству упорядоченных сторон) правильного многоугольника, рассмотренному выше. На каждом из этих множеств может быть построено метаотображение и вербальное отображение с алгебрами, изоморфными алгебрам примитивного языка, построенного аналогично тому, как это было сделано для одномерных геометрических объектов – прямолинейных отрезков. Основание для последнего утверждения можно найти в определении геометрических понятий площади и угла, согласно которым композицией площадей является площадь, а композицией углов является угол⁴, т. е. точно также, как и длина является композицией длин, отношения которых (при посредстве операций) были рассмотрены при построении примитивного языка.

И в заключение. Почему рассматривается метризация углов и площадей, а не расстояний?

Во-первых, непосредственно шумеры метризовали ни что иное, как только площади и ничего, кроме них. Поскольку алгебра для геометрической модели с площадями равнобедренных треугольников (элементов тривиальной триангуляции правильных многоугольников) изоморфна алгебре для модели с углами тех же треугольников, то метризация угловых величин будет опосредована через измеримость площадей (другого метода не придумали и поныне, да и незачем). В связи с этим и только этим фактом 60-значное позиционное счисление является не только достаточным (см. выше), но еще и необходимым счислением для измерения и площадей и углов с любой наперед заданной

точностью, причем с целью отображения результата в форме строки, именно единообразно содержащей конечное число символов (цифр) как для одних величин, так и для других.

Во-вторых, таким двумерным объектом, как прямоугольник можно измерять и (одномерные) расстояния.

Все вместе и послужило для них веским аргументом в пользу выбора в качестве основополагающего принципа принцип конструктивизма, а не принцип «от простого к сложному».

С тех пор и вплоть до настоящего времени величины углов при непосредственном вычислении их значений определяются не иначе как в радианах, т. е. через отношение площадей. В частности, в современной математике это осуществляется через отношение площади сектора к площади окружности, что при сокращении на один и тот же квадрат радиуса переходит в отношение соответствующих дуг окружности. А расстояния измеряются линейкой, которая есть ни что иное, как прямоугольник, одна из сторон которого принимается равной единице.

1.5. Потенциал неконструктивного расширения системы шумеров

Анализ показывает, что основы метода отображения, изложенные выше, требуется дополнить. Некоторые предпосылки для этого можно найти в материале исследований, результаты которых уже изложены, другие – не столь очевидны.

Так, начиная с самых первых шагов при выстраивании созданной шумерами системы, для получения единого языка приходится симметризовать два простейших, но не одинаковых, языка, каждый из которых в достаточной мере может отображать соответствующий тип топологии векторного пространства. В результате такой симметризации получается также некоторый язык. Но при этом возникает необходимость внесения в него дополнений, пустого элемента и пустой операции (выбора), и откорректировать метрику. Затем при совместном рассмотрении пространств векторных и скалярных обновленный единый язык дополнительно оснащается новыми аддитивными бинарными операциями – средствами, которые позволяют симметризовать элементы множеств обеих алгебр. По сути, при этом симметризуются различные топологии, они объединяются в единую бинарную структуру с двумя возможными равноправными исходами, подобно монетке с «орлом» и «решкой». Наряду с добавлением новых ресурсов в данном случае также преобразуется и язык, и метрика. На следующем этапе, чтобы получить шестидесятизначное позиционное счисление, приходится симметризовать количественное изменение совокупности (целых) объектов в пространстве и количественное изменение одного (целого) объекта в том же пространстве, которое сопровождается новыми дополнениями в алгебры и опять-таки корректировкой и языка, и метрики.

Анализ причинно-следственных связей даже в приведенных примерах показывает, что внесение дополнений и изменений на каждом этапе становится необходимым, если возникает потребность в симметризации определенных феноменов, а она, в свою очередь, появляется, когда возникает потребность в единообразном описании неких различающихся факторов.

В дополнение к этому, следует отметить некоторые другие внутренние свойства полученной шумерами структуры, непосредственно в которых,

возможно, сокрыт потенциал для генерации всего архитектурного многообразия, имеющего место в математике настоящего времени.

Дело в том, что вся их конструкция нуждается в аксиоме, которая не является конструктивом и истинность которой до сих пор только предполагалась вполне очевидной. Необходимость ее формулирования обусловлена доводами скорее общепhilosophического характера.

На основании сказанного, первым пунктом конвенции должна быть следующая **аксиома**: *площадь произвольной плоской фигуры – инвариант геометрии.*

Но тогда последним пунктом, логически завершающим конвенцию, должна быть **главная гипотеза**: *площадь произвольного прямоугольника, будучи инвариантом геометрии, не зависит ни от математически различных, ни от физически различных способов ее измерения в системе (математике) шумеров.*

Смысл формулирования данной гипотезы в том, что мы точно не знаем, а потому только предполагаем, что и все возможные алгебраические преобразования, связанные с различием процессов измерения, приводят к выводу об инвариантности площади и в количественном выражении, т. е. в алгебре. А эти предположения требуют доказательства. Данная гипотеза может быть ключевой для последующего развития всей математики, диктуя и промежуточные вехи, и их разнообразие, и общее направление движения математической мысли, т. е. все то, что в совокупности выражается термином «концепция развития архитектуры математики».

Идея, заложенная в гипотезе, порождает множество различных истинных утверждений, которые могут быть сформулированы при детальном рассмотрении процесса измерения. В частности, вследствие конструктивных особенностей собственно системы шумеров, в любой паре множеств элементов, рассматриваемых в ней, установление взаимно-однозначного соответствия между их элементами, если оно вообще возможно, допускается не одним способом. Кроме того, представляется также вполне очевидным, что результат измерения не должен зависеть ни от способа ориентации, ни порядка и времени размещения измерительного инструмента на измеряемой площади: можно сразу всей совокупностью треугольников $\Delta 345$ покрыть ее или по очереди, начиная с произвольного места, помещать их, возможно, переставляя и/или временно убирая, растянуть процесс во времени и т.д. и т.п. Все возможные и вполне различные, (как математически, так и физически) друг от друга варианты процесса измерения должны представлять его (процесса) допустимые симметрии, поскольку конечный результат – число, отображающее величину измеряемой площади с наперед заданной точностью, – должен быть одним и тем же.

Разрешение единственного не конструктивного множества – множества истинных утверждений – является действием необходимым для достижения

замкнутости всей системы шумеров, только в данном случае можно будет вполне определенно утверждать, что она является действительно самодостаточной. Данный процесс не ограничен, а потому его завершение недостижимо. Однако, если невозможно сразу решить проблему в целом, ее следует разделить на этапы⁵. На каждом из них используется типовая методика. А именно, происходит выбор конкретных различных способов, подлежащих формированию в некий симметричный мультиплет. Это позволяет в приложении к конкретно рассматриваемой ситуации наполнить частной семантикой формальное утверждение (или форму) гипотезы, а затем уже семантически уточненное утверждение необходимо интерпретировать математической моделью, задача которой – подтвердить (или опровергнуть) главную гипотезу в той лишь только мере, в которой конструктивная интерпретация с помощью данной модели отображает симметричное объединение в единую совокупность (математически или физически) конкретных различных способов измерения произвольного прямоугольника. Теперь после изложения идеи, обосновывающей причинно-следственную цепочку рассуждений, перейдем к описанию способа ее реализации.

Приведенные в приложении подробные отчеты исследований расположены в последовательности, из которой хорошо видно, что, наряду с тем, что в каждом из них приводится симметризация тех или иных ресурсов метризации пространств, в первой части, вплоть до конвенции шумеров включительно, в данный процесс постепенно включаются вместе с ресурсами еще и собственно различного рода пространства, подлежащие метризации и реализуемые конструктивно. Затем, получив комплект необходимых и достаточных ресурсов, а также список разнородных пространств, метризация которых возможна данными ресурсами, в дальнейшем симметричному представлению подлежат взаимоисключающие способы использования ресурсов из того же самого пакета. Также анализ показывает, что наряду с симметризацией ресурсов происходит и преобразование метрики и языка. Действительно, нетрудно заметить, что с самого начала, когда симметризируются пространства, постепенно видоизменяется формулировка и языка, и метрики. То же самое с ними происходит, когда симметризируются способы применения ресурсов шумеров. Таким образом, вполне очевидно, что математику после шумеров можно представить как теорию симметрии использования ресурсов метризации шумеров в способе ими же созданном.

В частности, следуя данной стратегии, удастся непротиворечиво расширить математику положительных чисел шумеров математикой целых, включающей в общую структуру и числа отрицательные. Наряду с этим в рамках того же самого метода удастся построить математику альтернативной конвенции и математику конвенции Пифагора с его знаменитым выводом для метрики площадей квадратов катетов и гипотенузы. Каждая из вновь полученных математик непротиворечиво редуцируется к математике шумеров, а затем и к

примитивной математике, с прописанной в последней примитивной метрикой площадей.

В обычных терминах результат симметризации – это обобщение. С математической точки зрения симметризация – это гомоморфное отображение. Содержательно последнее выгодно отличается от обобщения тем, что в нем представляется вырожденным в полиморфный объект только то (и ничего более) и так (а не иначе), что при обратном отображении (т. е. при отображении одного вырожденного феномена в два существенно различных), распадаясь на две части, биективно преобразуется именно в ту их пару, которая изначально предназначалась для вырождения, для чего вырожденный феномен должен содержать (вспомогательные) ресурсы именно к биективному обратному отображению (редукции), а такого рода ресурсами он должен быть снабжен заблаговременно, наследуя их от феноменов, изначально предназначавшихся к симметризации. Другими словами, гомоморфное отображение выстраивается таким способом, что для всех объектов, вырождаемых данным отображением, можно указать предикаты и соответствующие ресурсы, по которым данный гомоморфизм можно биективно отобразить обратно полиморфным отображением. Данный метод прослеживается во всех случаях симметризации, начиная еще с совместного рассмотрения контуров различной топологии.

Рассмотрим его более подробно на примере последней из приведенных в приложении теорем Пифагора. В ней подлежат симметризации два способа измерения Золотым Прямоугольником (ЗП) площади S_{ABCE} произвольного прямоугольника с выделенным основанием. Эти способы измерения являются равноправными в альтернативной конвенции, т. к. в ней допустимо размещение вдоль основания измеряемого прямоугольника одной из двух не равных сторон ЗП: или стороны Φ или стороны $\Phi - D$. Другая из сторон того же ЗП будет направлена вдоль высоты измеряемого прямоугольника. Содержательно, мы симметрично рассматриваем две копии одной и той же математики $M_A^\pm$ альтернативной конвенции – $M_A^\pm(\Phi)$ и $M_A^\pm(\Phi - D)$, в каждой из которых фиксируем одну из двух возможных ориентаций измерительной среды. Возможности такого выбора измерительной среды в геометрической модели (в метаалгебре) соответствует возможность выбора в вербальной алгебре одного произведения из пары некоммутативных, $h_{\Phi-D} \times l_\Phi = s_\Phi$ или $h_\Phi \times l_{\Phi-D} = s_{\Phi-D}$, каждое из которых выражает площадь s произвольного прямоугольника через произведение его высоты h и основания l : $h \times l = s$. В указанных некоммутативных произведениях параметры $h_{\Phi-D}, l_\Phi, s_\Phi$ и $h_\Phi, l_{\Phi-D}, s_{\Phi-D}$ являются двумя тройками чисел десятичного позиционного счисления, первая из них представляет соответственно высоту, основание и площадь измеряемого прямоугольника при условии, что абсцисса измерительной среды сформирована стороной Φ инструмента ЗП, а вторая – высоту, основание и площадь измеряемого прямоугольника при условии, что абсцисса измерительной среды сформирована стороной $\Phi - D$ инструмента ЗП. Условно говоря, этим

математикам соответствует ЗП, площадь которого равна $S_{\Phi(\Phi-D)}$ и $S_{(\Phi-D)\Phi}$, соответственно (в них переставлены местами индексы). Затем упорядоченную пару математик, например, $[M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi-D)]$, отображаем гомоморфным преобразованием в математику $M_H^{\pm}$ конвенции Пифагора: $[M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi-D)] \Rightarrow M_H^{\pm}$. Структура математики $M_H^{\pm}$ наследует в полной мере математику $M_A^{\pm}$ со всеми ее ресурсами. Как показано в приложении, математика $M_H^{\pm}$, кроме этого, содержит в качестве подмножества еще и математику $\Delta M_{H0}^{\pm}$ одномерных многообразий и некоторое множество ресурсов $\delta M_{H0}^{\pm}$, которое, собственно, не является математикой. Следовательно, множество $M_H^{\pm}$ уже содержит три подмножества: $M_A^{\pm} \subset M_H^{\pm}$; $\Delta M_{H0}^{\pm} \subset M_H^{\pm}$; $\delta M_{H0}^{\pm} \subset M_H^{\pm}$. Возможно, множество $M_H^{\pm}$ не ограничивается даже этими тремя вложениями и имеет другие подмножества. Но для целей симметризации двух математик $M_A^{\pm}(\Phi)$ и $M_A^{\pm}(\Phi-D)$ это не важно. Важно, что мы построили некоторое обобщение $M_H^{\pm}$, подмножествами которого, кроме $M_A^{\pm}$, являются (или, возможно, являются) и другие. В математике $M_H^{\pm}$ измерительным инструментом выбран квадрат. При измерении площади произвольного прямоугольника квадратом не имеет значения, какая из сторон D квадрата будет помещена, например, вдоль оси абсцисс, т. к. суммарная площадь S_{ABCE} измеряемого прямоугольника в единицах площади S_{D^2} в любом случае будет одна и та же: $S_{ABCE} = n \cdot S_{D^2}$, где n – некоторое десятичное число. Поскольку в математике $M_H^{\pm}$ выражение $S_{D^2} = S_{\Phi(\Phi-D)} = S_{(\Phi-D)\Phi}$ будет всегда верным, т. е. в ней данное выражение не зависит от ориентации ЗП относительно сторон квадрата (или, если угодно, квадрата относительно ЗП), то отсюда следует, что будет верным и выражение

$$S_{ABCE} = n \cdot S_{\Phi(\Phi-D)} = n \cdot S_{(\Phi-D)\Phi},$$

т. е. в математике $M_H^{\pm}$ последнее выражение также не зависит от двух возможных ориентаций сторон ЗП относительно основания измеряемого прямоугольника. Таким образом, полученный в математике $M_H^{\pm}$ результат $S_{ABCE} = n \cdot S_{D^2}$ на основании выражения $S_{D^2} = S_{\Phi(\Phi-D)} = S_{(\Phi-D)\Phi}$ при любом выборе (из двух возможных) ориентации осей абсцисс и ординат мы можем однозначно транслировать в результат $S_{ABCE} = n \cdot S_{\Phi(\Phi-D)} = n \cdot S_{(\Phi-D)\Phi}$ математики $M_A^{\pm}$. По существу, математика $M_A^{\pm}$ альтернативной конвенции, кроме указанных в приложении ресурсов (полиморфных объектов), должна содержать еще один полиморфный объект, логический оператор выбора (переключатель) $L = \{L_{\Phi}, L_{(\Phi-D)}\}$, одно из состояний которого L_{Φ} определяет выбор измерительной среды с абсциссой метризуемой стороной Φ инструмента ЗП в металгебре и некоммутативного произведения $h_{\Phi-D} \times l_{\Phi} = s_{\Phi}$ в вербальной алгебре, т. е. математику $M_A^{\pm}(\Phi)$, а другое состояние $L_{(\Phi-D)}$ определяет

противоположный выбор соответствующих ресурсов, т. е. математику $M_A^{\pm}(\Phi - D)$. Тогда математики $M_A^{\pm}(\Phi)$ и $M_A^{\pm}(\Phi - D)$ будут отличаться от $M_A^{\pm}$ тем, что в каждой из них уже осуществлен выбор определенного варианта⁶. В этом случае математика $M_A^{\pm}$ будет выполнять роль полиморфного объекта внутри математики $M_H^{\pm}$, т. к. любой результат $S_{ABCE} = n \cdot S_{D^2}$ измерения в $M_H^{\pm}$, будучи однозначно транслированным к результату математики $M_A^{\pm}$, при отображении $M_A^{\pm} \Rightarrow [M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi - D)]$ и выборе определенного состояния или L_{Φ} , или $L_{(\Phi-D)}$ оператора L однозначно преобразуется или в результат $S_{ABCE} = n \cdot S_{\Phi(\Phi-D)}$ математики $M_A^{\pm}(\Phi)$, или в результат $S_{ABCE} = n \cdot S_{(\Phi-D)\Phi}$ математики $M_A^{\pm}(\Phi - D)$. В связи с этим, математика $M_H^{\pm}$ будет гомоморфизмом для упорядоченной пары математик $[M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi - D)]$, поскольку она содержит полиморфный объект $M_A^{\pm} \subset M_H^{\pm}$ такой, что при гомоморфном преобразовании $[M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi - D)] \Rightarrow M_H^{\pm}$ все результаты, полученные как в математике $M_A^{\pm}(\Phi)$, так и в математике $M_A^{\pm}(\Phi - D)$ преобразуются однозначно в результаты математики $M_A^{\pm}$, а следовательно, преобразуются в результаты математики $M_H^{\pm}$. Вместе с тем, при обратном, т. е. полиморфном, отображении $M_H^{\pm} \Rightarrow [M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi - D)]$, результаты, полученные в математике $M_H^{\pm}$, могут быть транслированы в результаты математики $M_A^{\pm}$, а затем однозначно преобразованы или в результаты $M_A^{\pm}(\Phi)$ или в результаты $M_A^{\pm}(\Phi - D)$. Так как математика $\overline{M_A^{\pm}}$ содержит и математику $M_A^{\pm}$ и все то, что можно обозначить символом $\overline{M_A^{\pm}}$, то математика $M_H^{\pm}$ будет не только гомоморфизмом, но и обобщением математик $M_A^{\pm}(\Phi)$ и $M_A^{\pm}(\Phi - D)$: $M_H^{\pm} = M_A^{\pm} \cup \overline{M_A^{\pm}}$. При этом, что наиболее важно, существует биективное соответствие результатов при двух взаимнообратных отображениях – гомоморфном и полиморфном:

$$[M_A^{\pm}(\Phi); M_A^{\pm}(\Phi - D)] \Leftrightarrow (M_H^{\pm} \setminus \overline{M_A^{\pm}}).$$

С физической точки зрения подобные гомоморфизмы не являются отображением одного конкретного процесса измерения, но отображают, как минимум, пару порой даже не совместимых друг с другом процессов измерения. В других случаях подобные гомоморфизмы являются отображением целого множества (или комплекса) различных объектов. Например, точка на карте, соответствующая населенному пункту, отображает и строения, и улицы, и площади и пр., т. е. все то, что относится к данному населенному пункту. Поэтому для построения гомоморфизма могут привлекаться и не конструктивные ресурсы. Однако при этом в гомоморфизме должны сохраняться и ресурсы

конструктивные, которые и позволят осуществить требуемую редукцию. В частности, к данной точке на карте необходимо приложить комплект геодезических карт большего масштаба (или больших масштабов), на которых и появятся все объекты, соответствующие ей.

В связи с этим, в общий метод вербализации математики шумеров следует добавить, во-первых, принцип наследования всех ресурсов при ее расширении, во-вторых, расширяя математику путем симметризации равновозможных исходов (измерения), следует соблюдать биективность во взаимнообратных отображениях – гомоморфном и полиморфном.

Указанные меры заведомо обеспечат непротиворечивость искомого расширения.

1.6. Теория симметрии конечной информации

Как известно, существует немало признаков того, что современная математика является не более и не менее как теорией симметрии [3,4,5]. Однако, вероятно, главным и наиболее убедительным будет следующий. Следуя методу шумеров, последовательное включение в симметричное рассмотрение все новых объектов и процедур, позволяет, начиная с математики шумеров, создать общую теорию математики, которая будет включать все существующие в настоящее время математические структуры и теории, и позволит органично встроить в нее научные заделы практически всех известных математических школ. Пока еще данное утверждение не доказано, и оно является не признаком современной математики, а ее гипотезой и, может быть, основой концепции ее дальнейшего развития. Вероятно, для ее превращения в доказанный вывод, если это возможно, для математики современной потребуется долгий и кропотливый труд не одного человека. Обнадёживает то, что принципиальных препятствий для такого доказательства, на первый взгляд, не предвидится, а также то, что в каждой современной математической структуре отчетливо прослеживаются те или иные факторы, представленные в ней совершенно симметрично. С этой целью фактически потребуется доказать, что все дальнейшие расширения следуют из математики Пифагора, математики с десятичным позиционным счислением. Содержательно, необходимо показать, что ее дальнейшее корректное расширение математическими структурами, поддерживающими метрику Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, будет заведомо успешно верифицироваться в рамках того же счисления на геометрических моделях и так же непротиворечиво редуцироваться к математике шумеров, а затем и к математике с примитивной метрикой.

К одному из таких расширений, в частности, необходимо отнести и математику с введенными в ней пропорциями для одномерных прямолинейных отрезков и тригонометрическими отношениями, т. е. математику с хронологически первыми расширениями в постпифагорейский период. Например, именно для этих целей в конвенции Пифагора уже явно просматривается потенциал. Квадрат предоставляет возможность установления изомерных метрик только в двух ортогональных направлениях, что заведомо не выполняется в

направлениях не ортогональных. Вместе с этим даже ортогональные стороны квадрата и ортогональные диагонали позволяют установить, хотя и ортогонально изомерные, но разные метрики. Из этого следует, что обозначенное расширение конвенции Пифагора, скорее всего, может быть достигнуто дальнейшей симметризацией методов измерения произвольного прямоугольника квадратами, учитывая тот фактор, что стороны (или диагонали) квадратов могут составлять произвольный угол со стороной измеряемого прямоугольника.

Будет ли впоследствии доказана правомерность общего вывода для всех структур современной математики или нет, будет ли установлено, что вся современная математика – это последовательное развитие концепт-продукта шумеров по лекалам, ими заложенным, или нет, но уже сейчас можно утверждать, что математика шумеров – это теория симметрий информации, что прослеживается вплоть до ее расширения математикой Пифагора, причем информации, возможность отображения которой в конечную и только конечную строку цифр обусловлена использованием только чисел шестидесятизначного позиционного счисления, но никак не произвольного и даже не десятичного и, тем более, не двоичного.

На основании изложенного отметим весьма важный вывод. Переходя, начиная с математики альтернативной конвенции, к десятичному счислению и определению площади прямоугольника (и, соответственно, треугольника) через произведение ортогональных сторон, мы обрекаем себя на получение результатов математических расчетов не в словарной форме, т. е. не в форме слова с конечным числом букв в нем, а в форме действительных чисел общего вида, в которой слово может быть (*неограниченно*) *недоопределенным до конца*. Возможность доопределения их различными способами приводит к «разнотчтениям» и девальвирует до ничтожной их ценность при использовании в качестве ресурса точной информации. С другой стороны, их использование в качестве *промежуточного* средства при математическом преобразовании конечных слов в конечные слова является вполне легитимным, поскольку они не представляют собой ни подлежащие обработке математическими операциями конструктивные *преобразуемые* данные, ни получаемые в результате редукции конструктивные *преобразованные* данные. Ведь в некоей обобщенной (идеальной) математической структуре конструктивные *преобразуемые* данные могут обрабатываться любыми неконструктивными методами и преобразовываться (до редукции) в любые неконструктивные элементы («воздушные замки»), важно, что только после редукции мы неизбежно получим *преобразованные* данные снова именно в конечной форме, и это будет не иначе как на языке шумеров.

Из приведенного в данной книге материала следует выводы.

Цель развития математики как теории симметрии конечной информации – построение единого гомоморфного алгебро-геометрического отображения (ЕАГО), в котором вырождаются все возможные способы измерения прямоугольников в различных пространствах. Метод ее построения – сохранение

возможности редуцирования последовательно вырождаемых феноменов к схеме измерения с метрикой шумеров и, возможно, с дальнейшим редуцированием к метрике примитивной математики (последнее обладает, вероятно, только познавательной ценностью). ЕАГО – это Единый Разрешимый Алгоритм. Теория построения Алгоритма, разрешающего множество чисел шумеров во множестве произвольных чисел – это и есть теория математики, а собственно данный Алгоритм – это и есть ответ на вопрос о том, что такое математика.

Хотелось бы надеяться, что все вышесказанное в конце концов подвигнет некоторых современников изменить свою оценку совокупности разрозненных фактов о пифагорейцах и не относится к приверженцам данной математической школы, как к бедолагам, ослепленным в своем религиозно-мистическом преклонении перед (целыми) числами, но только как к тем, немногим в то время, кому суждено было понять всю глубину замысла древних шумеров и по достоинству оценить потенциал их системы.

Пифагорейцы постигли это за два с половиной тысячелетия до наших дней, не говоря уже о времени создания собственно системы шумеров и о ее создателях!

Глава 2

К физической картине мира

Классическая физическая картина мира, сформированная Ньютоном, за последнее столетие низведена в физической теории до уровня букваря для школяров, который является и необходимым для дальнейшего обучения начинающих и явно недостаточным для обретения ими других знаний, например, правописания на русском языке. Над механикой Ньютона водрузилось множество математически сложнейших современных теоретических конструкций, интерпретаторы которых, соревнуясь в своей изобретательности, предлагают, если перефразировать и расширить шутку одного из физиков прошлого столетия, по четным числам считать изучаемый объект микромира телом, а по нечетным – волной; с понедельника до субботы в поисках «реальности» пристально всматриваться в отображаемое кривыми зеркалами пространство, поскольку отображения обычных столь примитивны, старомодны и не актуальны для современной физики, что им стоит уделять внимание только на досуге в воскресенье, расслабившись после недельных нагрузок.

На примере Общей теории относительности в данной главе в рамках постпифагорейской математики предлагается «приземлить» данные интерпретации, нисколько не умаляя роль и значение метафизических представлений для симметризации способов физически исполняемых измерительных процессов, и привести интерпретации данных теорий в лоно классической картины Ньютона, внося в них необходимые дополнения и корректировки. Предлагаемая ревизия, вероятно, может быть оспорена. И в этом нет ничего противоестественного. Наоборот, существование дискуссий по этому поводу вполне закономерно. Потому что однозначной картины, как однозначной интерпретации постпифагорейского математического аппарата, объективно вовсе не существует. Данный факт – это издержки используемого языка, выражения которого подлежат интерпретации. По причине существования в нем множества слов, недоопределенных до единственного значения (сравните $\sqrt{2}$), семантика его выражений не может быть не разновариантной. Подобного рода трудности испытывают, например, и служители Фемиды в судебной практике, поскольку в юриспруденции все нормативные акты исполнены на традиционных национальных языках, которые по своей природе являются полисемантическими.

2.1. Ревизия физической картины мира

Возможность получения информации в конечном и только конечном виде обусловлена применением счисления шумеров. Данному факту должна быть отведена существенная роль в отображении физической картины мира, в отображении, формируемом Наблюдателем. В связи с этим существующая физическая картина мира, представленная в рамках математики Пифагора, должна быть подвергнута ревизии.

На начальном этапе ее основными дополнениями будут следующие.

1. Малый антропный принцип: «Пространство только в той мере предрасположено к введению в нем метрики, в какой Наблюдатель имеет способность метризовать его; с другой стороны, Наблюдатель предрасположен к метризации пространства только в той мере, в какой в данном пространстве существуют средства (в том числе и условия) для установления его метрики Наблюдателем». Симметрии конечной информации о внешней среде, получаемой Наблюдателем, должны соответствовать его собственным внутренним симметриям. В поисках ответа на вопрос, в чем искать причину существования такой уникальной симметрии информации, которую способен получать Наблюдатель, вначале необходимо восстановить отсеченное Ньютоном «бритвой Оккама» и дополнить его физическую картину мира.

2. Симметрии информации, получаемой Наблюдателем извне и отображенной им в своей памяти, соответствуют симметриям его собственного генома.

3. Симметрии абсолютного пространства и абсолютного времени в физической картине мира Ньютона определяются симметриями генома Человека во взаимодействии Наблюдателя с внешней средой.

Ноосфера – это гомоморфизм. Будучи обобщением, он содержит полиморфный объект, который при полиморфном отображении соответствует двум феноменам, Наблюдателю и окружающей его среде, притом, что для информации об одном из них существует биективное соответствие в информации о другом. Другими словами, информативное многообразие одного из них может быть биективным отображением информативного многообразия другого, если их симметрии соответствуют геному человека.

2.2. Комментарии к физической картине мира

Следуя изложенной концепции математики, становится вполне очевидным, что в современной физической картине мира, сформированной в рамках математики Пифагора, требуется произвести корректировку.

2.2.1. Пространственноподобность физических величин

Несмотря на то, что математика «площадей» шумеров стала в постпифагорейский период математикой «длин и углов», тем не менее в неявном виде площади все равно играют в ней определяющую роль. Линейные и угловые величины, как было показано, определяются при посредничестве площадей; другой способ нам неизвестен. Измерения физических величин показывают, что их изменение так или иначе зависит от квадратов линейных размеров, т. е. площадей, следовательно, метрики совершенно всех физических величин так или иначе определяются метрикой пространственных. Другое и не может быть обнаружено. Действительно, измерение любой физической величины осуществляется в результате проведения определенного эксперимента в пространстве и времени и всегда связано с измерением прибором геометрического параметра (смещения стрелки, например), который, в свою очередь, определяется через количество треугольников $\Delta 345$ (или 3Π). Все результаты измерений современными устройствами должны соответствовать (с некоторой точностью) результатам, полученным на примитивных с пространственноподобной шкалой, которые физики использовали вначале. Для сравнительного анализа однородных геометрических параметров достаточно сравнивать количества, т. е. числа, этих треугольников; единицы же измерения, треугольники $\Delta 345$ или 3Π , могут быть исключены из рассмотрения (сокращены) без искажения конечного результата для анализа. При сравнительном анализе разнородных величин (а такими являются, например, вес тела и величина перемещения площадки, на которую он оказывает воздействие, или скорость движения) игнорировать единицы измерения невозможно. Мы должны указывать их явно, в том числе и в уравнениях, связывающих закономерность изменения

одной величины в зависимости от другой для приведения их формы к форме величин однородных. Иначе они будут неявно присутствовать в коэффициенте преобразования двух разнородных величин (константе взаимодействия). Весьма важно не только то, что все величины вводились через сопоставление с изменением пространственных размеров, но и то, что все они вводились в рамках математики с мультипликативными операциями. Именно по этой причине, а также в связи с тем, что для отображения результатов физических экспериментов используется фактически математика альтернативной конвенции, возможные значения всех величин являются сопоставимыми в рамках десятичного позиционного счисления, а их метрики различаются только величинами площадей, т. е. масштабами, измерительного инструмента (ЗП), которые выбраны для соответствия единице той или иной физической величины. Даже время является физической величиной, метрика которой в полном смысле является пространственноподобной. В частности, единице времени сопоставлялась пространственная величина, связанная то с масштабами орбиты Земли, то с масштабами ее экватора, то с атомными размерами (цезия). Причем единица времени вводится по образцу и подобию того, как шумеры вводили величину одного углового градуса через его соответствие площади одного из равнобедренных треугольников – элемента тривиальной триангуляции правильного шестидесятиугольника. Поэтому не случайно, что постоянная тонкой структуры, являясь выражением соотношения главных физических констант, безразмерна. Но тогда было бы вполне логично провести ревизию имеющихся физических величин и согласовать константы взаимодействия с относительными масштабами ЗП и величинами собственно Золотых Прямоугольников, соответствующих их единицам. Даная реформа позволит представлять корректно всю информацию средствами математики альтернативной конвенции и затем редуцировать ее к математике целых чисел шумеров.

2.2.2. Восстановление нерелятивизма

Алгебро-геометрическое отображение, предложенное М. Гроссманом, более известное тем, что полученная в его рамках система уравнений интерпретируется как релятивистские уравнения движения в общей теории относительности, было построено уже с учетом имеющегося расширения математики Пифагора и дифференциальным, и интегральным, и тензорным, и вариационным счислениями (и не только ими), в которых сохранялась классическая метрика Пифагора. Главным достижением автора данного АГО стала симметризация (внутри указанных математических структур) *координат* системы отсчета, для метризации каждой из которых мог быть выбран совершенно произвольный измерительный инструмент. Более того, для метризации любой из координат в данном АГО вообще ничем не оговаривалось применение какого-то одного измерительного инструмента *на всем ее протяжении*. Поскольку в

связи с этим при переходе от точки к точке измерения (в рамках данного АГО) мы с полным правом можем менять произвольным образом инструмент и соответствующее ему счисление, причем независимо для каждой из координат, то существенной особенностью такого отображения будет деформация («искривление») декартовой (или, например, плоской цилиндрической) системы координат (см. в Приложении Рис. 1, 2). Несомненно, что обосновать правомерность такого вывода для АГО Гроссмана еще только предстоит. Однако уже сейчас совершенно очевидно, что оно является типичным гомоморфизмом, симметризирующим координаты различных систем отсчета. Причем гомоморфизмом, полученным в результате корректного отображения в него математики с системами отсчета, все координаты которых имеют классическую метрику Пифагора. Да, результатом такого отображения должно быть обобщение, т. е. математика, обобщающая системы отсчета с произвольными метриками их координат. В то же время, если отображение совершенно корректно, а АГО Гроссмана таким и является, оно непременно должно содержать ресурсы, позволяющие нам биективно редуцировать результаты, полученные в рамках данного АГО, к результатам математики с плоской метрикой. Но тогда, и обратно, результаты любых корректных физических экспериментов, выраженные средствами современной математики, всегда будут в полном согласии с уравнениями движения ОТО (АГО Гроссмана), что и наблюдается уже более ста лет при проверке уравнений ОТО. Таким образом, корректное представление гомоморфизма Гроссмана, должно содержать все средства и математики Пифагора, и альтернативной конвенции, и т.д. Следовательно, среди прочих ресурсов, в нем будет содержаться и ЗП, измерительный инструмент, ответственный за корректность использования десятичного позиционного счисления при отражении результатов измерения, и часы, метрика которых определяется также через ЗП, разве что с иным масштабом, соответствующем единице времени. Но тогда, имея возможность определения декартовой системы координат $0, X, Y, Z$ локально, что не вызывает возражения у физика-релятивиста, и пользуясь ортотропным измерительным инструментом (и часами, метрика которых является коррелированной с тем же инструментом) всегда можно установить и *в любой конечной области* относительно начала системы $0, X, Y, Z$ не только однородную метрику по каждой координате, но и коррелировано по каждой из них. Например, по оси Z метрику будет формировать сторона Φ , по осям X, Y – сторона $(\Phi - D)$ Золотого Прямоугольника, правую или левую систему координат помогут определить собственные пальцы рук любого Наблюдателя (или правило винта), а затем несложно будет установить связи с соответствующими им ковариантными (контравариантными) координатными линиями.

Да, мы не можем вставлять лишние звенья в цепочку логических рассуждений. Но мы также не можем пропускать те, что были уже использованы. Иначе мы теряем «корневую» систему. В связи с этим хотим мы того или нет, но в корректно полученном гомоморфизме все ресурсы альтернативной

конвенции обязаны находиться. Но тогда используемое десятичное позиционное счисление (вместе с декартовой системой отсчета) при расчетах позволит нам получать экспериментальные данные в полном соответствии с расчетными при том, что мы будем в полной мере отдавать себе отчет, что работаем в плоском и только плоском пространстве. В то же время произвольное счисление и произвольные измерительные инструменты действительно создадут иллюзию искривленного пространства-времени. Да, если в течение всего эксперимента был использован один и тот же измерительный инструмент, который имеет хоть какое-то соответствие инструменту Пифагора, то результаты эксперимента (действительные числа), выраженные в десятичном позиционном счислении (с заранее заданной точностью), будут соответствовать расчетным, выраженным также в десятичном счислении. Если же в эксперименте использовать произвольный измерительный инструмент или менять произвольно инструменты по ходу эксперимента, то можно получить не только метрику, приведенную в Приложении на Рис.1 и 2, но и действительно совершенно неопределенную, причем ничтожной ценности для использования Наблюдателем.

2.2.3. Конечность информации о микромире

Если о конечности информации о макромире сказано уже достаточно, то для полного устранения сомнений скептиков следует сделать отдельное замечание об ее конечности и при исследовании микромира. Основными параметрами, определяющими состояние частиц микромира, являются квантовые числа. Как правило, все они в современной физике, использующей математику Пифагора, являются целочисленными. Исключение составляют квантовые числа спина фермионов, данные числа являются полуцелыми, и квантовые числа заряда кварков, последние равны или одной трети или двум третям единицы электрического заряда. Со времен Э. Резерфорда для подтверждения квантовых чисел частиц использовались физические эксперименты, в которых методом рассеивания на мишенях (неподвижных, подвижных, встречных пучках и т. п.) исследовались углы отклонения движущихся частиц. В связи с этим, именно рассеивание данной частицы на определенный угол считается одним из эмпирических фактов, достаточным для установления ее квантового числа. Причем все результаты экспериментов выверялись средствами современной математики, а следовательно, с использованием десятичного позиционного счисления. В то же время симметрии группы поворотов конечной размерности, соответствующие данному счислению и счислению шумеров, отличаются. Проведем три радиуса, каждый из которых соединяет центр окружности с одной вершиной вписанного в нее правильного треугольника. Все три

центральных угла, которые они составляют, равны 120° . В альтернативной конвенции, допускающей правомерным использование десятичного счисления, точная величина угла определяется через долю площади, заметаемой данным углом, от площади правильного десятиугольника и она будет равна бесконечной дроби $0,333 \dots$. В конвенции шумеров точная величина угла определяется через долю площади, заметаемой тем же самым углом, от площади правильного шестидесятиугольника и она будет равна числу в точности с одним знаком после запятой $(0), (20)$, т. е. в счислении с цифрами $0, 1, 2, 3, \dots, 10 \dots, 20, \dots, 59$, в котором каждая цифра числа отделяется круглыми скобками от других цифр. Конечное число будет получено и для спина фермионов. Таким образом, в целом информация о микромире также будет постигаться в конечном виде чисел счисления шумеров. Тот же вывод может быть сформулирован и в терминах теории групп, т. к. группа поворотов (на плоскости) размерности 3 является подгруппой группы поворотов размерности 60, но не является подгруппой группы поворотов размерности 10. И в конце концов, можно просто вычислить в десятичном счислении $60:3 = 20$, а результат перевести в шестидесятизначное. Тем не менее, в рамках математики альтернативной конвенции ничего странного в дробности квантовых чисел нет, это же не математика шумеров. И прежде, чем подробно остановимся на физике последней, сделаем еще несколько замечаний о реформировании физической картины мира, правомерном и в рамках математики, в которой легитимным счислением является десятичное.

2.2.4. Механика Ньютона и «бритва Оккама»

Речь идет о принятии И. Ньютоном пространства и времени в качестве некоторых абсолютов. Не сделав этого, он не смог бы в то время и «с места сдвинуться» при возведении своей механики. При физическом моделировании ему потребовалось не простое усечение «бритвой Оккама» недостаточно значимых элементов (или взаимодействий), а более серьезное «хирургическое вмешательство», аналогию которому в реальной хирургии может представлять, наверное, операция по разделению сиамских близнецов. Он вынужден был, отделив Наблюдателя от внешнего мира, заместить абсолютами внешнее проявление свойств собственно Наблюдателя, ввиду недостаточности знаний о нем, о его внутренней структуре, определяющей его указанные свойства. Однако, если постулировать пространство и время в качестве абсолютов, то можно обойтись и без Наблюдателя. Разве не подобный принцип действия имел в виду английский монах-философ Уильям Оккамский, формулируя свою презумпцию за четыре столетия до Ньютона? Разве это неведомо было члену Лондонского королевского общества Исааку Ньютону, стоявшему «на плечах гигантов» и изрекшему знаменитое: «гипотез не измышляю»?

«Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно, и иначе называется длительностью» [1].

Ключевые слова здесь: «без всякого отношения к чему-либо внешнему», и «протекает равномерно». Следовательно, напрашивается вывод: время – категория не внешняя, а внутренняя; его равномерность определяется не внешними факторами, а внутренними. А для кого/чего в физике факторы могут быть как внутренними, так и внешними? Ответ лежит на поверхности: не иначе, как только для Наблюдателя.

«Относительное, кажущееся или обыденное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения, мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как то: час, день, месяц, год.»

Здесь ключевые слова: «постигаемая чувствами, внешняя,», т. е. воспринимаемое Наблюдателем извне.

«Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.»

Это пространство, по Ньютону, тоже не имеет никакой связи с внешним миром и остается одинаковым и неподвижным, как и Наблюдатель относительно себя самого.

«Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное....»

И здесь опять: «определяется нашими чувствами» относительно некоторых (внешних) тел.

Основное взаимодействие Ноосферы – взаимодействие между Наблюдателем и окружающей его средой. В физике принято связывать природу любого взаимодействия между объектами с их внутренними свойствами, их структурой. Точно так и природа основного физического взаимодействия Ноосферы обусловлена как физической структурой и внутренними свойствами среды, окружающей Наблюдателя, так и физической структурой и внутренними свойствами самого Наблюдателя. Все, что из перечисленного относится к среде, со времен Ньютона, благодаря его почину, изучает современная физика, достаточно развитая точная наука. Очевидно, что наука, изучающая физическую структуру и внутренние свойства Наблюдателя, в свою очередь, тоже должна достичь определенного развития, чтобы на основании двух указанных наук можно было выстроить точную науку о физическом взаимодействии в Ноосфере.

Уже отмечалось, что язык шумеров дает возможность Наблюдателю получать информацию о внешних явлениях в вербальной форме в полностью определенном виде, т. е. в форме слов только конечной длины, каждое из которых имеет свою уникальную интерпретацию (до конца определенное значение). Сравнительный анализ результатов подобной оценки внешних явлений способствует выбору Наблюдателем вполне определенного ответного действия из ряда допустимых, которое наилучшим способом по оценке самого Наблюдателя приведет к достижению тех или иных целей, им преследуемым.

Да, Наблюдатель эффективно отличается от других объектов, участвующих в физических взаимодействиях тем, что он может по своему усмотрению оказывать на внешние явления действия различной мощности или силы. В качестве простейшего примера можно привести возможность выбора рычага с различным плечом для подъема грузов, а в более сложных ситуациях Наблюдатель волен свободно выбирать совокупность действий для устранения последствий стихийных бедствий или вообще для их предотвращения. Теоретически мотивация его физических действий может быть произвольной, т. е. характеризоваться случайной переменной. Однако в ситуации, когда дело касается его собственного существования как интеллектуального субъекта, то очевидно, что мотивация в подобном взаимодействии с явлениями внешней среды будет вполне определенной.

Математической структурой, способной наилучшим образом отобразить детерминированность действий Наблюдателя, как естественного интеллектуального субъекта, в окружающей среде является не уравнение и не их система а более сложный алгоритм, решение которого допустимо только на языке шумеров. Поэтому язык математики шумеров является одним из важнейших вспомогательных средств, необходимых нашей цивилизации для повышения устойчивости ее существования. Таким образом, восстановив отсеченное Ньютоном «бритвой Оккама» мы должны дополнить его физическую картину мира теорией интеллектуальных возможностей Наблюдателя, одной из частей которой является теория искусственного интеллекта.

2.2.5. К вопросу симметризации физики микро- и макромира

Классическая физическая картина мира – это физическая интерпретация расширенной математики Пифагора, в которой, наряду с аддитивными операциями шумеров, введены мультипликативные. Структурно классический ньютоновский потенциал таков, что его с успехом можно редуцировать и к альтернативной конвенции, и к конвенции шумеров. К этой же картине мира может быть сведена и классическая электродинамика с ее кулоновским потенциалом, но с другой константой. Вместе с тем, в рамках математики Пифагора можно найти вполне удовлетворительное объяснение существованию разных

физических теорий, описывающих взаимодействие физических объектов на больших и малых расстояниях.

Следует иметь в виду, что биективность отображения (с одной определенной геометрической моделью) достигается только в математике шумеров, в которой единственно легитимными операциями являются аддитивные. В ней даже для перехода к ближайшему следующему (слева) разряду числа требуется сложить соответствующие единицы текущего разряда. Из-за отсутствия мультипликативного перехода в ней для каждого масштаба измерительного инструмента повторяются одни и те же аддитивные процедуры (закономерности). Поэтому в математике шумеров физическая картина мира просто «квантованно» повторяется при 60-кратном переходе от одного масштаба к другому. В силу различия симметрий счислений, в математике Пифагора при многократном изменении масштаба в десять раз накапливается отклонение результатов измерения от результатов измерений таких же пространственных размеров в рамках счисления шумеров и на определенном уровне оно становится достаточно существенным. Поэтому на определенных масштабах и возникает потребность его корректно компенсировать «квантованием физических законов», т. е. вводить «квантование» силы взаимодействия, например, через «квантование» констант: для каждого диапазона масштабов своя константа. С учетом этого должны получаться корректные отображения (однозначные, но не биективные) физической среды на различных уровнях; и на Земле, и в ближайшем и дальнем космосе, и на уровне вещества (электромагнетизм), молекулярном, атомном, ядерном уровнях (и промежуточных). И, действительно, история развития физики показывает, что по мере проникновения исследований вглубь материи экспериментаторы сталкивались на определенных расстояниях с результатами, которые приводили к выводу о скачкообразном изменении силы взаимодействия, начиная с уровня ньютоновской механики. В связи с этим и был найден выход в поиске специальной теории взаимодействия материи на каждом диапазоне масштабов, где результаты экспериментов значительно отличались от теории предыдущего диапазона. Таким образом и появилась, наряду с механикой Ньютона, цепочка метафизических теорий: электродинамика, квантовая механика, квантовая теория поля, квантовая хромодинамика. В рамках каждой из них рассматривалось специальное мета-взаимодействие, обусловленное своей собственной константой, которое в пределах определенного диапазона изменения пространственных масштабов изменяется или непрерывно (классическая электродинамика) или дискретно (квантовые теории). Например, математика квантовой механики – это переход к обобщению (гомоморфизму) в котором константы рассматриваются неизменными, пространственные размеры представляют диапазон от единиц (сантиметра) до $10^{-8} \div 10^{-10}$ (до атомных размеров), а действие квантуется. Наряду с этим, появилась и теория, симметризирующая взаимодействие смежных диапазонов – теория электрослабого взаимодействия.

Несомненно, что наиболее полную («глубокую») симметрию предоставляет математический аппарат теории струн, единообразно формализующий квантование действия на фоне постулируемого непрерывным изменения пространственных масштабов. Данный аппарат можно считать искомым метафизическим обобщением (гомоморфизмом) с квантованным взаимодействием и между смежными диапазонами масштабов пространственных размеров и, в то же время, охватывающим наибольший диапазон изменения пространственных расстояний по той причине, что результаты, получаемые в данной структуре, возможно непротиворечиво редуцировать к результатам математики шумеров. Данное предположение основано на том, что в современной математике, в силу недоопределенности чисел ее счисления, цикличность и монотонная масштабируемость математических структур, использующих язык (или «счисление») Фурье (его преобразования), наиболее близко отображает всю палитру неконструктивных чисел десятичного счисления, которое, как было ранее отмечено, уже конструктивными операциями редуцируемо к счислению шумеров. Однако, речь идет только о диапазонах пространственных масштабов, уже исследованных экспериментаторами. Дальше снова остается неизвестность.

Вместе с тем для масштабов макромира и тем более макрокосмоса цепочка аналогичных теорий отсутствует. Вероятно, ее начало следует связывать с преобразованиями Лоренца и со специальной теорией относительности (СТО). В последней на фоне постоянства константы (скорости света) действие на разных масштабах изменяется непрерывно, но без квантовых скачков. Несомненно, что за пределами некоторого диапазона масштабов на смену преобразованиям Лоренца и СТО придет новый способ описания взаимодействий. Причина отсутствия симметрии в современных физических теориях микро- и макромира, точнее, причина явной асимметрии между ними, заключается не в чем ином, как в различии интерпретаций, по своей сути, асимметричного (точнее, зеркально симметричного) способа упорядочивания (положительных) численных результатов больше и меньше единицы, а если шире, то между способами интерпретации порядка в ряду чисел до запятой и порядка в ряду чисел после запятой (см. приложение 8).

В связи с этим возникает необходимость в осмыслении в целом такого раздела науки, как теоретическая физика, и в ее реформировании. Если согласно математики шумеров симметрия физических теорий должна быть одна и та же на разных уровнях и повторяться на каждом масштабе пространственных размеров, изменяющемся в 60^n раз, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то может быть действительно достаточно, по крайней мере, ньютоновской картины мира, а все остальное аристотелевская метафизика [8]?

Однако это только гипотезы, хотя и весьма правдоподобные, которые требуют дальнейшей проверки.

Глава 3

К философии Ноосферы

В этой главе автор подходит к практически совершенно новой теме науки будущего. Он не тешит себя надеждой, что представляет себе многие ее детали в достаточной степени, чтобы сформулировать в законченном виде все ее основные принципы, законы, ее методы. Его цель куда более скромная: подвигнуть читателя осознать значение и мощь языка шумеров, его потенциал и открывающиеся с ним перед нашей цивилизацией новые возможности в достижении наиболее устойчивого ее существования в этом мире, как особой формы материи среди других материальных форм во Вселенной, осознать необходимость постижения философии принципиально иного уровня.

Причем все указанные перспективы появляются, благодаря языку шумеров, который, в отличие от полисемантических языков, состоит только из слов, каждое из которых имеет строго определенное значение. Вероятно, это и есть тот самый язык из ветхозаветных преданий, которого лишились в свое время строители Вавилонской башни после Всемирного потопа.

3.1. Начала философии Ноосферы

Вслед за предложенной в рамках математики Пифагора корректировкой физической картины мира перейдем к основным принципам философии Ноосферы, соответствующей системе шумеров. В достаточной степени определено можно предположить следующее.

Первое начало.

Наблюдатель и Вселенная взаимно необходимы друг другу для обретения Бытия – основы для взаимодействия и обмена информационными потоками.

Второе начало.

Информационное многообразие, отображенное Наблюдателем, будет биективным отображаемому, если их симметрии соответствуют симметриям генома Человека (необходимое условие биективности).

Третье начало

Действия Наблюдателя, определяя текущее состояние Ноосферы, объективно направлены на достижение равновесного состояния Ноосферы.

Четвертое начало

Ноосфера находится в равновесном (идеальном) состоянии, если действие Наблюдателя полностью обусловлено информационным многообразием, биективным отображаемому внешнему информационному потоку.

3.2. Комментарии к началам философии Ноосферы

3.2.1. О математической модели

Формулировка первого начала, в которой используется (большой) антропный принцип участия Джона Уилера, обосновывает наше право связать с Ноосферой алгебро-геометрическое отображение (математику) шумеров. Поэтому, содержательно, первому началу соответствует математическая модель – единое гомоморфное алгебро-геометрическое отображение (ЕАГО), в котором вырождаются два феномена так, что при обратном, полиморфном, отображении они представляют алгебро-геометрическое отображение модели «Наблюдатель» (АГОН) и алгебро-геометрическое отображение модели «Вселенная» (АГОВ). Как и положено гомоморфизму, пара, составляющая ЕАГО, должна представлять изоморфные друг другу АГО с выбором одного из двух возможных состояний: «АГОН» и «АГОВ».

3.2.2. О динамике взаимодействия

1. Действие Вселенной отображается в информации, приобретаемой и сохраняемой Наблюдателем, способствуя обретению Наблюдателем опыта.

2. Действие Наблюдателя опосредованно обработкой получаемой информации.

3. Опирируя информацией, Наблюдатель передает информацию туда, где она может быть воспринята для генерации физического (противо-) действия.

4. Неравновесное состояние – причина (необратимого процесса) неминуемого разрушения Ноосферы.

5. Приведенные начала описывают только состояние системы и ничего не говорят об ее динамике. В рамках современных физических теорий можно оценивать макро и микропараметры взаимодействия внутри Ноосферы, с помощью данных теорий можно производить оценку параметров динамических процессов глобально (с весьма приблизительной точностью). Однако следует иметь в виду, что современные теории термодинамики, статистической

физика и др. – это «креатура» постпифагорейской математики. В то же время действительно физические, а не метафизические, процессы должны представлять только аддитивные алгоритмы, написанные на языке шумеров, регулирующие генерацию Наблюдателем информационного потока (см. следующий параграф), определяющего собственные действия Наблюдателя и последовательность его действий, в наибольшей степени соответствующая изменениям внешнего информационного потока.

6. Равновесное (информационно-изоморфное состояние) состояние Ноосферы теоретически определяется возможностью установления биективного соответствия между результатами при взаимодействии Наблюдателя и Вселенной и обеспечивает устойчивость существования нашей Цивилизации среди других форм материи во Вселенной.

7. Различаются субъективного характера, «персональная», Ноосфера конкретного Наблюдателя и (коллективная) Ноосфера Человека, как вида.

3.2.3. Источник наблюдаемых симметрий

Если физический эксперимент выявляет из всех допустимых объектов непрерывной среды существование только объектов дискретного спектра, то это можно объяснить еще неудовлетворительным состоянием технологий на текущий период времени. Однако, если он предоставляет данные так, что даже при текущем технологическом развитии все получаемые объекты составляют группу симметрий определенной размерности, то это уже будет эмпирическим фактом, имеющим силу убедительного доказательства. Исследования показывают, что квантовые числа объектов микромира имеют вполне определенную группу симметрий. При 60-значном позиционном счислении все квантовые числа выражаются конечной цепочкой цифр.

Если в уравнениях (ОТО) допускается использование совершенно произвольных метрик, т. е. измерительных инструментов и счислений, но их решение достигается при выборе некоторой определенной, это тоже можно считать результатом неполноты наших знаний, например, о существовании других метрик. Однако, если та же самая метрика позволяет получить не только теоретические результаты, согласующиеся с экспериментальными данными об измеряемых объектах, но ее собственная базовая группа симметрий является основой классификации полученных результатов, то это тоже будет эмпирическим фактом, обязывающим с ним считаться как с объективной реальностью, не требующей иных доказательств своего существования. И в данном случае базовой группой выступает группа симметрий размерности 60.

Здесь вполне правомерно задаться вопросом: что может быть источником данной группы симметрий? Известно, например, что в природе встречаются молекулярные соединения, обладающие симметричными формами. Но не могут же какие-то там, допустим, бензольные кольца или даже аминокислоты

как таковые определять симметрию мироздания. Другое дело, если симметрии тех же аминокислот рассматривать внутри молекулярных структур ДНК. Тогда резонно предположить, что источником всех симметрий, которые могут наблюдаться человеком является его геном, ведь именно он определяет все свойства человека и его функциональные возможности. Для данного выбора существуют весьма веские предпосылки.

В планетарной модели атома (в рамках постпифагорейской математики) легкие валентные электроны расположены на своих орбитах вокруг тяжелого ядра, массы электрона и ядра отличаются примерно в 2000 раз. Для сравнения масса Луны примерно в сто раз меньше массы Земли, т. е. приведенные отношения отличаются на один порядок. Незначительный внешний импульс, переданный одному из электронов, приводит к возмущению атомных связей, под действием которых данный электрон, находящийся в поле ядра, совершает затухающие колебания возле устойчивой орбиты, определяемой внутриатомными связями. Однако, если внешнее возмущение переводит валентные электроны на другие орбиты и «насиленно» поддерживает такое их возмущенное состояние, то ядро, хотя и будучи намного тяжелее всех своих электронов, под действием внутриатомных связей вынуждено будет компенсировать возникшее возмущение внутри атома перестраиванием своих составляющих протонов и нейтронов, ведь даже Мировой океан на Земле приливами и отливами «вынужден» отслеживать суточное вращение Луны. Для свободных атомов реализация такого сценария не наблюдаема. Однако для отдельных атомов внутри больших массивов атомных систем, в которые атомы встраиваются не симметрично (т. е. не с симметричными химическими связями относительно ядра), а, например, подобно тому, как атомы отдельных нуклеотидных звеньев включаются в макромолекулы ДНК, теоретически для невозможности реализации такого сценария причин не имеется. Молекулярная масса ДНК превышает массу отдельных ядер на три-четыре порядка. Поэтому, если отдельному электрону или некоторым электронам атома одного нуклеотида передать определенное возмущение, то ядро данного атома вынуждено будет под действием намного превышающей массы всей цепочки ДНК, компенсировать вынужденно возникшее внутриатомное возмущение изменением внутриядерной организации составляющих его протонов и нейтронов. Причем такое состояние данного атома нуклеотида, будучи в принципе невозможным для свободного атома, может сохраняться во времени пока он находится встроенным в макромолекулу ДНК. В дополнение к этому, следует заметить, что в цепочке молекулы ДНК среди прочих элементов в качестве связующих атомов (связующих центров) при формировании ее повторяющихся звеньев выделяются трехвалентный азот, четырехвалентный углерод и пятивалентный фосфор. Наименьшее общее кратное этих трех чисел равно шестидесяти. Следовательно, число степеней свободы каждого звена в полимерной цепи должно быть равно шестидесяти. Кроме этого, памятуя о том, что, в частности, ДНК

обладает еще и бинарной структурой, в пространстве представляющей из себя «двухзаходный (двойной) винт», обе части которой взаимонеобходимы и взаимодополнительны друг для друга, сразу становится вполне очевидным, что симметрии структуры собственно генома являются источником не только наблюдаемых человеком симметрий во внешней среде, но и того диалектического способа мышления, которым он наделен. Именно, в связи с этим, и предлагается следующая гипотеза. Причиной генерации шестидесятизначного позиционного счисления является способ функционирования (свойство) генома Наблюдателя, определяющего с необходимостью симметрию всей воспринимаемой Наблюдателем информации. На основании данной гипотезы, вследствие требований изоморфизма между АГОН и АГОВ, в последнем отображении, поддерживая соответствие, также следует постулировать это счисление, как таковое. Но в таком случае и возникает ситуация, когда в качестве доминанты алгебраической структуры выбирается не традиционный носитель – множество элементов, а порождающая функция, о которой упоминается в приложении (см. П.1.6). Более детальный анализ показывает, что при введении только одной этой гипотезы вскрывается огромный пласт неизведанного, «непечатаемая целина», которую еще только предстоит «возделывать». Если раньше при постановке, например, вопроса о том, что в действительности наблюдает и осмысливает человек: реальные явления или их отображение в своем сознании, – исследователи сворачивали подобные дискуссии, ссылаясь или на неполноту знаний или на довод, что, мол, если человек не может мыслить по-другому, то какая разница, что там происходит в действительности, то сейчас, определившись с тем, что именно геном человека является источником всех наблюдаемых в природе свойств человека и его функциональных возможностей: воспринимать, мыслить, познавать, воздействовать, существовать и т. д., т. е. взаимодействовать с окружающей реальностью, (отображая и преобразовывая ее), – ответ и на него и на многие подобные вопросы придется давать, тщательно исследовав и сам геном и способы формирования им перечисленных свойств человека. Нетрудно предположить, что точными науками должны стать, в частности, и молекулярная биология, и нейрофизиология, и психология, и социология, ... и многие другие, изучающие или способствующие изучению самого человека. А для этого потребуется изменить мировоззрение современного человека. Предпосылки для этого уже имеются, необходимо только в определенном ракурсе взглянуть и на эмпирические факты, и на аналитические исследования, и на теоретические конструкции. С учетом всех аспектов становится вполне очевидным, что мы обладаем достаточным основанием для приложения математических методов с соответствующей интерпретацией вычисляемых результатов во всех без исключения известных и, возможно, построенных в будущем новых науках, придав им с полным правом эпитет «точный». Фактически у нас имеется вполне эффективный критерий для разграничения без излишних дискуссий истинно научных знаний, мета-научных и не научных или псевдонаучных.

3.2.4. Геномо-симметричная информационная система

Свойства Наблюдателя, определяются его внутренней сущностью (структурой). В таком случае способ мышления человека, способ его взаимодействия с окружающим миром, скорее всего, следует связывать не только со строением его ДНК, РНК, хромосом, т. е. с его генетикой на микроуровне, но и со строением, например, мозга и нервной системы на макроуровне. А, следовательно, будет вполне уместным затронуть и вопрос о модели геномо-симметричной информационной системы (ГЕНСИН системы). Из вышесказанного следует, что в силу свойств симметрии, счисление шумеров с точки зрения эффективности в полной мере соответствуют всей мощи интеллекта человека. Симметрии десятичного, а тем более троичного соответствует этому в гораздо меньшей степени. Попытки создания модели искусственного интеллекта, способного соревноваться с человеческим, пользуясь при этом средствами двоичного счисления, занятие, очевидно, совершенно безнадежное. Да, известно, что в Природе очень часто встречаются случаи реализации двух логически противоположных состояний. Но из этого не следует делать вывод, что панацеей для нашей цивилизации должны быть информационные системы, работающие только на двоичном коде. Несомненно, более эффективными должны быть ГЕНСИН системы, работающие в шестидесятизначном коде. Возможность их реализации на полимерных молекулах ДНК в совокупности с методами, используемыми в разработках современных квантовых вычислительных систем, представляется вполне перспективной. По меньшей мере, в таких полимерах, используемых в качестве материальной среды (hardware) для реализации вычислительных систем, возможно найти решение некоторых проблем, стоящих перед современным квантовым программированием. Во-первых, Природа позаботилась, что все главные атомные центры нуклеотидных звеньев уже устойчиво организованы в определенном порядке как внутри звена, так и в полимерной цепи и не требуется изобретать особо сложной защиты от окружения, которое может их разрушить или нарушить состояние атомов внутри полимера несанкционированным воздействием. Достаточно воспользоваться для защиты тем, что уже создано Природой. Во-вторых, возможность сохранения шестидесяти различных состояний определенного звена среди миллионов других в полимере позволит решить проблему программирования таких ГЕНСИН систем.

К слову, кроме других полезных свойств таких систем может быть свойство симулятора (тренажера) для обучения человека навыкам и приобретения опыта взаимодействия в Ноосфере.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В общем случае с каждым языком связана совокупность средств, при помощи которых человек обменивается информацией с другими людьми. Используя ресурсы языка, он с их помощью отображает свои мысли, чувства, представления и пр. для передачи другим или, наоборот, интерпретирует полученную информацию, вникая глубже в то, что пытался донести до него респондент. Нетрудно заметить, что предметной областью отображения традиционных национальных языков является практически все то, что человека окружает, все то, о *чем* и *как* он мыслит, *что* и *как* он чувствует, представляет и многое другое. Данная область ничем не ограничивается, разве что возможностями языка и способностями человека. Наряду с этим, и значения слов, как структурных единиц в такого рода языке, не определены иначе, как только лишь национальными традициями (толковыми словарями, культурой), и, что особенно важно, не иначе, как только через другие слова того же самого языка. В связи с этим в таком языке семантика не только отдельных слов, но и целых выражений, может быть не однозначной и зависеть от многих, в том числе и ситуативных, факторов (как то контекст применения, интонация при произнесении или индивидуальные особенности – поэтические наклонности – пользователя и многое другое); она может дополняться и изменяться.

В отличие от такого рода полисемантических языков язык математики является языком специальным. Как повелось от шумеров, на нем человек отображает весьма узкую предметную область, достигая при этом уникальных свойств – однозначность, непротиворечивость и унификацию, – он получает взамен моносемантический язык в целом.

Ниже представлены отчеты исследований, проведенных в поиске способа построения именно такого моносемантического языка и способа его расширения подмножествами *не до конца определенных* слов, каковыми являются, например, числа, не выражаемые конечным количеством цифр, из множеств рациональных или иррациональных, алгебраических или трансцендентных.

П.1. Основы алгебро-геометрического отображения моделей

П.1.1. Конечный незамкнутый контур: первая попытка

Рассмотрим на плоскости три одинаковых геометрических отрезка AB, BC, CE , построенных на некоторой прямой так, что вместе они составляют один непрерывный отрезок AE , а их равенство $AB = BC = CE = d$, где d – произвольная длина (будем называть ее эталонной), установлено с помощью циркуля. Возьмем алфавит, состоящий из одного символа. Пусть это будет символ «1». Выберем отрезок AB в качестве начального и, проходя последовательно все отрезки, сопоставим каждой совокупности пройденных отрезков линейную цепочку выбранных символов, длина которой будет увеличиваться на один символ при переходе к следующему. Так отрезку $AB = d$ поставим в соответствие цепочку из одного символа – 1, двум отрезкам между точками A и C , т. е. отрезку $AC = 2d$, цепочку из двух символов – 11, отрезку $AE = 3d$ – 111. Составим из пройденных отрезков множество $V_3 = (AB, AC, AE)$. В итоге для трех различных отрезков множества V_3 мы получим множество N_3 , содержащее также в точности три различных слова. Множество N_3 содержит элементы уже не геометрического, а вербального характера. Нетрудно заметить, что между множествами V_3 и N_3 существует взаимно однозначное соответствие, т. е. биекция. Действительно, для каждого отрезка в V_3 можно указать одно слово в N_3 , а каждому слову в N_3 – один отрезок в V_3 ; двум разным (по длине) словам из N_3 соответствуют два разных отрезка из V_3 и, наоборот, двум разным отрезкам из V_3 – два разных слова из N_3 . Введем на множестве N_3 унарную⁷ операцию, увеличивающую запись (вербального) элемента на один символ справа. Назовем ее инкрементом и обозначим так: $v(i): v(i) \rightarrow (i + 1)$. По данному нами определению операция инкремента на множестве N_3 может быть выполнена два раза: $v(1) \rightarrow 11$ и $v(11) \rightarrow 111$. В результате мы получим для множества объектов нашей геометрической модели множество вербальных элементов и унарную операцию, определенную на элементах вербального множества. Сразу оговоримся, что нашей целью

является построение особых изоморфных алгебр. Подробное объяснение необходимости и преимущества таких алгебр будет приведено в другом месте книги. А пока отметим, что для их построения требуется иметь не только два биективных множества элементов, но и два взаимно однозначных множества операций, например, перечисления элементов, на каждом из них. Любое множество характеризуется своей мощностью. Мощность конечного множества является числом и определяется количеством элементов в нем. Необходимым условием для установления биекции между двумя конечными множествами является равенство их мощностей, т. е. одинаковое количество элементов в них. С учетом сказанного рассмотрим далее, какую унарную операцию можно определить на множестве отрезков V_3 в геометрической модели. С математической точки зрения нас интересует не столько переход от одного отрезка к другому, сколько «пространство», связанное с каждым отрезком, т. е. его протяженность (длина d). В связи с этим в геометрической модели для нас важна процедура обхода отрезков последовательно друг за другом. Поэтому определим на геометрической модели унарную операцию $\mu(i)$, которую назовем длиной, позволяющую осуществить последовательный обход всех отрезков из V_3 , т. е. $\mu(AB) \rightarrow AB = d$, $\mu(AC) \rightarrow AC = 2d$, $\mu(AD) \rightarrow AD = 3d$. Интерпретация первой из операций может быть следующей: результатом операции $\mu(AB)$ сдвига от точки A с помощью циркуля раствором d является точка B или отрезок AB ; второй – результатом операции $\mu(AC)$ сдвига от точки A дважды с помощью циркуля раствором d является точка C или отрезок AC и т.д. Анализируя полученные результаты, нетрудно заметить, что, построив два биективных друг другу множества элементов, мы не можем получить взаимно однозначное соответствие между множествами всех операций, действующих на элементах каждого из них. Так для перечисления всех вербальных элементов необходимо повторить операцию $v(i)$ два раза, для перечисления всех геометрических элементов необходимо повторить $\mu(i)$ три раза: т. е. мощность множества $v(i)$ возможных операций равна двум, а мощность множества $\mu(i)$ возможных операций равна трем. Результат сравнения мощностей показывает, что он не соответствует необходимому условию для возможности биективного отображения двух множеств операций. Если попытаемся добавить еще один элемент в вербальное множество, тогда для перечисления всех его элементов необходимо будет повторить операцию $v(i)$ тоже три раза. Это как раз то, что нам нужно для взаимно однозначного соответствия между операциями на множествах, но при этом нарушится биекция между собственно множествами элементов: в одном будет три элемента, в другом – четыре. На основании этого будем считать, что первая попытка построения языка с необходимыми для нас свойствами была неудачной.

П.1.2. Конечный незамкнутый контур: вторая попытка

Прежде чем продолжить, отметим следующее. Наша задача – построить специальный язык для объектов геометрической модели. С этой целью мы создаем его основу – вербальные средства: множество конструктивных слов и множество, точнее дискретный набор различных множеств, операций над ними. Эти специальные вербальные средства создаются не сами по себе. Ими необходимо описать множество геометрических объектов, физически (или, как принято говорить в математике, конструктивно) созданных с помощью циркуля и линейки, а также совокупность процедур, которые могут выполняться над этими объектами; причем описать вполне адекватно представлениям человека, в том числе и современного, об особенностях внутренней структуры такой геометрической модели. Для этого мы сначала отображаем собственно геометрические объекты и алгоритмы работы с ними современными общеизвестными (в математике) средствами; совокупность последних назовем «метаязыком». Тем самым мы с помощью некоторого «метаязыка», создаем метаотображение, т. е. систему множеств и операций, имеющих место быть в геометрической модели совершенно адекватно тому, как это представляется нам. Затем, будучи уверены в адекватности метаотображения тому, что находим в геометрической модели, мы выстраиваем отображение вербальными средствами так, чтобы оно находилось в определенном соответствии с метаотображением, а именно было ему изоморфным. Другими словами, мы отображаем геометрическую модель вербальными средствами опосредованно через соответствие с метаотображением.

Теперь перейдем ко второй попытке. Несколько изменим способ обозначения и интерпретацию элементов и операций в модели, т. е. в метаотображении. Хотя с точки зрения математической ценности для нас важны, как уже упоминалось, не границы, а пространство между ними – отрезки, площади, углы, промежутки времени и т.п., тем не менее введем вместо множества V_3 другое множество T_4 : $T_4 = (A, B, C, E)$, элементами которого являются концевые точки трех рассматриваемых отрезков из V_3 . Теперь определим на множестве T_4 унарную операцию сдвига точки $\theta(c, i)$, в которой на первой позиции в качестве аргумента стоит константа множества – эталонный размер L , т. е. $c = L$, а вторым – произвольный элемент из T_4 , кроме последнего. Операция $\theta(c, i)$ осуществляет переход от точки i на расстояние L , где должна находиться новая точка $i + 1$ и ее результатом является совокупная длина между первой (начальной) точкой A и точкой $i + 1$: $\theta(L, A) \rightarrow B$, $\theta(L, B) \rightarrow C$, $\theta(L, C) \rightarrow E$, т. е. результатом операции является пройденный путь от начальной точки A до точки, следующей сразу после второго аргумента в операции.

Построим вербальное множество, соответствующее геометрическому T_4 , следующим образом. Обозначив словом 1 точку A , словом 11 точку B , словом 111 точку C и словом 1111 точку E , получим множество

$$N_4 = (1, 11, 111, 1111).$$

Определим на этом множестве также унарную операцию инкремента $\delta(b, i)$, содержащую в качестве первого аргумента константу множества – символ «1», который прибавляется к текущему слову, т. е. $b = 1$, а в качестве второго – текущее слово, т. е. произвольный элемент i из N_4 , кроме последнего; ее результатом будет слово определенной длины: $\delta(1, 1) \rightarrow 11$, $\delta(1, 11) \rightarrow 111$ и $\delta(1, 111) \rightarrow 1111$. Отсюда следует, что операция $\delta(b, i)$, действующая на множестве N_4 , перечисляет все его элементы тоже за три раза.

Таким образом, построив два множества элементов с равными мощностями и два множества операций с равными мощностями, мы заложили фундамент для установления искомого изоморфизма. В то же время, следует отметить одно весьма важное свойство. Операции сдвига точки $\theta(c, i)$ и инкремента $\delta(b, i)$ обладают областями определения, не совпадающими с областями их значений. Так, например, областью T_3 определения $\theta(c, i)$ является подмножество точек $T_3 = (A, B, C) \subset T_4$, а областью T'_3 значений – подмножество $T'_3 = (B, C, E) \subset T_4$, т. е. область T_3 не включает последнюю точку T_4 , а область T'_3 не включает первую точку T_4 . Вывод, который нас будет интересовать в дальнейшем, заключается в том, что *в геометрической модели с конечным множеством объектов областью определения операций сдвига (инкремента) и областью ее значений являются только части множества объектов, причем части разные.*

П.1.3. Бесконечный незамкнутый контур

В общем случае множество, состоящее только из конструктивных элементов, подобно тому, как T_4 и N_4 состоят из точек, отложенных циркулем, и (рукописных) символов соответственно, всегда может быть дополнено еще одним элементом, не совпадающим ни с одним из уже имеющихся в нем. Поэтому, следуя тем же правилам построения, конструктивным способом потенциально возможно получить множества неограниченные или бесконечные. В связи с этим, если нам потребуются описывать, например, неограниченную цепочку одинаковых отрезков, то индексы в обозначениях данных множеств можно или совсем опустить (например, T и N) или заменить их на знак бесконечности – T_∞ и N_∞ .

Назовем (неограниченное) множество N , состоящее из записей, упорядоченных по количеству символов в слове, натуральным множеством:

$$N = (1, 11, 111, \dots).$$

В дальнейшем, поскольку необходимо иметь достаточно большое множество различных символов, позволяющее без коллизий обозначать разные элементы множества N , для экономии средств будем прибегать к переобозначениям. С помощью символов $1, 2, 3, \dots \in D$, где D – множество целых чисел десятичного счисления, будем обозначать соответственно первый, второй, третий и т. д. члены множества N в сокращенном виде или прямо ссылаться на некоторую переменную $i = 1, 2, 3, \dots, t$, оговаривая ее принадлежность к множеству N : $i \in N$. То есть в силу существования взаимно-однозначного соответствия между полной и сокращенной записью элементов N , в чем современного читателя не следует лишний раз убеждать, позволим себе не слишком педантично различать их в дальнейшем.

Адаптируем вышеопределенную на конечном множестве унарную операцию инкремента $\delta(b, i)$ для элементов N . По определению, операция инкремента с константой $b = 1$ переводит произвольно взятый элемент

$$i \equiv \left(\underbrace{11 \dots 11}_i \right),$$

состоящий из набора одинаковых символов, количество которых указано под горизонтальной скобкой, множества N в следующий за ним элемент $i + 1$, т. е.

$$i + 1 \equiv \left(\underbrace{11 \dots 111}_{i+1} \right),$$

того же множества, что в сокращенном виде будем записывать так: $\delta(b, i) \rightarrow (i + 1)$, где константа $b = 1$ указывает используемый символ. Из того же определения следует свойство: $\delta(1, i + 1) \rightarrow (i + 2)$, $\delta(1, i + 2) \rightarrow (i + 3)$ и т. д. С учетом неограниченности множества N делаем вывод, что операция $\delta(b, i)$ является замкнутой⁸ на данном множестве.

Итак, мы построили неограниченное множество вербальных элементов и определили замкнутую унарную операцию на нем. Теперь обратимся к неограниченному множеству конструктивных точек (с равными отрезками между ними) $T_\infty = (A_1, A_2, A_3, \dots)$, переобозначив точки в той же самой геометрической модели и продолжив ее. На конечном подмножестве такого множества выше была определена унарная операция сдвига точки. С учетом расширения множества элементов и изменения обозначений она будет записываться следующим образом: $\theta(L, A_i)$. По определению, операция сдвига переводит произвольно взятую точку A_i (т. е. конечную точку уже пройденного пути от начала A_1) множества T_∞ на расстояние, равное эталону длины L , в точку A_{i+1}

того же множества, что в сокращенном виде будем записывать так: $\theta(L, A_i) \rightarrow A_{i+1}$, добавляя к пройденному пути $A_1 A_i$ новый отрезок (равный всем остальным в модели); ее результатом является (увеличенный на длину L) путь $A_1 A_{i+1}$. Из определения следует ее свойство: $\theta(L, A_{i+1}) \rightarrow A_{i+2}$, $\theta(L, A_{i+2}) \rightarrow A_{i+3}$ и т. д. С учетом неограниченности множества T_∞ делаем вывод, что операция $\theta(L, A_i)$ также является замкнутой.

Анализ обобщенных унарных замкнутых операций сдвига и инкремента показывает, что для каждой из них также будет верным вывод о несовпадении области определения и области значений операции. В то же время, в геометрической модели с бесконечным множеством объектов (в силу свойств бесконечных множеств, как таковых) областью определения операций сдвига (инкремента) является все множество объектов, что принципиально отличается от конечных моделей, т. е. *область определения каждой из них в точности совпадает с множеством элементов, соответствующих бесконечной модели, но при этом область значений остается все еще на единицу меньшей: первые элементы множеств T_∞ и N не входят в области значений соответствующих операций.*

Пусть имеется замкнутая операции $z = \varphi(x)$, где $(x, z) \in (y_1, y_2, y_3, \dots)$. Частным случаем суперпозиции операций является конечная рекурсия некоторой замкнутой операции $z = \varphi(x)$, результатом которой будет объект, полученный через конечное количество обращений операции φ к себе самой с новым аргументом, начиная с начального значения аргумента x_1 . Обозначим подобную рекурсию следующим образом: $rec(\varphi, x_1, n)$, где первым аргументом указывается собственно функция, вторым – начальный элемент, а последним – число n , равное количеству выполнений операции φ :

$$rec(\varphi, x_1, n) \equiv \underbrace{\varphi(\dots \varphi(x_1))}_n$$

Введем понятие метрики. Метрикой Γ_H в геометрической модели назовем свойство любого объекта $A_1 A_{j+1}$ быть выраженным суперпозицией конечного количества одинаковых последовательных сдвигов, содержательно выраженной в форме конечной рекурсии $rec(\theta, A_1, j)$ одной и той же операции сдвига $\theta(L, A_j) \rightarrow A_{j+1}$, начиная с аргумента $A_j = A_1$, после выполнения j раз (где j соответствует порядковому номеру индекса конечной точки A_j объекта $A_1 A_j$) операции сдвига θ :

$$\Gamma_H = rec(\theta, A_1, j) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta(L, A_1)))) \rightarrow A_{j+1}.$$

Здесь отрезку $A_1 A_{j+1}$ (пройденному пути с конечной точкой A_{j+1}) соответствует результат, полученный через конечное число рекурсивных обращений

операции сдвига θ к себе самой с новым вторым аргументом, т. к. первым является константа. Биактивным отображением будет метрика Γ_E , в которой с помощью вербальных ресурсов реализуется представление любого элемента

$$i + 1 = \left(\underbrace{11 \dots 1}_{i+1} \right)$$

множества $N = (1, 11, 111, \dots)$ суперпозицией конечного количества одинаковых последовательных операций инкремента, содержательно выраженной в форме конечной рекурсии $rec(\delta, 1, i)$ одной и той же операции инкремента $\delta(1, i) \rightarrow i + 1$, начиная с аргумента $i = 1$, после выполнения i раз операции инкремента δ :

$$\Gamma_E = rec(\delta, 1, i) = \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta(1, 1)))) \rightarrow i + 1.$$

Сделаем еще одно замечание. По построению множества T_∞ все его элементы уже находятся в некотором порядке на плоскости. Для введения в явном виде алгебраического отношения порядка, соответствующего порядку объектов в модели, все, что требуется от нас, так это после упорядоченной индексации элементов определить направление их обхода. Выберем направление обхода от вершины с меньшим индексом к вершине с большим. Тогда для любых двух точек $A_r, A_s \in T_\infty$ отношение $A_r \zeta A_s$ отображает тот факт, что $A_r > A_s$, и соответствует тому, что в упорядоченной последовательности точек $A_r, A_s \in T_\infty$ точка A_r следует после A_s или пройденный путь от начальной точки A_1 до точки A_r превышает пройденный путь от начальной точки A_1 до точки A_s . Аналогично введем отношение строго больше на множестве N . Его определение сформулируем следующим образом: для любых двух записей $j, i \in N$, отношение $j \rho i$ отображает тот факт, что $j > i$, и соответствует тому, что в упорядоченной последовательности элементов $j, i \in N$ элемент j следует после элемента i .

Кроме этого, в связи с введенными определениями метрик, в качестве альтернативного варианта отношение порядка может быть установлено непосредственно между результатами рекурсий. Например, для любых двух результатов рекурсий $rec(\theta, A_1, r)$ и $rec(\theta, A_1, s)$ отношение $rec(\theta, A_1, r) \zeta rec(\theta, A_1, s)$ отображает тот факт, что количество рекурсивных обращений $r > s$, и соответствует тому, что в упорядоченной последовательности результатов рекурсий

$$(rec(\theta, A_1, 1), rec(\theta, A_1, 2), \dots, rec(\theta, A_1, s), \dots, rec(\theta, A_1, r), \dots)$$

верно выражение $rec(\theta, A_1, r) > rec(\theta, A_1, s)$, а также тому, что пройденный путь $A_1 A_{r+1}$, полученный из рекурсии $rec(\theta, A_1, r) \rightarrow A_{r+1}$, превышает путь $A_1 A_{s+1}$, полученный из рекурсии $rec(\theta, A_1, s) \rightarrow A_{s+1}$, где $A_1, A_r, A_s, A_{r+1}, A_{s+1} \in T_\infty$. Аналогичное отношение строго больше может быть установлено и на множестве N : для любых двух результатов рекурсий $rec(\delta, 1, j)$ и $rec(\delta, 1, i)$ отношение $rec(\delta, 1, j) prec(\delta, 1, i)$ отображает тот факт, что количество рекурсивных обращений $j > i$, и соответствует тому, что в упорядоченной последовательности результатов рекурсий

$$(rec(\delta, 1, 1), rec(\delta, 1, 2), \dots, rec(\delta, 1, i), \dots, rec(\delta, 1, j), \dots)$$

верно выражение $rec(\delta, 1, j) > rec(\delta, 1, i)$, а также тому, что элемент $j + 1$, полученный из рекурсии $rec(\delta, 1, j) \rightarrow j + 1$, следует после элемента $i + 1$, полученного из рекурсии

$$rec(\delta, 1, i) \rightarrow i + 1, \text{ где } 1, j, i, (j + 1), (i + 1) \in N.$$

П.1.4. Простейшие алгебраические структуры отображения

Мы построили натуральное множество (неограниченное множество слов) $N = (1, 11, 111, \dots)$, которое находится в биективном соответствии с неограниченным множеством конструктивных точек (с равными отрезками между точками) $T_\infty = (A_1, A_2, A_3, \dots)$; ввели на множестве N унарную замкнутую операцию инкремента $\delta(1, i) \rightarrow (i + 1)$ для любого $i \in N$ и на множестве T_∞ унарную замкнутую операцию совокупного сдвига точки $\theta(L, A_j) \rightarrow A_{j+1}$ для любого $A_j \in T_\infty$. В современной терминологии это означает, что приведены две алгебраические структуры E и H :

- структура $E = \langle N, 1, \delta, \rho, \Gamma_E \rangle$, носителем которой является бесконечное множество $N = (1, 11, 111, \dots)$, с константой 1 и с отношением порядка строго больше $\rho(i, j) \equiv i > j$ для всех i , следующих после j и $j, i \in N$; с унарной замкнутой операцией инкремента $\delta: \delta(1, i) \rightarrow (i + 1)$ для любого $i \in N$; с метрикой $\Gamma_E(i + 1) = rec(\delta, 1, i) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta(1, 1)))) \rightarrow i + 1$ для любого $i, (i + 1) \in N$;
- структура $H = \langle T_\infty, L, \theta, \varsigma, \Gamma_H \rangle$, носителем которой является бесконечное множество $T_\infty = (A_1, A_2, A_3, \dots)$, с константой L и с отношением порядка строго больше $\varsigma(a_u, a_v) \equiv a_u > a_v$ для всех a_u , следующих

после a_v и $a_u, a_v \in T$;
 с унарной замкнутой операцией сдвига
 $\theta: \theta(L, A_j) \rightarrow A_{j+1}$ для любого $A_j \in T_\infty$; с метрикой
 $\Gamma_H(A_{j+1}) = \text{rec}(\theta, A_1, j) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta(L, A_1)))) \rightarrow A_{j+1}$
 для любого $A_j, A_{j+1} \in T_\infty$.

В силу существования биективного соответствия между элементами множеств (носителей), а также биективного соответствия между результатами операций над произвольной парой биективных аргументов данные структуры являются изоморфными.

В дальнейшем наряду с полной формулировкой изоморфных структур для краткости будем ссылаться на них, например, как на изоморфное отображение двух множеств (не упоминая без необходимости лишней раз ни структуры, ни алгебры, ни носители, ни операции). И в этом стиле сформулируем первую гипотезу. Приведенное изоморфное отображение может быть основой для возможного в последующем расширения этих алгебраических структур за счет введения, например, новых операций без нарушения уже имеющегося изоморфизма между ними.

П.1.5. Симметричное отображение моделей с разной топологией

Предметной областью отображения в данной части исследования являются одномерные геометрические пространства, в том числе и различной топологии, а именно счетная упорядоченная совокупность точек с одинаковым расстоянием между любой парой соседних, расположенная в одном случае на прямой, а в другом на окружности, и с выделенным направлением их обхода. Если коротко, то одной геометрической моделью будет полупрямая, состоящая из счетного числа одинаковых отрезков, второй – правильный многоугольник с тем же количеством сторон.

Выделим два типа пространств. К первому типу отнесем односвязное пространство, в котором существует единственный способ обхода всех его граничных точек, при котором непрерывная деформация полученного пути (граничного контура) приводит к непрерывной деформации сразу всего пространства. В множестве таких граничных точек пространства данного типа можно выделить только две особые граничные точки, начальную и конечную. Ко второму типу отнесем односвязные пространства, в которых подобная деформация всего пространства осуществима деформацией более, чем одного граничного контура или одним контуром, способ построения которого неоднозначен. Отсюда следует, что в таких пространствах существует более одной начальной и/или конечной точек граничного контура, охватывающего все пространство. Одномерное пространство, которое представляет упорядоченная

совокупность точек – вершин правильного многоугольника – с выделенным направлением обхода, является односвязным пространством второго типа в том смысле, что из произвольной точки данной совокупности, двигаясь последовательно по сторонам многоугольника (хордам окружности) только в направлении, определенном порядком точек, можно пройти любую точку данной совокупности. Поэтому можно указать более одной пары точек, называемых начальной и конечной, пройденный путь между которыми представляет контур, непрерывная деформация которого приведет к деформации сразу всего одномерного пространства. Одномерное пространство, представленное упорядоченной совокупностью точек на прямой с выделенным направлением, т. е. как частный пример незамкнутого контура, является односвязным пространством первого типа. Действительно, из произвольно выбранной в качестве начальной точки невозможно, не выходя за пределы данного одномерного пространства, пройти множество точек, находящихся от нее в направлении, противоположном установленному направлению порядка точек (аналог топологии оси времени). Весьма важно, что, в данном пространстве существует только одна начальная точка, начиная обход из которой можно пройти любую точку всей последовательности, двигаясь в обусловленном направлении. Таким образом, существует один способ построения контура, непрерывная деформация которого приведет к деформации сразу всего пространства.

В связи с этим наряду с приведенной системой геометрических объектов рассмотрим и несколько иную конструкцию. Выше была рассмотрена незамкнутая цепочка из трех одинаковых отрезков. Рассмотрим теперь составленный из них треугольник ABC , в силу равенства сторон он является правильным. Здесь мы имеем три граничных точки и три отрезка, в то время как границ в предыдущей модели было на единицу больше. В этом и состоит принципиальное отличие между замкнутыми и незамкнутыми упорядоченными цепочками объектов, которое сыграет весьма существенную роль в построении языка, общего для обеих геометрических моделей. Для данной модели предыдущий способ также позволяет построить элементы вербального множества и операции над ними, т. е. получить некоторую алгебраическую структуру на вербальном множестве. Однако эта структура будет отличаться от структуры для модели с отрезками незамкнутого контура в силу существования вышеобозначенных различий в геометрических моделях. Это значит, что ранее используемый способ построения одного изоморфного вербального отображения сразу для обеих моделей неприемлем: мы в любом случае будем получать количественное несоответствие или между множествами элементов, или между множествами операций. Причина этого еще и в том, что замкнутая цепочка элементов геометрической модели будет сопоставляться незамкнутой цепочке элементов собственно вербального множества – строке символов (слову). А выше было отмечено, что симметрии на замкнутых и незамкнутых контурах различны (что выражается в неравенстве мощностей соответствующих множеств). По этой причине математиками эпохи древних шумер был

разработан иной способ создания соответствия между вербальным и геометрическим множествами и при этом, как следствие, их способ является унифицированным и для замкнутых и для незамкнутых цепочек геометрических объектов. Для устранения разницы между количествами элементов в рассматриваемых множествах им потребовалось ввести понятия пустого элемента и пустой операции.

Рассмотрим подробнее метод шумеров. Вернемся к геометрической модели с правильным треугольником и обозначим его вершины следующим образом $A_1A_2A_3$. Все вместе они составляют множество $T_3 = (A_1, A_2, A_3)$; в указанном порядке будем совершать сдвиг в этом множестве. Проведем радиусы из центра описанной окружности к вершинам треугольника. При повороте радиуса вокруг центра окружности его конечная точка будет совершать обход вершин правильного треугольника, последовательно сдвигаясь кратно длине L . Определим на множестве T_3 унарную операцию поворота радиуса $\theta'(L, A_j) \rightarrow A_{j+1}$ для любого $A_j \in T_3$, $A_3 > A_j$ так, что совокупность всех различных операций поворота, соответствующих всем возможным различным положениям радиуса, составляет множество Θ'_2 таких операций на множестве T_3 :

$$\Theta'_2 = (\theta'_1, \theta'_2), \text{ где } \theta'_1 \equiv \theta'(L, A_1) \rightarrow A_2, \quad \theta'_2 \equiv \theta'(L, A_2) \rightarrow A_3.$$

В результате с помощью множества Θ'_2 операций поворота (радиуса) можно обойти, начиная с первой точки A_1 , и точку A_2 и точку A_3 , т. е. все имеющиеся в модели вершины A_1, A_2, A_3 . Для отображения объектов модели используем вербальное множество $N_3 = (1, 11, 111, \dots)$, в котором его слова последовательно сопоставляются с вершинами треугольника A_1, A_2, A_3 . На множестве N_3 введем типичную операцию инкремента: $\delta'(1, i)$ для любого $i \in N_3$ и $(3 > i)$. Совокупность всех различных операций инкремента составляет множество Ω'_2 операций на множестве N_3 :

$$\Omega'_2 = (\delta'_1, \delta'_2), \quad \text{где } \delta'_1 \equiv \delta'(1, 1) \rightarrow 11, \quad \delta'_2 \equiv \delta'(1, 11) \rightarrow 111.$$

Тем самым мы построили равномошные множества элементов и равномошные множества операций.

Однако множество операций $\Theta'_2 = (\theta'_1, \theta'_2)$ не описывает корректно полный обход треугольника, т. к. поворот на полный угол совершается только после возврата к начальной точке. Следовательно, множество Θ'_2 должно содержать не две, а три операции, т. е. должно быть следующим: $\Theta'_3 = (\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$, где наряду с уже введенными добавляется операция θ'_3 . Последняя операция должна замыкать цепочку всех поворотов, соответствуя повороту радиуса из конечной точки A_3 в точку A_1 и при этом результатом

операции $\theta'_3 \equiv \theta'(L, A_3) \rightarrow A_1$ должен быть пройденный путь $A_1 A_1$. В итоге получаем несколько странную операцию. Странность операции – в двузначности ее интерпретации на моделях с различными топологиями. Если на замкнутом контуре ее можно интерпретировать как полный обход контура, имеющий определенную длину, то на незамкнутом она должна интерпретироваться как сдвиг из начальной точки в саму себя, т. е. она должна представлять пустую операцию. Кроме «странности» новой операции следует иметь в виду, что необходимым условием для установления биекции между конечными множествами, как было выше уже отмечено, является равенство их мощностей. В построенных множествах элементов $T_3 = (A_1, A_2, A_3)$ и $N_3 = (1, 11, 111)$ равенство мощностей соблюдается, а с добавлением новой операции θ'_3 , необходимой для полного обхода замкнутого контура, множества операций $\Theta'_3 = (\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3)$ и $\Omega'_2 = (\delta'_1, \delta'_2)$ будут обладать разными мощностями. Ведь для обхода строки символов в вербальном отображении, как и для геометрических объектов незамкнутого контура, множество из двух операций, подобно $\Omega'_2 = (\delta'_1, \delta'_2)$, является вполне достаточным и не нуждается в дополнении. С целью выравнивания мощностей и устранения «странностей» шумеры сделали следующее.

Во-первых, ввели во множества T_3 и N_3 дополнительно по одному пустому элементу A_0 и $\emptyset$ соответственно и получили четырехэлементные множества $T_4 = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ и $N_4 = (\emptyset, 1, 11, 111)$. Во-вторых, ввели на множестве $N_4 = (\emptyset, 1, 11, 111)$ новое множество Ω_4^0 четырех пустых операций (операций выбора или возможных инициализаций) $\delta_i^0 \equiv \delta^0(\emptyset, i) \rightarrow i$, где $i \in N_4$, с новой константой $\emptyset$ для описания функциональных свойств последней. Согласно приведенной формуле, результатом операции добавления пустого элемента к элементу $i \in N_4$ является собственно элемент i . В-третьих, дополнили множество операций инкремента Ω'_2 результативной операцией $\delta'_0 \equiv \delta'(1, \emptyset) \rightarrow 1$ (здесь на первой позиции стоит константа – добавляемый символ, а на второй текущий элемент), итогом которой является появление символа 1 на месте пробела. С учетом введенной операции, изменив при этом обозначения, получим новое множество

$$\Omega_3 = (\delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

где $\delta_1 \equiv \delta(1, \emptyset) \rightarrow 1$, $\delta_2 \equiv \delta(1, 1) \rightarrow 11$, $\delta_3 \equiv \delta(1, 11) \rightarrow 111$.

Претерпела изменения и алгебраическая структура на множестве T_4 . Рассмотрим геометрическую модель с тремя отрезками, составляющими *незамкнутый* контур. Обозначим в ней их граничные точки по порядку так, что они составят упорядоченное множество: $T_4 = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. Если сопоставим точке $A_0 \in T_4$ пустой элемент $\emptyset \in N_4$, а точкам $A_1, A_2, A_3 \in T_4$ слова $1, 11, 111 \in N_4$ соответственно, получим два биективных множества T_4 и N_4 . Введем множество Θ_3 операций сдвига⁹ точек следующим образом:

$$\Theta_3 = (\theta_1, \theta_2, \theta_3),$$

где $\theta_1 \equiv \theta(L, A_0) \rightarrow A_1$, $\theta_2 \equiv \theta(L, A_1) \rightarrow A_2$, $\theta_3 \equiv \theta(L, A_2) \rightarrow A_3$, в которых начальной точкой пройденного пути является точка A_0 , а константой является эталонная длина L . Введем множество Θ_4^0 пустых операций сдвига (операций выбора или возможных инициализаций) точек следующим образом:

$$\Theta_4^0 = (\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0),$$

где $\theta_j^0 \equiv \theta^0(A_0, A_j) \rightarrow A_j$, в которых константой является начальная точка A_0 .

Теперь проверим введенные данным способом множества на модели с *замкнутым* контуром. Вначале определим роль и положение точки A_0 в такой модели. При обходе замкнутого контура она должна предшествовать точке A_1 , поэтому она должна совпадать с конечной точкой обхода, точкой A_3 . Действительно, в геометрической модели треугольника с вершинами A_1, A_2, A_3 отсутствует четвертая точка. Следовательно, элемент A_0 может быть введен (для чего и существует операция выбора) лишь для обозначения точки начала полного обхода замкнутого контура (в этом и заключается его роль) и потому должен интерпретироваться пустым элементом, т. е. не имеющим никакого собственного значения; значение же конечной точки A_3 в множестве T_4 является вполне определенным, она расположена на «расстоянии» трех сдвигов циркуля (или конца радиуса), по L каждый, от начальной точки. Поэтому, в четвертых, множество операций сдвига Θ_3 точек с необходимостью должно быть дополнено четвертой операцией – операцией инициализации точки, с которой начинается первая операция из данного множества. Такой операцией должна быть одна из операций выбора $\theta_j^0 \equiv \theta^0(A_0, A_j) \rightarrow A_j$ точки A_0 так, чтобы выполнялось строгое отношение порядка $A_1 > A_0$ и чтобы ее выбор не вызывал противоречий с первой операцией сдвига $\theta_1 \equiv \theta(L, A_0) \rightarrow A_1$, которая, в свою очередь, означает, что точка A_1 является результатом *одной* операции сдвига от точки A_0 . В итоге получим полное множество операций сдвига $\Theta_4 = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, в котором первой операцией (т. е. предшествующей любому сдвигу из множества возможных), обозначенной θ_0 , должна быть операция инициализации или операция выбора

$$\theta^0(A_0, A_j) \rightarrow A_j: \theta_0 = \theta^0(A_0, A_j)$$

начальной точки A_0 так, чтобы $A_1 > A_0$ и $A_1, A_0, A_j \in T_4$, не вызывая противоречий с исполнением последующих операций множества: $\theta_1 \equiv \theta(L, A_0) \rightarrow A_1$, $\theta_2 \equiv \theta(L, A_1) \rightarrow A_2$, $\theta_3 \equiv \theta(L, A_2) \rightarrow A_3$.

В то же время в вербальном отображении данному множеству операций теперь необходимо поставить в соответствие множество $\Omega_4 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$, в котором первой операцией δ_0 – операцией инициализации – является операция выбора

$$\delta^0(\emptyset, i) \rightarrow i: \delta_0 \equiv \delta^0(\emptyset, i)$$

начального элемента $\emptyset$ такого, что $1 > \emptyset$, а последующими будут операции $\delta_1 \equiv \delta(1, \emptyset) \rightarrow 1$, $\delta_2 \equiv \delta(1, 1) \rightarrow 11$, $\delta_3 \equiv \delta(1, 11) \rightarrow 111$. В результате всех четырех новаций шумерам удалось исключить «странности» и получить структуры, в которых все элементы множеств

$$\begin{aligned} T_4 &= (A_0, A_1, A_2, A_3), & N_4 &= (\emptyset, 1, 11, 111), & \Theta_4^0 &= (\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0), \\ \Theta_4 &= (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3), & \Omega_4^0 &= (\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \delta_3^0) \text{ и } \Omega_4 &= (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3) \end{aligned}$$

действительно получают вполне удовлетворительную и одинаковую интерпретацию в геометрической модели как с замкнутым, так и незамкнутым контуром. Из множеств операций $\Theta_4 = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ и $\Omega_4 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ получаем через рекурсию с инициализацией соответственно метрику

$$\Gamma_{H,3}(A_l) = \text{rec}(\theta, A_0, l) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(A_0, A_j)))) \rightarrow A_l$$

при условии $A_1 > A_0$ и $\forall A_l: (A_1, A_l > A_0) \in T_4$, которая в то же время является и функцией перечисления всех возможных результатов операций из множества Θ_4 при условии, что операция инициализации (выбора, переобозначения, присвоения индекса и, возможно, любые другие подходящие интерпретации) корректно исполнена, и метрику

$$\Gamma_{E,3}(n) = \text{rec}(\delta, \emptyset, n) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, i)))) \rightarrow n$$

при условии $1 > \emptyset$ и $\forall n: (1, n > \emptyset) \in N_4$, которая в то же время является и функцией перечисления всех возможных результатов операций из множества Ω_4 при условии корректного исполнения операции δ_0 .

Таким образом, одна и та же пара алгебраических структур действительно будет адекватно описывать и модель с замкнутым, и модель с незамкнутым контуром, представляя собой надежное средство счета, т. е. надежное метрическое средство на множестве целых положительных чисел.

Из данного представления следует весьма важный вывод об областях определения и значения унарных замкнутых операций. Если рассмотреть множество операций $\Theta_4 = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ как одну сложную (комбинированную) перечисляющую (или порождающую) элементы функцию, например, в виде

$$\text{rec}(\theta, A_0, l) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(A_0, A_l)))) \rightarrow A_l,$$

то нетрудно заметить, что область ее *определения* в точности совпадает с областью ее *значений*. То же самое имеет место и в рекурсии вербального отображения. А поскольку *область определения унарной замкнутой операции сдвига (инкремента) в точности совпадает с носителем, то данное представление с введением пустых элементов и пустых операций (выбора) позволяет симметризовать алгебраические структуры на конечных и бесконечных множествах*. В структурах отображения любой из моделей количество операций (сдвига, инкремента) до i -го элемента в точности равно его порядковому номеру. В дальнейшем это выразится в том, что для получения произвольного элемента необходимо совершить в точности столько же операций сложения, сколько он содержит слагаемых значащих единиц (не пустых элементов). В этом и заключается одно из принципиальных отличий данных изоморфных структур от структур, являющихся изоморфными в традиционных определениях.

Каждая из рассмотренных алгебраических структур состоит из трех феноменов: порождающих (результативных) операций, элементов и пустой операции, результатом которой является пустой элемент. Данные структуры являются отображением того, что мы усматриваем в объективно существующей (в результате исполнения графических построений) геометрической системе, и они положены в основу всей развиваемой впоследствии математики.

Одно из преимуществ данных алгебраических структур еще и в том, что на их основе может быть создан язык, каждое слово которого состоит из конечной совокупности символов конечного алфавита (а не только единиц), причем все символы слова объединены в незамкнутый контур так, что алгебраическая структура каждого слова будет эквивалентна этим структурам с точностью до изоморфизма, что и будет содержательно весьма существенным дополнением к конструктивной реализации такого соответствия между языком и моделями, когда язык является их непротиворечивым и полным отображением. Данное преимущество, видимо, было решающим для шумеров, что и определило в целом метод построения ими языка. Взяв за основу подобную пару алгебраических структур при разработке языка математики, они уже вынуждены были далее только следовать их внутренним свойствам, чтобы не возникало никаких противоречий. Не сложно сделать вывод, что перед математиками древних шумер не стояли дилеммы включать ли в общую конструкцию натуральный ряд с нулем или без нуля, формулировать аналог современной аксиомы выбора или игнорировать его. Если задана цель построения изоморфного алгебро-геометрического отображения, получившего с того давнего времени название математики, то они с необходимостью должны быть включены.

П.1.6. Альтернативный формат алгебраических структур

Равномощность множества операций и множества элементов (носителей) в каждой структуре наводит на мысль о существовании различных способов формулирования особых изоморфных алгебраических структур в зависимости от того, какое из данных множеств будет их реальным носителем: или тот носитель, который мы использовали до сих пор, или множество операций (сдвига, инкремента), генерирующих, начиная с (корректной) инициализации, всю необходимую (и/или возможную) последовательность элементов в строгом отношении порядка.

Рассмотрим, какие изменения влечет иной вариант формулирования алгебраических структур. В ранее приведенных формулировках фундаментом структуры выступает носитель – множество, оно является основой структуры, к нему прилагается перечень операций, отношений и пр., исполняемых на его элементах. Альтернативой¹⁰ такому представлению об алгебраической структуре является следующая конструкция. Доминантой структуры является порождающая операция (некий генератор). Она порождает (генерирует) элементы, (второстепенное или рецессивное) множество которых выступает носителем данной структуры. А затем к данному носителю прилагается перечень (других) операций, отношений и пр., исполняемых на его элементах. Если такой порождающей (элементы) операцией является операция инкремента (сдвига), то она при любых условиях способна сгенерировать соответствующее (или в точности необходимое) множество элементов и, что является весьма примечательным, еще и в требуемом строгом отношении порядка их следования. Фактически прообразом такой конструктивной порождающей операции является (способность) свойство (чего-то или кого-то) создавать объекты в окружающей среде. Данный подход аналогичен в некоторой мере предложенному Пеано уже в новое время с одноименным ему списком аксиом, центральным объектом в котором выступает операция следования.

Представляется, что данная «тонкость» математиками древних шумер также анализировалась с помощью тех средств, которые были доступны им в то время. Однако из-за отсутствия каких-либо артефактов мы можем только строить предположения об этом, для чего имеются некоторые аргументы. Дело в том, что в нижеприведенной конвенции шумеров предлагается весьма специфичный способ (алгоритм) организации (группирования) символов в счисление. Как было уже отмечено, построение отображения геометрической модели начинается с метаотображения. Поэтому, если в модели под влиянием некоторых внешних факторов возникает необходимость такой компактификации, то в вербальном отображении для поддержания изоморфизма ничего не остается, как только постфактум использовать позиционное счисление. И,

обратно, так как шумеры использовали в конвенции позиционное счисление, то они следовали тому, что находили в геометрической модели и что требовалось корректно отобразить вербальными средствами. Второе. Выше было предложено определить рекурсию $rec(\delta, 1, n)$, т. е. подобного рода порождающую функцию, непосредственно в качестве метрики: $\Gamma_{E,3} = rec(\delta, 1, n)$. В простейшей своей интерпретации рекурсия отображает некий генератор множества объектов счетного средства, что в рассмотренных выше случаях соответствует простому приписыванию дополнительно по одному и тому же символу (т. е. равномерно) к уже имеющемуся их множеству. Для элементов счисления шумеров, группируемым по некоторому специальному алгоритму компактификации, формально также можно привести подобную порождающую функцию, которая, наряду с выполнением роли счетного средства, будет еще и корректно «упаковывать» символы в соответствующие группы (разряды) позиционного счисления. Следовательно, счислению конвенции шумеров будет также соответствовать некоторая рекурсия, хотя и преобразованная специальным образом, определяющая специфическую метрику данного счисления. Таким образом, в их структуре данная рекурсия (или собственно метрика) будет выполнять роль не только «генератора» счета, но еще будет компоновать результаты в точности тем способом, который следовал из геометрической модели. А особая форма собственно модели, как уже было сказано выше, могла быть следствием некоторых внешних причин, например, соответствовать требованию корреляции метрик площадей и углов (или см. параграф 3.2.2). Поскольку предлагаемая рекурсия (или метрика) является только отображением внутреннего механизма счисления, именно поэтому шумеры и предложили непосредственно (без всяких излишних комментариев, которые могут и не дойти до потомков) 60-значное позиционное счисление, которое уже само по себе является *средством метризации* того, что люди усмотрят в геометрии¹¹.

Невзирая на существование альтернативы, оставим формулирование структур¹² таким, как оно было приведено выше, потому что в таком виде оно является максимально приближенным к наиболее широко используемым современным формулировкам (с точки зрения задействованных средств).

П.1.7. Правильный многоугольник с конечным числом сторон

Адаптируем результаты к модели правильного многоугольника с произвольным конечным числом сторон. Пусть правильный многоугольник P_n имеет n одинаковых сторон. Обозначим все его вершины буквами $A_1, A_2, \dots, A_n$ и составим множество $T_{n+1} = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$ из указанных в том же порядке их наименований с добавлением пустого элемента A_0 в начале, обозначающего начальную точку обхода контура и являющегося предшествующим элемен-

ту A_1 (т. е. так, чтобы выполнялось отношение $A_1 > A_0$), а поэтому в замкнутом контуре совпадающего с A_n . Определим на множестве T_{n+1} множество Θ_{n+1}^0 операций выбора точек: $\Theta_{n+1}^0 = (\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0)$, где $\theta_j^0 \equiv \theta^0(A_0, A_j) \rightarrow A_j$, в которых константой является начальная точка A_0 , и A_j обозначает одну из вершин в множестве T_{n+1} , а именно $\forall A_j: A_j \in T_{n+1}$; а также множество Θ_{n+1} операций поворота: $\Theta_{n+1} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, где операция инициализации $\theta_0 = \theta_j^0$ определяется условиями $\forall A_j: (A_1 > A_j) \in T_{n+1}$ и $\theta_{i+1} \equiv \theta(L, A_i) \rightarrow A_i$, в которых константа L является эталонной длиной, и A_i обозначает одну из вершин в множестве T_{n+1} , а именно $\forall A_i: (A_i > A_0) \in T_{n+1}$. Метрика $\Gamma_{n,n+1}$ элемента A_v определяется выражением

$$\Gamma_{n,n+1}(A_v) = \text{rec}(\theta, A_0, v) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(A_0, A_j)))) \rightarrow A_v$$

для $\forall A_v: (A_1 > A_j; A_v > A_0) \in T_{n+1}$. Данной модели соответствует вербальное множество

$$N_{n+1} = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots, \underbrace{11 \dots 11}_n)$$

или, с учетом договоренности, $N_{n+1} = (\emptyset, 1, 2, \dots, n)$. На множестве N_{n+1} множество Ω_{n+1}^0 операций выбора имеет вид: $\Omega_{n+1}^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots, \delta_n^0)$, где с новой константой $\emptyset$ введены операции $\delta_j^0 \equiv \delta^0(\emptyset, j) \rightarrow j$ для $\forall j: j \in N_{n+1}$, а следующим образом определяется множество Ω_{n+1} операций инкремента: $\Omega_{n+1} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, где операция инициализации $\delta_0 = \delta_i^0$ обусловлена выражением $\forall i: (1 > i) \in N_{n+1}$ и $\delta_{i+1} \equiv \delta(1, k) \rightarrow k + 1$ для $\forall k: (k > \emptyset) \in N_{n+1}$. Метрика $\Gamma_{E,n+1}$ для элемента m выражается так:

$$\Gamma_{E,n+1}(m) = \text{rec}(\delta, \emptyset, m) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, p)))) \rightarrow m$$

для $\forall m: (1 > p; m > \emptyset) \in N_4$.

Введенные множества элементов и операций позволяют получить изоморфные алгебраические структуры $E_{0,n+1}$ и $H_{0,n+1}$.

Для сравнения приведем сначала их формулировки в одной из альтернативных форм, обозначенных как $E_{0,n+1}^*$ и $H_{0,n+1}^*$:

- структура $E_{0,n+1}^* = \langle N_{n+1}, \emptyset, 1, \rho, \Omega_{n+1}^0, \Omega_{n+1}, \Gamma_{E,n+1} \rangle$, носителем которой является конечное множество $N_{n+1} = (\emptyset, 1, 2, \dots, n)$, с константами $\emptyset$ и 1; с отношением порядка строго больше $\rho(i, j) \equiv i > j$ для всех i , следующих после j и $j, i \in N_{n+1}$; с двумя множествами унарных замкнутых операций $\Omega_{n+1}^0, \Omega_{n+1}$,

а именно, с множеством операций выбора

$\Omega_{n+1}^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots, \delta_n^0)$, где $\delta_j^0 \equiv \delta^0(\emptyset, j) \rightarrow j$ для $\forall j: j \in N_{n+1}$, и

с множеством операций инкремента

$\Omega_{n+1} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, состоящим из операции инициализации (выбора) $\delta_0 = \delta_k^0$ при условии, что $\forall k: (1 > k) \in N_{n+1}$, и из операций собственно инкремента

$\delta_i \equiv \delta(1, i - 1) \rightarrow i$ для $\forall i: (i > \emptyset) \in N_{n+1}$;

с метрикой

$\Gamma_{E,n+1}(m) = \text{rec}(\delta, \emptyset, m) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, p)))) \rightarrow m$

для $\forall m: (m > \emptyset) \in N_{n+1}$ и $(1 > p) \in N_{n+1}$;

- структура $H_{0,n+1}^* = \langle T_{n+1}, A_0, L, \zeta, \Theta_{n+1}^0, \Theta_{n+1}, \Gamma_{H,n+1} \rangle$, носителем которой является конечное множество

$T_{n+1} = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$, с константами A_0 и L ;

с отношением порядка строго больше

$\zeta(a_u, a_v) \equiv a_u > a_v$ для всех a_u , следующих после a_v и

с двумя множествами унарных замкнутых операций $\Theta_{n+1}^0, \Theta_{n+1}$,

а именно, с множеством операций выбора

$\Theta_{n+1}^0 = (\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0)$, где $\theta_r^0 \equiv \theta^0(A_0, A_r) \rightarrow A_r$

для $\forall A_r: A_r \in T_{n+1}$,

с множеством операций поворота (сдвига)

$\Theta_{n+1} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, состоящим из операции инициализации

$\theta_0 = \theta_t^0$ при условии, что $\forall A_t: (A_1 > A_t) \in T_{n+1}$, и из операций

собственно поворота $\theta_s \equiv \theta(L, A_{s-1}) \rightarrow A_s$ для $\forall A_s: (A_s > A_0) \in T_{n+1}$;

с метрикой

$\Gamma_{H,n+1}(A_v) = \text{rec}(\theta, A_0, v) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(A_0, A_j)))) \rightarrow A_v$

для $\forall A_v: (A_v > A_0) \in T_{n+1}$ и $(A_1 > A_j) \in T_{n+1}$.

В традиционной форме изоморфные алгебраические структуры $E_{0,n+1}$ и $H_{0,n+1}$ представляют собой следующее:

- структура $E_{0,n+1} = \langle N_{n+1}, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \Gamma_{E,n+1} \rangle$, носителем которой является конечное множество

$N_{n+1} = (\emptyset, 1, 2, \dots, n)$, с константами $\emptyset$ и 1 ;

с отношением порядка строго больше

$\rho(i, j) \equiv i > j$ для всех i , следующих после j и $j, i \in N_{n+1}$;

с унарными замкнутыми операциями

(выбора) перечисления $\delta^0: \delta^0(\emptyset, j) \rightarrow j$ для $\forall j: j \in N_{n+1}$ и

инкремента $\delta: \delta(1, i - 1) \rightarrow i$ для $\forall i: (i > \emptyset) \in N_{n+1}$;

с метрикой

$\Gamma_{E,n+1}(m) = \text{rec}(\delta, \emptyset, m) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, p)))) \rightarrow m$

для $\forall m: (m > \emptyset) \in N_{n+1}$ и $(1 > p) \in N_{n+1}$;

- структура $H_{0,n+1} = \langle T_{n+1}, A_0, L, \theta^0, \theta, \zeta, \Gamma_{H,n+1} \rangle$, носителем которой

является конечное множество

$T_{n+1} = (A_0, A_1, A_2, \dots, A_n)$, с константами A_0 и L ,

с отношением порядка строго больше

$\zeta(a_u, a_v) \equiv a_u > a_v$ для всех a_u , следующих после a_v и

с унарными замкнутыми операциями

выбора θ^0 : $\theta^0(A_0, A_r) \rightarrow A_r$ для $\forall A_r$: $A_r \in T_{n+1}$ и

поворота (сдвига) θ : $\theta(L, A_{s-1}) \rightarrow A_s$ для $\forall A_s$: $(A_s > A_0) \in T_{n+1}$;

с метрикой

$\Gamma_{n,n+1}(A_v) = \text{rec}(\theta, A_0, v) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(A_0, A_j)))) \rightarrow A_v$

для $\forall A_v$: $(A_v > A_0) \in T_{n+1}$ и $(A_1 > A_j) \in T_{n+1}$.

При отображении геометрической модели незамкнутой цепочки из n равных отрезков будем использовать те же множества элементов T_{n+1} , N_{n+1} и операций Θ_{n+1}^0 , Θ_{n+1} , Ω_{n+1}^0 , Ω_{n+1} и те же структуры – $E_{0,n+1}$ и $H_{0,n+1}$.

Для более общего случая, когда последовательно совершается многократный обход сторон многоугольника P_n , причем необязательно кратный числу n его сторон (т. е. совершается поворот радиуса на произвольный дискретный угол), вербальное множество с пустым элементом, в отличие от натурального множества, определим как *натуральный ряд* и обозначим так:

$$\aleph = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots) = (0, 1, 2, 3, \dots).$$

На множестве элементов натурального ряда $\aleph$ определим

- (i) множество Ω^0 замкнутых унарных операций выбора δ_j^0 с константой b_0 : $\Omega^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots)$, где $\delta_j^0 \equiv \delta^0(b_0, j) \rightarrow j$ для $\forall j$: $(j \in \aleph)$ и $b_0 = \emptyset$;
- (ii) множество Ω замкнутых унарных операций инкремента δ_i с константой b : $\Omega = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots)$ с операцией инициализации (выбора) $\delta_0 = \delta_k^0$ при условии, что $\forall k$: $(1 > k) \in \aleph$, и собственно операции инкремента $\delta_i \equiv \delta(b, i - 1) \rightarrow i$ для $\forall i$: $(i > \emptyset) \in \aleph$ и $b = 1$.

Множество точек геометрической модели с учетом того, что каждая точка a_v после полного обхода получит обозначение a_{v+n} , примет вид $T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Множество Θ^0 замкнутых унарных операций выбора θ_r^0 с константой l_0 определяется на множестве T так: $\Theta^0 = (\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \dots)$, где $\theta_r^0 \equiv \theta^0(l_0, a_r) \rightarrow a_r$ для $\forall a_r$: $(a_r \in T)$ и $l_0 = a_0$. Множество Θ замкнутых унарных операций совокупного поворота (сдвига) θ_s с константой l определяется следующим образом: $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ с операцией инициализации (выбора) $\theta_0 = \theta_t^0$ при условии, что $\forall a_t$: $(a_1 > a_t) \in T$, и собственно операциями поворота $\theta_s \equiv \theta(l, a_{s-1}) \rightarrow a_s$ для $\forall a_s$: $(a_s > a_0) \in T$ и $l = L$.

Те же самые средства относятся и к модели с незамкнутым контуром, содержащей неограниченное число одинаковых отрезков, концевые точки которых составляют единый последовательный ряд, соответствующий множеству

$T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. В общем случае (для неограниченного количества объектов в модели с замкнутым и незамкнутым контуром) все приведенные ресурсы образуют две изоморфные алгебраические структуры E_0^* и H_0^* (в альтернативной форме):

- структура $E_0^* = \langle \aleph, \emptyset, 1, \rho, \Omega^0, \Omega, \Gamma_{E_0} \rangle$, носителем которой является (бесконечное множество слов) натуральный ряд $\aleph = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots) = (0, 1, 2, 3, \dots)$, с константами $\emptyset$ и 1; с отношением порядка строго больше $\rho(i, j) \equiv i > j$ для всех i , следующих после j и $j, i \in \aleph$; с двумя множествами унарных замкнутых операций Ω^0, Ω , а именно, с множеством операций выбора $\Omega^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots)$, где $\delta_j^0 \equiv \delta^0(b_0, j) \rightarrow j$ для $\forall j: (j \in \aleph)$ и $b_0 = \emptyset$, и с множеством операций инкремента $\Omega = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots)$, состоящим из операции инициализации (выбора) $\delta_0 = \delta_k^0$ при условии, что $\forall k: (1 > k) \in \aleph$, и из операций собственно инкремента $\delta_i \equiv \delta(b, i - 1) \rightarrow i$ для $\forall i: (i > \emptyset) \in \aleph$ и $b = 1$; с метрикой

$$\Gamma_{E_0}(m) = \text{rec}(\delta, \emptyset, m) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, p)))) \rightarrow m$$

для $\forall m: (m > \emptyset) \in \aleph$ и $(1 > p) \in \aleph$;

- структура $H_0^* = \langle T, a_0, L, \varsigma, \Theta^0, \Theta, \Gamma_{H_0} \rangle$, носителем которой является бесконечное множество (точек) $T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, с константами a_0 и L ; с отношением порядка строго больше $\varsigma(a_u, a_v) \equiv a_u > a_v$ для всех a_u , следующих после a_v и $a_u, a_v \in T$; с двумя множествами унарных замкнутых операций Θ^0, Θ , а именно, с множеством операций выбора $\Theta^0 = (\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \dots)$, где $\theta_r^0 \equiv \theta^0(l_0, a_r) \rightarrow a_r$ для $\forall a_r: (a_r \in T)$ и $l_0 = a_0$, и с множеством операций поворота (сдвига) $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, состоящим из операции инициализации $\theta_0 = \theta_t^0$ при условии, что $\forall a_t: (a_1 > a_t) \in T$, и из операций собственно поворота $\theta_s \equiv \theta(l, a_{s-1}) \rightarrow a_s$ для $\forall a_s: (a_s > a_0) \in T$ и $l = L$; с метрикой

$$\Gamma_{H_0}(a_v) = \text{rec}(\theta, a_0, v) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(a_0, a_j)))) \rightarrow a_v$$

для $\forall a_v: (a_v > a_0) \in T$ и $(a_1 > a_j) \in T$.

В дальнейшем будем ссылаться не на структуры E_0^* и H_0^* , а на E_0 и H_0 , приведенные в традиционной форме:

- структура $E_0 = \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \Gamma_{E_0} \rangle$, носителем которой является (бесконечное множество слов) натуральный ряд $\aleph = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots) = (0, 1, 2, 3, \dots)$, с константами $\emptyset$ и 1;

с отношением порядка строго больше

$\rho(i, j) \equiv i > j$ для всех i , следующих после j и $j, i \in \aleph$;

с унарными замкнутыми операциями

перечисления δ^0 : $\delta^0(\emptyset, j) \rightarrow j$ для $\forall j$: $j \in \aleph$ и

инкремента δ : $\delta(b, i - 1) \rightarrow i$ для $\forall i$: $(i > \emptyset) \in \aleph$;

с метрикой $\Gamma_{E_0}(m) = rec(\delta, \emptyset, m) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, p)))) \rightarrow m$
для $\forall m$: $(m > \emptyset) \in \aleph$ и $(1 > p) \in \aleph$;

- структура $H_0 = \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \varsigma, \Gamma_{H_0} \rangle$, носителем которой является бесконечное множество (точек)

$T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, с константами a_0 и L ;

с отношением порядка строго больше

$\varsigma(a_u, a_v) \equiv a_u > a_v$ для всех a_u , следующих после a_v и $a_u, a_v \in T$;

с унарными замкнутыми операциями

выбора θ^0 : $\theta^0(a_0, a_r) \rightarrow a_r$ для $\forall a_r$: $a_r \in T$ и

поворота (сдвига) θ : $\theta(L, a_{s-1}) \rightarrow a_s$ для $\forall a_s$: $(a_s > a_0) \in T$;

с метрикой

$\Gamma_{H_0}(a_v) = rec(\theta, a_0, v) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(a_0, a_j)))) \rightarrow a_v$

для $\forall a_v$: $(a_v > a_0) \in T$ и $(a_1 > a_j) \in T$.

П.2. Отображение скалярных и векторных пространств

Прежде, чем перейти к конструированию примитивного языка, необходимо сделать одно замечание. Среди прочих свойств объектов геометрической модели существует свойство быть тождественными друг другу. В данном случае имеется в виду равенство расстояний между любой парой соседних точек упорядоченного множества, обеспеченное конструктивным способом построения модели в целом. Такой способ построения предоставляет возможность репликации как всей геометрической модели, так и отдельных ее объектов, замены одних объектов модели конструктивно воссозданными и им тождественными, ну и, конечно, возможность перестановки объектов с переобозначением их концов, не нарушая существующий порядок точек внутри модели.

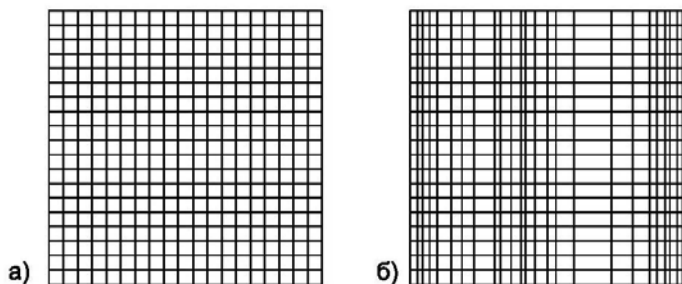


Рис.1.Деформация системы координат

- а) плоское пространство с равномерной прямоугольной сеткой декартовых координат;
- б) «искривленное» пространство с неравномерной горизонтальной координатой.

Следует отметить, что при полном игнорировании факта их тождественности построение какого-либо изоморфизма для любого из рассматриваемых типов моделей вообще является невозможным. Действительно, если мы будем, например, к метрам прибавлять, то футы, то километры, то аршины, то

сажени, причем, хотя и по единице, но в произвольной последовательности, то как нам узнать, какой из двух отложенных путей в вербальном отображении должен быть больше, а какой меньше. В конце концов, в таком случае мы будем получать в геометрических моделях вместо плоского пространства с равномерной сеткой координат пространства «искривленные», которые сами по себе не имеют никакой ценности для нас (Рис.1, 2).

В то же время анализ данного необходимого свойства объектов показывает, что без нарушения самой модели возможно осуществлять над ее объектами процедуры определенного рода, отображение которых приведет к расширению уже построенного языка. Рассмотрим, что именно включает в себя такое расширение. Но прежде отметим, что, если мы расширяем изоморфные алгебраические структуры, то необходимо опять рассматривать совместно и структуру над вербальным множеством и структуру над геометрическими объектами, чтобы не только верифицировать расширение изоморфизма между структурами за счет введения новых операций, но и проконтролировать сохранение уже существовавшего между ними изоморфизма. Тем не менее на этапах, которые представляются достаточно очевидными, будем или совсем пропускать такую верификацию или оговаривать ее весьма кратко в целях сокращения настоящего изложения.

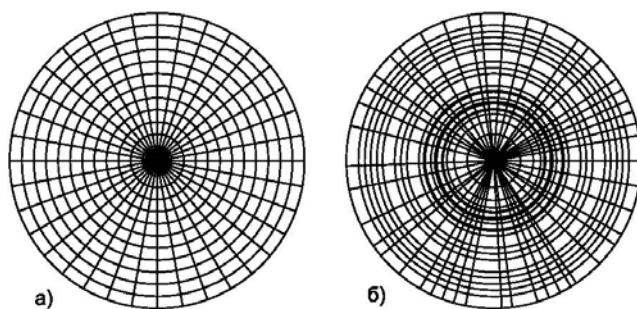


Рис.2. Деформация системы координат.

- а) плоское пространство с равномерной радиально-угловой сеткой координат;
- б) «искривленное» пространство с неравномерной угловой и радиальной координатами.

П.2.1. Изоморфные алгебры с бинарными операциями

Среди одномерных геометрических пространств, кроме пространств с приведенной выше топологией, существуют пространства без выделенного направления обхода его элементов, в которых построение граничного контура также не зависит непосредственно от способа обхода граничных точек, составляющих его. Для наших целей такие пространства, относящиеся к односвязным пространствам второго типа, тоже представляют интерес. Действительно, ведь, кроме измерения временных отрезков, направленных отрезков пройденного пути и т. п., существует необходимость измерять просто количество, например, звезд на небе. Поэтому мы вправе задаться вопросом: каков должен быть язык, чтобы на нем одним было возможно отображать результаты измерения, пользуясь современной терминологией, как векторных, так и скалярных величин. В качестве примера такого пространства используем уже известную геометрическую модель на незамкнутом контуре, в которой отменим условие прохождения множества упорядоченных на нем точек в каком-то одном выделенном направлении. Рассмотрим способ ее отображения совместно с ранее определенными типами моделей. Специфика моделей последних типов уже привела нас к необходимости формулирования изоморфных структур вербального отображения E_0 и метаотображения H_0 в том виде, в каком они приведены выше. В связи с этим добавление нового типа модели должно привести только к их расширению, т. е. к формулированию новых структур E_1 и H_1 , для которых будут верны утверждения $E_0 \subset E_1$ и $H_0 \subset H_1$; причем к расширению, в котором наряду с изоморфизмом $E_1 \cong H_1$ будет сохраняться изоморфизм между E_0 и H_0 .

Введем в метаотображение H_1 , наряду с ресурсами H_0 , новое отношение. Отношение порядка строго меньше $\zeta(a_x, a_y)$ отображает тот факт, что $a_x < a_y$, и соответствует тому, что в упорядоченной последовательности точек $a_x, a_y \in T$ точка a_x предшествует точке a_y или пройденный путь от начальной точки a_0 до точки a_x меньше пройденного пути от начальной точки a_0 до точки a_y . Аналогично введем отношение строго меньше на множестве $\aleph$ в вербальном отображении E_1 . Его определение сформулируем следующим образом: для любых двух записей $k, l \in \aleph$, отношение $\bar{\rho}(k, l)$ отображает тот факт, что $k < l$, и соответствует тому, что в натуральном ряду $\aleph$ элемент $k \in \aleph$ предшествует элементу $l \in \aleph$. Определим в H_1 , наряду с унарной замкнутой операцией поворота (сдвига) из H_0 , операцию, ей обратную на множестве всех непустых объектов. Введем операцию обратного поворота (сдвига) $\bar{\theta}$: $\bar{\theta}(L, a_t) \rightarrow a_{t-1}$ для $\forall a_t: (a_0 < a_t) \in T$ с константой $l = L$, которая

переводит произвольно взятую точку a_t (т. е. конечную точку уже пройденного пути $a_0 a_t$ от начала a_0) множества T на расстояние, равное эталону длины L , в точку a_{t-1} того же множества, удаляя из пройденного пути $a_0 a_t$ отрезок (равный всем остальным в модели); ее результатом будет (уменьшенный на длину L) путь $a_0 a_{t-1}$. Для произвольного элемента a_v , упорядоченного среди прочих в T , существует максимальная конечная рекурсия операций обратного поворота:

$$rec(\bar{\theta}, a_v, v) \equiv \bar{\theta}(L, \bar{\theta}(L, \bar{\theta}(L, \dots \bar{\theta}(L, a_v)))) \rightarrow a_0.$$

Аналогично, в вербальной структуре E_1 введем на множестве $\aleph$ унарную операцию декремента $\bar{\delta}_k$ с константой b и определим ее следующим образом: $\bar{\delta}_k \equiv \bar{\delta}(b, k) \rightarrow k - 1$ для $\forall k: (\emptyset < k) \in \aleph$; $b = 1$. Операция декремента уменьшает непустое слово на один символ справа, например, $\bar{\delta}_1(1, 1111) \rightarrow 111$, т. е. соответствует переходу от текущего слова l к ближайшему слову k , для которых верно отношению порядка $\bar{\rho}(k, l) \equiv k < l$. Свойства всех операций обеих алгебраических структур, в том числе и вновь введенных, позволяет составлять их суперпозиции и комбинации их суперпозиций на множестве элементов их носителей. Например,

$$\delta(1, \delta^0(\emptyset, j)) \rightarrow j + 1; \quad \delta(1, \delta(1, \delta^0(\emptyset, j))) \rightarrow j + 2;$$

$$\bar{\delta}(1, \bar{\delta}(1, \bar{\delta}(1, \bar{\delta}(1, \bar{\delta}(1, \delta(1, \delta^0(\emptyset, 3)))))))) \rightarrow \emptyset.$$

Подобные приведенным конструкции помогут доказать допустимость следующих непротиворечивых расширений алгебраических структур.

Определим на множестве элементов натурального ряда $\aleph$ бинарную операцию $\varphi(i, j)$, осуществляющую конкатенацию записей-слов: $\varphi(i, j) \equiv i \oplus j = k$, где $j, i, k \in \aleph$ и $j, i \leq k$; если $k = i$, то $j = \emptyset$, а если $k = j$, то $i = \emptyset$, если $i = j = k$, то $i = j = k = \emptyset$, т. е. операцию объединения двух слов в одно слово. Наряду с замкнутостью данная операция обладает свойством коммутативности, т. е. $\varphi(i, j) = \varphi(j, i)$, и ассоциативности, т. е. $(i \oplus j) \oplus k = i \oplus (j \oplus k) = i \oplus j \oplus k$.

Определим на элементах множества $T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ замкнутую бинарную операцию $\gamma(a_p, a_l) \equiv a_p \otimes a_l = a_m$, совершающую композицию поворотов (композицию сдвигов точек) такую, что для произвольных $a_p, a_l \in T$ ее результатом a_m будет поворот (сдвиг), также принадлежащий множеству T , т. е. $a_m \in T$. Данная операция также обладает свойством ассоциативности и коммутативности.

Алгебраические структуры с бинарными замкнутыми и ассоциативными операциями будем называть алгебрами. С позиций современной математики алгебра на бесконечном множестве с некоторой бинарной замкнутой и

ассоциативной операцией, например, $\oplus$, является полугруппой, если к тому же носитель алгебры содержит нулевой элемент (или алгебраическую единицу $e \equiv 0$) такой, что для произвольного его элемента i выполняется условие $e \oplus i = i \oplus e = i$, то данная алгебра называется моноидом. Следовательно, алгебры, содержащие операции $\varphi(i, j)$ и $\gamma(a_p, a_l)$ являются моноидами.

Наряду с конкатенацией на множестве $\aleph$ возможно определить ей обратную операцию – операцию размежевания слов. Обозначим операцию размежевания $j \bar{\oplus} i \equiv \bar{\varphi}(i, j)$: $\bar{\varphi}(i, j) \equiv i \bar{\oplus} j = k$, где $i, j, k \in \aleph$ и $k \leq j \leq i$, которая будет обратной для операции конкатенации. Она определяется не для произвольной, а для упорядоченной пары элементов $i, j \in \aleph$ такой, что $i \geq j$; только тогда можно утверждать, что результат операции будет принадлежать тому же множеству: $k \in \aleph$, а именно, если $i = j$, то $(k = \emptyset) \in \aleph$; если $i > j$, то $(k > \emptyset) \in \aleph$; если $i = j = k$, то $(i = j = k = \emptyset) \in \aleph$. В общем случае $i \bar{\oplus} j \neq j \bar{\oplus} i$. Данная операция межует одно слово на два, отделяя j символов справа от слова с i символами так, что в результате остается слово с k символами. В частном случае, когда, как и на натуральном множестве N (в отличие от натурального ряда $\aleph$), данная операция симметрична $i \bar{\oplus} j = j \bar{\oplus} i$, она просто уменьшает длину одной записи-слова на количество знаков во втором слове. Соответствующая операция может быть введена и на множестве геометрических объектов $T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Определим бинарную операцию $\bar{\gamma}(a_p, a_l) \equiv a_p \bar{\otimes} a_l = a_m$ (здесь также $a_p, a_l, a_m \in T$ и $a_p \leq a_l \leq a_m$), описывающую после поворота a_p обратный поворот a_l , т. е. декомпозицию поворотов (декомпозицию сдвигов точек) такую, что для произвольных $a_p, a_l \in T$ ее результатом a_m будет поворот (сдвиг), также принадлежащий множеству T , т. е. $a_m \in T$.

Весьма существенно, что, с учетом свойства тождественности всех объектов в модели, введение новых отношений и операций в данных алгебрах приводит к возможности обобщения понятия метрики, непротиворечиво расширив прежде введенное его определение так, чтобы оно стало одинаково пригодным и для векторных и для скалярных пространств, причем для произвольного подмножества объектов в любой их части. Если прежде, например, в метаалгебре для введения первоначального определения метрики основанием послужила операция поворота (сдвига), которая, по определению, с каждым шагом позволяет перечислить неодинаковые пройденные пути, начинающиеся из *начальной точки*, то в расширенном метаотображении для введения обобщенного понятия метрики воспользуемся бинарными операциями композиции (декомпозиции), которые предоставляют возможность сопоставить произвольно выбранному такому пути множество ему равных в разных частях основного множества (носителя). При этом сохраняющиеся в расширенной метаалгебре операции поворота (сдвига), выбора и отношений порядка обеспечивают возможность верификации на модели непротиворечивость данного

переопределения метрики. По существу, бинарные операции позволяют представить различные участки геометрической модели совершенно симметрично, или, как обычно интерпретируется в современной математике, бинарные операции позволяют показать, что одна и та же метрика (в данном случае, аддитивная) имеет место в любой (внутренней) части множества, а не только на периферии. Поэтому, определим, что обобщенной метрике $\Gamma_{H1\otimes}$ в метаалгебре с бинарными операциями соответствует выражение $a_p \otimes a_l = a_m$, т. е. $\Gamma_{H1\otimes} \Rightarrow a_p \otimes a_l = a_m$, где для произвольных $a_p, a_l \in T$ выполняется условие $a_m \in T$. Аналогично, в вербальном отображении для обобщенной метрики $\Gamma_{E1\oplus}$ поставим в соответствие выражение $i \oplus j = k$, т. е. $\Gamma_{E1\oplus} \Rightarrow i \oplus j = k$, где для произвольных $j, i \in \aleph$ выполняется условие $k \in \aleph$.

Между метрикой, введенной таким образом в каждую из изоморфных алгебр, и совокупностью всех остальных ресурсов данной алгебры существует весьма важная и примечательная связь. Каждый член в одном из аргументов бинарной операции фактически выражается через соответствующую только ему комбинацию суперпозиций; для отображения всех членов, значение которых допустимо в данном аргументе, например, в a_p , потребуются в точности все возможные комбинации всех возможных суперпозиций всех возможных операций данной метаалгебры, за исключением операции декомпозиции. Наряду с этим, комбинаторная алгебра всех возможных членов в обоих аргументах новой метрики (с учетом необходимости верификации и непротиворечивой редукции) будет изоморфной комбинаторной алгебре не только суперпозиций указанных операций, но и всех отношений порядка в метаалгебре. Таким образом, обобщенная метрика представляет собой алгебраический объект (агрегатор), в котором интегрируется полный набор комбинаций всего арсенала ресурсов метаалгебры и их допустимых суперпозиций, за исключением операции декомпозиции. В связи с последним, возможны несколько вариантов. Или введение данной операции в метаалгебру (и соответствующей операции в вербальную алгебру) было преждевременным, что весьма сомнительно, или обобщенная метрика должна вводиться иначе, например, так, чтобы включала и операцию декомпозиции, которая, к сожалению, в данной алгебре не является замкнутой для любой пары аргументов, взятых без каких-либо ограничений из множества-носителя данной алгебры, или оставить все как есть и просто иметь в виду, что в последующем, когда операция декомпозиции получит простор и станет замкнутой, т. е. в той математике, где это будет иметь место, именно там комбинаторная алгебра всех членов обобщенной метрики и будет изоморфной комбинаторной алгебре всего арсенала бинарных операций и отношений порядка, а в данной алгебре все остается так, как есть. На последнем варианте и остановимся.

Введение новых операций и отношений порядка расширяет структуры

$$E_0 = \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \Gamma_{E_0} \rangle \text{ и } H_0 = \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \zeta, \Gamma_{H_0} \rangle,$$

и мы получаем новые структуры

$$E_1 = \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \bar{\rho}, \bar{\delta}, \oplus, \bar{\oplus}, \Gamma_{E_0}, \Gamma_{E_1 \oplus} \rangle \text{ и } \\ H_1 = \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \zeta, \bar{\zeta}, \bar{\theta}, \otimes, \bar{\otimes}, \Gamma_{H_0}, \Gamma_{H_1 \otimes} \rangle.$$

Как уже отмечалось, в силу сохранения всех ресурсов структур E_0 и H_0 , в новых структурах E_1 и H_1 возможно непротиворечивое представление как векторных, так и скалярных одномерных пространств, что может быть верифицировано на соответствующих геометрических моделях.

Все вновь введенные операции, наряду с уже имевшими место, также являются аддитивными. Таким образом на вербальном множестве $\aleph$ можно построить достаточно незаурядную аддитивную алгебру, что в совокупности с множеством $\aleph$ будет представлять надежное средство счета, т. е. аддитивную метрику на множестве целых (геометрических) объектов, которому соответствует натуральный ряд. Форма записи информации с помощью натурального ряда без введенных нами сокращенных обозначений предельно проста, достаточно операбельна и в то же время чрезмерно расточительна и обременительна. Тем не менее такой способ имеет право на существование. На его основе может быть создан язык, назовем его примитивным, который будет непротиворечиво отображать три обсуждаемых типа (два векторных, один скалярный) геометрических моделей целых объектов и на любой из них интерпретироваться.

Все вышеприведенные средства для построения языка изложены с минимальным привлечением понятий, категорий и структур современной математической науки, поскольку подобный аппарат в данном случае не является необходимым, а использован здесь с той лишь целью, чтобы можно было в достаточной мере убедить читателя в адекватности языковых средств представлениям современного человека о подлежащей описанию сущности геометрических моделей. Хотя более подробно роль и значение используемой формы изложения системы шумеров будут приведены ниже в двух последующих параграфах, тем не менее уже сейчас можно привести некоторые аргументы в пользу необходимости связи данной формы с математическими конструкциями нашего времени. Пять или больше тысяч лет назад создавая язык, шумеры, должно быть, в соответствие со стилем того времени намного проще излагали основные идеи своих построений, не прибегая за ненадобностью к излишним абстрактным обобщениям. Но человеку нашего времени, приученному со студенческой скамьи оперировать в математике абстрактными множествами,

категориями, структурами, алгебрами и пр., изложенными в вербальной форме, вероятно, проще будет сориентироваться в них. В связи с этим еще раз подчеркнем тот факт, что язык, построенный на основе приведенных алгебр, является вполне достаточным, чтобы служить надежным метрическим средством на неограниченных множествах целых объектов. Если адаптировать терминологию к современной, то в нем заложена основа метризации пространства способом шумеров, т. е. доевклидовым, а точнее, допифагоровым.

П.2.2. Роль и значение изоморфных алгебраических структур

Теперь попытаемся ответить на вопросы, зачем, например, создавать для геометрической модели язык; как и зачем интерпретировать его на модели и ряд сопутствующих. Выше отмечалось, что нашей основной целью является создание языка, с помощью которого возможно описывать геометрическую модель адекватно представлению человека о том, что должно подлежать описанию в ней языковыми средствами. При этом для каждой геометрической модели создавались сразу два отображения – вербальное и метаотображение. А также было оговорено, что способом для достижения указанной цели является построение особого типа отношения между вербальным отображением и геометрическим (или, по-другому, метаотображением); отношения, которое в современной математике определяется как изоморфизм между алгебрами над множествами (элементов). Какой смысл в создании изоморфных алгебр? Во-первых, в них рассматриваются два различных множества, например, T и $\aleph$, между элементами которых может быть установлена биекция, т. е. взаимно однозначное соответствие. Во-вторых, вводятся операции над элементами данных множеств, между операциями также существует возможность установления, как было сказано, биективного соответствия; например, между бинарной операцией (композицией поворотов) над объектами (например, правильного многоугольника) множества T и бинарной операцией (конкатенацией) над объектами (словами) множества $\aleph$. Содержательно биективное соответствие операций в приложении к данному примеру означает следующее.

Пусть имеется

- точка a_i (поворот/сдвиг к ней от точки a_0) в множестве T и ее биекция в виде слова N_i в множестве $\aleph$;
- точка a_j (поворот/сдвиг к ней от точки a_0) в множестве T и ее биекция в виде слова N_j в множестве $\aleph$;
- во множестве T бинарная операция (композиция поворотов/сдвигов) $\gamma(a_p, a_l) \equiv a_p \otimes a_l = a_m$ такая, что для произвольных $a_p, a_l \in T$ точка a_m также принадлежит T , т. е. $a_m \in T$;
- во множестве $\aleph$ бинарная операция (конкатенация)

$\varphi(N_r, N_s) \equiv N_r \oplus N_s = N_t$ такая, что для произвольных $N_r, N_s \in \aleph$ слово N_t также принадлежит $\aleph$, т. е. $N_t \in \aleph$.

Кроме того, пусть действующие каждая в своем множестве операции γ и φ обладают свойством ассоциативности (по-старому, свойством сочетательным), которое определяет правило раскрытия (или добавления) скобок подобно тому, что имеет место, например, в арифметике при сложении чисел a, b, c : $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$. Тогда *результат* a_k операции $a_i \otimes a_j = a_k$ является биекцией *результата* N_k операции $N_i \oplus N_j = N_k$. Другими словами, в данном случае будет иметь место не только биекции между соответствующими операндами (аргументами операции), но и биекция между их результатами. Существование такого рода соответствий и является главным и неотъемлемым свойством двух изоморфных алгебр.

Поскольку между алгебрами на каждом из множеств имеется данное соответствие, то для решения ряда геометрических задач с такими геометрическими объектами вполне достаточно выполнить только соответствующие операции (в алгебре вербального отображения) со словами, которые мы определили как элементы вербального множества. Следовательно, при этом нет необходимости, по крайней мере, аккуратно и долго вычерчивать последовательности всех геометрических объектов в каждой задаче, тем более, если масштабы объектов вообще не позволяют использовать графические средства. Но, с другой стороны, при условии существования изоморфизма между алгебрами, если решение некоторой задачи достигнуто вербальными средствами, то его всегда можно интерпретировать на геометрической модели. По существу, это означает, что после построения всех необходимых конструктивных объектов (в данном случае вершин многоугольника) имеющееся решение задачи можно проверить на них, тем самым полностью доказав истинность вербального решения или выявить некорректные вербальные выкладки, если результаты не совпадают. Иначе это означает, что интерпретация на геометрической модели позволяет получить истину, как говорится, «в последней инстанции». Почему? Потому что вербальный способ создается для того и только для того, чтобы облегчить и ускорить процесс нахождения правильного решения (результата) в отношениях непосредственно между геометрическими объектами именно данного типа моделей. И если между алгебрами изоморфизм отсутствует, то и решение задачи одним из способов (одной из алгебр) нельзя заменять решением ее с помощью другого способа (другой алгеброй).

Вышеизложенное вполне корректно представляет современную точку зрения на приведенную конструкцию из двух алгебр. Вместе с тем существует и другой аспект, анализ в котором проявляет весьма интересные и существенные причинно-следственные связи. Прежде, чем перейти к нему, необходимо обратиться к методу аргументации шумеров. Данная тема изложена подробно в параграфе 1.2.2, однако ввиду ее важности и для удобства восприятия ниже приведены ее основные моменты.

П.2.3. Древний метод доказательства и способ его вербализации

Будем считать, что древние шумеры аргументировали выводы, подобные вышеприведенным, за неимением современных математических средств, как и древние греки, с вычерчиванием геометрических фигур, например, в песочнице и с физической демонстрацией с помощью камушков того, что они имеют в виду, говоря об объектах и операциях над геометрическими объектами. Данный способ позволяет наглядно и весьма убедительно предъявить те манипуляции с камушками, которые с наибольшей точностью и достоверностью соответствуют феноменам, подлежащим описанию в геометрической модели. Более того, именно только те феномены из геометрической модели, что соответствуют демонстрируемым манипуляциям с камушками, согласно идее древних математиков, должны быть объектами описания. Обозначив требуемые феномены – объекты, процедуры, отношения, они переходили ко второму этапу демонстрации. Теперь они могли с помощью тех же самых камушков показать, что в предлагаемом ими способе создания конструктивных элементов-символов счисления группы символов-камушков совершенно идентичны группам объектов-камушков, которые приводились на первом этапе, и конструктивное определение операций над символами-камушками также совершенно эквивалентно тем группировкам объектов-камушков, которые приводились в первом случае. Фактически, они использовали физические объекты (камушки) и физические процедуры с ними в качестве промежуточного средства, чтобы показать, что возможности данного средства эквивалентны одновременно и тому, что должно быть описанным в геометрической модели и тому, что предлагается в качестве средства описания. А если две структуры порознь эквивалентны третьей (камушкам и манипуляциям с камушками), то они должны быть эквивалентны и друг другу. Следовательно, предлагаемый шумерами язык должен совершенно точно соответствовать геометрической модели, а модель – языку. В наше время при доказательстве выводов первого этапа требуется вербально привести достаточно подробное отображение современными математическими средствами. По этой причине в данной книге приводится отображение конструктивных объектов и физически реализуемых процедур над ними на метаязыке, т. е. метаотображение с определенной алгеброй. Хотя ранее было подчеркнуто, что вербальное отображение является конструктивным, тем не менее оно также излагается в форме некоторой алгебры, в которой, по крайней мере, вспомогательные ресурсы представляются вербально. Далее. В современной математике существует единственный критерий, по которому возможно оценить эквивалентность двух алгебр: если две алгебры изоморфны, то они эквивалентны (с точностью до изоморфизма). Именно поэтому выстраивая вербальное отображение, мы неукоснительно

соблюдаем требование его изоморфности метаотображению. В таком случае вербальное отображение будет ровно в той же степени адекватно описывать содержание геометрической модели, насколько адекватно это будет делать метаотображение. А поскольку в наше время метаотображение – это суррогат камушков древних, постольку от степени его соответствия тому, что подлежит описанию в геометрической модели, зависит корректность всего последующего изложения. Кроме того, имеется еще несколько деталей, без которых традиционная методика современного конструирования будет значительно уступать способу древних греков и шумеров. Во-первых, так как язык является конструктивной структурой¹³, то и геометрическая модель должна состоять исключительно из конструктивных объектов, что и было оговорено ранее. При таких обстоятельствах правильность вычисления в алгебре (вербального отображения) числового значения какого-либо параметра всегда может быть проверена «экспериментом», т. е. быть выверена на конструктивных объектах геометрической модели. Во-вторых, набор камушков в древнем способе доказательства играл еще одну и весьма существенную роль, причем настолько существенную, что и в наше время без его вербального заменителя обойтись невозможно, если мы хотим построить *одну* структуру, а не *две*, пусть даже и изоморфные друг другу. Дело в том, что у математиков прошлого сначала камушки использовались в алгебре геометрической модели в качестве одного типа переменных – конструктивных геометрических элементов. Затем, те же самые камушки уже в вербальной алгебре использовались в качестве другого типа переменных – конструктивных символьных элементов. Выражаясь современным языком, эти предметы исполняли по очереди роль двух типов объектов-переменных, которые могли принимать операции и отношения, подобные тем, что мы определили уже в каждой из изоморфных алгебр: вербальной E_1 и метаалгебре H_1 . С учетом данного обстоятельства воспользуемся для наших целей полиморфизмом – объектом современной математики, несколько изменив его определение. Определим полиморфизм как преобразование $G^{-1}: \{Q\} \Rightarrow \{M\}$, обратное гомоморфизму $G: \{M\} \Rightarrow \{Q\}$. Здесь $\{M\}$ – множество-источник, а $\{Q\}$ – множество-результат гомоморфного отображения, т. е. при G -преобразовании, в то же время $\{Q\}$ – это множество-источник, а $\{M\}$ – множество-результат полиморфного отображения или при G^{-1} -преобразовании. Элементы $(m_i, m_j) \in \{M\}$, до преобразования бывшие в исходном множестве-источнике $\{M\}$ различными, в результате гомоморфного отображения G могут стать неразличимыми по некоторому предикату $G(m_i) = q_k \in \{Q\}$, $G(m_j) = q_k \in \{Q\}$ в новом его множестве-результате $\{Q\}$. Нас будет интересовать возможность идентификации этих элементов после гомоморфного отображения *внутри* множества-результата $\{Q\}$ по другому предикату, например, $q_k \leftrightarrow (q_k^1, q_k^2)$, т. е. в форме упорядоченной двойки (а в общем случае в форме упорядоченной n -ки), так, что при обратном отображении G^{-1} каждый член

такого упорядоченного ряда (полиморфного объекта) $(q_k^1, q_k^2) \leftrightarrow q_k \in \{Q\}$ соответствовал бы именно тому элементу в исходном множестве $\{M\}$, который при гомоморфном (т. е. прямом) отображении G по первому предикату (ему соответствует нижний индекс) переходил бы снова на то же место в упорядоченной двойке множества-результата $\{Q\}$:

$$G^{-1}(q_k) \equiv (G^{-1}(q_k^1) \Rightarrow m_i; G^{-1}(q_k^2) \Rightarrow m_j);$$

притом, что

$$G(m_i) \Rightarrow q_k^1 \leftrightarrow (q_k) \text{ и } G(m_j) \Rightarrow q_k^2 \leftrightarrow (q_k).$$

Упорядоченную двойку $q_k \leftrightarrow (q_k^1, q_k^2)$ с такими свойствами внутри множества-результата $\{Q\}$ гомоморфного отображения будем называть полиморфной формой или полиморфным объектом.

В связи с этим, чтобы современный метод конструирования соответствовал идее шумеров, мы должны использовать в качестве вербального заместителя шумерских камушков такой инструмент, как полиморфные объекты (элементы, множества, операции, отношения и т. п.). В обеих изоморфных алгебрах имеется пара соответствующих друг другу носителей алгебры, n пар соответствующих друг другу операций и m пар соответствующих друг другу отношений, k пар соответствующих друг другу констант. Будем считать, что алгебро-геометрическое отображение представляет определенную единую математическую структуру тогда и только тогда, когда в этой математической структуре имеется полиморфный объект-носитель и k полиморфных объектов-констант, а также n полиморфных объектов-операций и m полиморфных объектов-отношений притом, что каждый полиморфный объект представляет собой упорядоченную пару, на первом месте в которой стоит объект вербальной алгебры E_1 , а на втором – соответствующий объект метаалгебры H_1 . Именно поэтому в каждой из алгебр непременно должно быть одинаковое количество пар и операций, и отношений, и алгоритмов, и пр. Полученная совокупность полиморфных объектов, объединяющая рассматриваемое алгебро-геометрическое биективное отображение в единую цельную структуру, определяет конкретную математику, т. е. язык шумеров, представляющий собой алфавит с правилами построения слов и выражений и правилами оперирования с ними. Нарушение биективности в алгебро-геометрическом отображении недопустимо. По этой причине попытка построения математики из таких двух совершенно самостоятельных и независимых друг от друга наук, как алгебра и геометрия, заведомо обречена на неудачу.

И последнее. Один и тот же наглядно-демонстрационный способ аргументации древних, используемый как на первом этапе доказательства с одним типом переменных, так и с другим типом – на втором, должен быть замещен в современном методе конструирования единой универсальной (полиморфной) логической средой (оболочкой), роль которой в современной математике

превосходно исполняет (а судя по многим факторам, ее предназначение именно в этом) созданная Кантором и впоследствии успешно развитая теория множеств. Вот и все, что можно на данном этапе почерпнуть из древнего способа конструирования шумеров.

Но теперь после повторного анализа их метода и арсенала имеющихся математических ресурсов действительно появляется новый аспект и все сказанное может быть преобразовано во вполне убедительный **современный метод построения всей математики**.

Замена наглядно-демонстрационного способа построения конструкции алгебро-геометрического отображения, как единой структуры, вербальным требует введения единой универсальной (*полиморфной*) *логической среды* (теории множеств), внутри которой по типовым правилам формируются две изоморфные алгебры: вербальная алгебра и метаалгебра. При этом метаалгебра выстраивается с целью наибольшего соответствия непосредственно тем феноменам геометрической модели, которые в дальнейшем подлежат описанию вербальными средствами, а вербальная алгебра, содержащая непосредственно язык и все сопутствующие ему вербальные ресурсы (константы, операции, отношения, алгоритмы и пр.), выстраивается, в свою очередь, так, чтобы изоморфно соответствовать метаалгебре. В то же время, для получения единой структуры алгебро-геометрического отображения, называемого математикой, необходимо, выстраивая его при посредстве вербальной алгебры и метаалгебры, соблюдать условие, согласно которому объектами математики являются только полиморфные формы, представленные упорядоченными двойками, на первом месте в каждой из которых размещается по порядку один объект из упорядоченной последовательности объектов вербальной алгебры, на втором – соответствующий объект из метаалгебры.

Таким образом, структурно математика представляет собой совокупность полиморфных объектов (*носитель* – множество элементов, *константы, операции, отношения, алгоритмы*, и т. п.), упорядоченных в соответствие с порядком структурных объектов любой из построенных алгебр; все объекты данной структуры, будучи *полиморфными бинарными формами*, возвращают и принимают (если для них это определено) переменные двух типов. Обрабатываемые операциями (отношениями, алгоритмами и т. п.) переменные разных типов и возвращаемые ими результаты разных типов находятся в особом соответствии друг с другом, которое определяется изоморфизмом построенных алгебр. Поэтому, с учетом имеющихся в современной математике ресурсов, для корректного описания всей конструкции необходимо строить не только две изоморфные алгебры, но в каждой из них требуется дублировать полный комплект объектов единой математической структуры так, что каждый объект в одной из алгебр содержит или оперирует переменными уже только одного из двух разных математических типов.

Из сказанного следует, что смысл создания (математического) языка заключается в том, чтобы получить специального сорта алгебро-геометрическое отображение, а именно, особое изоморфное алгебро-геометрическое отображение, когда с помощью символьных (числовых) результатов (алгебраических) операций над наборами символов (числами) взаимно однозначно представляется результат определенных геометрических процедур над исходными геометрическими объектами. В конце концов, это путь к созданию таких математических средств (которыми пользуется наша цивилизация в настоящее время), когда без обращения непосредственно к графическим (геометрическим) средствам, а только лишь с помощью алгебраических вычислений, человек может решить целый спектр, по крайней мере, геометрических задач, возникающих перед ним.

Обобщая, отметим, что установление подобного рода соответствий как между двумя множествами элементов, например, между множеством геометрических объектов и множеством возможно иной природы объектов, так и между процедурами или операциями (возможно различной природы) над объектами данных множеств, т. е. изоморфизма, – это путь использования созданных средств вербальной (языковой) природы, с помощью которых можно непротиворечиво вербальным способом представлять и геометрические объекты и объекты рассматриваемого множества (иной природы), а через операции над объектами той же вербальной природы также непротиворечиво представлять еще и результаты взаимоотношений между теми самыми объектами геометрическими и объектами рассматриваемого множества. Данное обобщение можно сделать на основании свойства транзитивности изоморфизма, согласно которому две алгебры изоморфны друг другу, если каждая из них изоморфна третьей. Следовательно, это общий путь приложения математики для получения результатов в областях, изучаемых другими науками. Необходимостью создания именно такой математики и руководствовались древние шумеры, задаваясь целью построить первое, известное новейшей истории, позиционное счисление (компактный язык) и впоследствии связанную с ним алгебру вычислений.

В заключение введем определение.

Примитивной математикой

$$M_L = \langle \{E_1 \cong N_1\}, \mathfrak{M}, \mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1, \Delta^0, \Delta, P, \bar{P}, \bar{\Delta}, \Psi, \bar{\Psi}, \Gamma_L, \Gamma_{L+} \rangle$$

называется алгебро-геометрическое отображение, состоящее из двух алгебр E_1 и N_1 , изоморфных друг другу, т. е. $E_1 \cong N_1$, и списка полиморфных объектов. Алгебры в математике M_L определены следующим образом:

- алгебра $E_1 = \langle \mathfrak{K}, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \bar{\rho}, \bar{\delta}, \oplus, \bar{\oplus}, \Gamma_{E_0}, \Gamma_{E_1 \oplus} \rangle$, носителем которой является (бесконечное множество слов) натуральный ряд $\mathfrak{K} = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots) = (0, 1, 2, 3, \dots)$, с константами $\emptyset$ и 1;

с отношениями порядка строго больше

$\rho(i, j) \equiv i > j$ для всех i , следующих после j и $j, i \in \aleph$,

строго меньше

$\bar{\rho}(k, l) \equiv k < l$ для всех k , предшествующих l и $k, l \in \aleph$;

с унарными замкнутыми операциями

выбора δ^0 : $\delta^0(\emptyset, j) \rightarrow j$ для $\forall j: j \in \aleph$;

инкремента δ : $\delta(b, i - 1) \rightarrow i$ для $\forall i: (i > \emptyset) \in \aleph$;

с унарной операцией

декремента $\bar{\delta}$: $\bar{\delta}(1, k) \rightarrow (k - 1)$ для $\forall k: (\emptyset < k) \in \aleph$;

с бинарной замкнутой операцией конкатенации записей-слов

$\oplus$: $\phi(i, j) \equiv i \oplus j \rightarrow k$, для $(j, i \leq k) \in \aleph$ с условиями, что, если $k = i$,

то $j = \emptyset$, если $i = j = k$, то $i = j = k = \emptyset$ и

$(l \oplus m) \oplus n = l \oplus (m \oplus n) = l \oplus m \oplus n$ для $\forall(l, m, n) \in \aleph$;

с бинарной операцией размежевания записей-слов справа

$\bar{\oplus}$: $\bar{\phi}(i, j) \equiv i \bar{\oplus} j = k$, для $(i \geq j \geq k) \in \aleph$ с условиями, что, если $i = j$,

то $k = \emptyset$, если $k = \emptyset$, то $i = j$, если $i > j$, то $(k > \emptyset) \in \aleph$;

если $i = j = k$, то $i = j = k = \emptyset$;

с метрикой

$\Gamma_{E0}(m) = rec(\delta, \emptyset, m) \equiv \delta(1, \delta(1, \delta(1, \dots \delta^0(\emptyset, p)))) \rightarrow m$

для $\forall m: (m > \emptyset) \in \aleph$ и $(1 > p) \in \aleph$ и

с обобщенной метрикой $\Gamma_{E1\oplus}$: $i \oplus j = k$ для $\forall j, i, k \in \aleph$;

- алгебра $H_1 = \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \zeta, \bar{\zeta}, \bar{\theta}, \otimes, \bar{\otimes}, \Gamma_{H0}, \Gamma_{H1\otimes} \rangle$, носителем которой является представленное на прямой или на окружности бесконечное множество

$T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ точек с одинаковым расстоянием L между любой парой соседних; с константами a_0 и L ;

с отношениями порядка строго больше

$\zeta(a_u, a_v) \equiv a_u > a_v$ для всех a_u , следующих после a_v и $a_u, a_v \in T$,

строго меньше

$\bar{\zeta}(a_x, a_y) \equiv a_x < a_y$ для всех a_x , предшествующих a_y и $a_x, a_y \in T$;

с унарными замкнутыми операциями

выбора θ^0 : $\theta^0(a_0, a_r) \rightarrow a_r$ для $\forall a_r: a_r \in T$, совокупного

поворота (сдвига) θ : $\theta(L, a_{s-1}) \rightarrow a_s$ для $\forall a_s: (a_s > a_0) \in T$;

с унарной операцией обратного поворота (сдвига)

$\bar{\theta}$: $\bar{\theta}(L, a_t) \rightarrow a_{t-1}$ для $\forall a_t: (a_0 < a_t) \in T$;

с бинарной замкнутой операцией композиции поворотов (композиции сдвигов точек)

$\otimes$: $\gamma(a_p, a_l) \equiv a_p \otimes a_l = a_m$, для $(a_p, a_l \leq a_m) \in T$ с условиями, что, если $a_p = a_m$, то $a_l = a_0$, если $a_p = a_l = a_m$, то $a_p = a_l = a_m = a_0$ и

$(a_x \otimes a_y) \otimes a_z = a_x \otimes (a_y \otimes a_z) = a_x \otimes a_y \otimes a_z$

для $\forall (a_x, a_y, a_z) \in T$;

с бинарной операцией декомпозиции поворотов (декомпозиции сдвигов точек)

$\overline{\otimes}$: $\bar{\gamma}(a_p, a_l) \equiv a_p \otimes a_l = a_m$ для $(a_p \geq a_l \geq a_m) \in T$ с условиями, что, если $a_p = a_l$, то $a_m = a_0$, если $a_m = a_0$, то $a_p = a_l$, если $a_p > a_l$, то $(a_m > a_0) \in T$, если $a_p = a_l = a_m$, то $a_p = a_l = a_m = a_0$;

с метрикой

$\Gamma_{H_0}(a_v) = rec(\theta, a_0, v) \equiv \theta(L, \theta(L, \theta(L, \dots \theta^0(a_0, a_j)))) \rightarrow a_v$

для $\forall a_v$: $(a_v > a_0) \in T$ и $(a_1 > a_j) \in T$ и

с обобщенной метрикой

$\Gamma_{H_1 \otimes}$: $a_p \otimes a_l = a_m$ для $\forall a_p, a_l, a_m \in T$.

Объекты из списка полиморфных объектов

- (i) определяются через соответствующие объекты, имеющиеся как в алгебре E_1 , так и в алгебре H_1 , следующим образом:

$\mathfrak{M} = \{\aleph, T\}$; $\mathbb{K}_0 = \{\emptyset, a_0\}$; $\mathbb{K}_1 = \{1, L\}$; $\Delta^0 = \{\delta^0, \theta^0\}$; $\Delta = \{\delta, \theta\}$;

$P = \{\rho, \varsigma\}$; $\bar{P} = \{\bar{\rho}, \bar{\varsigma}\}$; $\bar{\Delta} = \{\bar{\delta}, \bar{\theta}\}$; $\Psi = \{\oplus, \otimes\}$; $\bar{\Psi} = \{\bar{\oplus}, \bar{\otimes}\}$;

$\Gamma_L = \{\Gamma_{E_0}, \Gamma_{H_0}\}$; $\Gamma_{L+} = \{\Gamma_{E_1 \oplus}, \Gamma_{H_1 \otimes}\}$;

- (ii) имеют возможность исполнять роль любого из двух объектов, приведенных для каждого из них выше в фигурных скобках.

В дальнейшем в целях сокращения настоящего изложения будем обозначать соответствующую математику только через пару входящих в нее изоморфных алгебр, из которых однозначно следует список всех полиморфных объектов собственно математики. В частности, примитивную математику будем обозначать так: $M_L = \{E_1 \cong H_1\}$.

П.3.Позиционное счисление с целочисленным основанием

Перейдем теперь от языка примитивного к построению языка компактного. Начнем с допустимых преобразований в структуре языка примитивного. Допустимыми будут считаться только те преобразования, которые сохраняют имеющийся изоморфизм, т. е. осуществляемые с помощью операций, определенных в самой алгебре, например, E_1 . Поскольку, во-первых, собственно слова – элементы примитивного языка – состоят из аддитивного набора символов, во-вторых, слова обрабатываются в алгебре E_1 аддитивными операциями и, в-третьих, данные операции обладают свойством ассоциативности (сочетательным свойством), которое позволяет употреблять или отбрасывать скобки в любом месте выражения, поэтому исходный изоморфизм не нарушится, если

а) каждый элемент, т. е. каждое слово, например, $N_i = \underbrace{111 \dots 1}_i$, представим в виде соответствующего ему рекурсивно-инкрементного выражения:

$$N_i = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_i,$$

здесь i – это некоторое целое непустое число, т. е. количество символов «1»;

б) в данном рекурсивно-инкрементном выражении будем использовать только скобки для указания способов сочетания тех или иных символов (вместе со знаками операции между ними) в группы.

Возьмем из множества $\aleph$ элемент произвольной длины t и обозначим его N_t , т. е. $N_t = \underbrace{111 \dots 1}_t$, здесь $N_t \in \aleph$, а t , как уже оговаривалось, является

всего лишь краткой записью (например, в десятизначном счислении) выбранного слова N_t и фактически является эквивалентом полной записи слова N_t . В рекурсивно-инкрементной форме данное слово примет следующий вид:

$$N_t = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1}_t, \quad (3.1)$$

где под горизонтальной скобкой будет находиться одно из (десятичных) чисел $0, 1, 2, 3, \dots$, указывающих количество символов «1» в данной операции. Сочетая скобками в (3.1) все символы, начиная с крайнего левого, в группы по n штук, получим

$$N_t = \underbrace{\left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right) \oplus \dots \oplus \left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right) \oplus \left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{m_0} \right)}_t. \quad (3.2)$$

Последней группой, обозначенной в выражении (3.2) параметром m_0 , будет конкатенация из m_0 символов «1», и ею будет считаться такая, в которой $m_0 < n$, т. е. и пустая в том числе. Если она пуста и перед ней не будет группы, полностью укомплектованной символами «1» в количестве n штук, то все число является нулем: $N_t = 0$. Практическое исполнение данного алгоритма будет следующим. Начиная с крайнего левого символа, сочетаем символы в группу конкатенаций по n штук в каждой. Если в последней группе количество символов будет меньше n штук, то данной группе присваиваем параметр m_0 , а его значением будет количество «существенных» (или имеющих значение) элементов в данной группе. Если в последней группе количество символов будет равным в точности числу n , то выражение (3.2) будет иметь вид

$$N_t = \underbrace{\left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right) \oplus \dots \oplus \left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right) \oplus \left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right)}_t.$$

В этом случае добавим в него пустой элемент $\emptyset$. С учетом $N_t = N_t \oplus \emptyset$, получим

$$N_t = \underbrace{\left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right) \oplus \dots \oplus \left(\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n \right) \oplus \underbrace{(\emptyset)}_{m_0}}_t,$$

т. е. в такой ситуации присвоим параметр m_0 группе, состоящей из одного пустого элемента, а численным значением данного параметра будет ноль. Сгруппировав данным способом все символы слова N_t , мы получим, что в последней группе (3.2) для любого $t, N_t \in \aleph$ всегда будет выполняться неравенство $m_0 < n$, а содержательно в последней группе будет находиться или пустой элемент или совокупность от одного до $n - 1$ символов «1».

По построению, в множестве $\aleph$ существуют такие слова N_t и N_s , в которых соответственно количество t и s символов «1» не совпадает (хотя по определению, в нем вообще не содержится двух слов с одинаковым количеством

символов «1», но в данном случае для нас важно, что они именно существуют). Нетрудно показать, что все слова из множества $\aleph$ можно представить в виде совокупности из n непересекающихся множеств (классов эквивалентности), отличающихся друг от друга значением параметра m_0 , т. е. количеством символов «1» в остатке после процедуры группирования всех символов по правилу (3.2). В одном классе будут все слова, в последней группе которых не будет ни одного символа «1», т. к. группа будет пустая, поэтому для всех слов этого класса $m_0 = 0$. В следующем классе будут все слова, в последней группе которых будет только один символ «1», поэтому для всех слов этого класса $m_0 = 1$. В третьем классе будут все слова, в последней группе которых будет только два символа, поэтому для всех слов этого класса $m_0 = 2$, и т. д. В последнем – все слова в последней группе будут содержать только $n - 1$ символов, поэтому для них $m_0 = n - 1$.

Отсюда следует, что каждому из полученных классов, характеризующихся своим индивидуальным значением параметра m_0 : $0 \leq m_0 \leq n - 1$, взаимно однозначно соответствующим количеству участвующих в конкатенации символов «1», может быть биективно сопоставлена одна из n различных букв $0 \leq a_0 \leq n - 1$ в некотором алфавите A_0 . Определим, что алфавитом A_0 является упорядоченный набор (упорядоченная «энка») из n следующих букв $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Обозначив в конкатенации (3.2)

$$\underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n = \Gamma_1 \text{ и } \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{m_0} = m_0,$$

получим

$$N_t = \underbrace{\Gamma_1 \oplus \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_1 \oplus m_0}_t. \quad (3.3)$$

Теперь в (3.3) сгруппируем Γ_1 по n штук. Причем действовать будем точно так, как и в предыдущем случае: если последняя из вновь полученных групп будет содержать n элементов, то между ней и группой, обозначенной m_0 поместим пустую группу. Получим для N_t выражение

$$N_t = \underbrace{(\underbrace{\Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_1}_n) \oplus \dots \oplus (\underbrace{\Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_1}_n) \oplus (\underbrace{\Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_1}_{m_1}) \oplus m_0}_t, \quad (3.4)$$

где в последней из новых групп получается остаток в количестве m_1 символов « Γ_1 », причем данная группа, как уже было оговорено, может оказаться и пустой. С учетом того, что символ « Γ_1 » является сокращением записи результата конкатенации n символов «1», по аналогии с вышеизложенным, можно привести цепочку рассуждений и показать, что для любых возможных количеств m_1 : $0 \leq m_1 \leq n - 1$, участвующих в конкатенации символов « Γ_1 »,

может быть биективно сопоставлена одна из n различных букв $0 \leq a_1 \leq n - 1$ в алфавите A_1 .

Обозначив теперь имеющиеся в (3.4)

$$\underbrace{\Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_1}_n = \Gamma_2 \text{ и } \underbrace{\Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_1}_{m_1} = m_1, \text{ получим}$$

$$N_t = \underbrace{\Gamma_2 \oplus \Gamma_2 \oplus \dots \oplus \Gamma_2 \oplus m_1 \oplus m_0}_t. \quad (3.5)$$

Продолжая аналогичным способом повторять рекурсивно перегруппировку с учетом возможного появления пустого элемента и ввод новых обозначений, мы можем для произвольно выбранного параметра t преобразовать слово N_t (3.1) к виду

$$N_t = \underbrace{m_k \oplus \dots \oplus m_i \oplus \dots \oplus m_2 \oplus m_1 \oplus m_0}_t \quad (3.6)$$

или, отбросив скобку, индекс под которой указывает количество символов «1», входящих в данное выражение (а он один и тот же и в (3.1) и в (3.6)), к виду:

$$N_t = m_k \oplus \dots \oplus m_i \oplus \dots \oplus m_2 \oplus m_1 \oplus m_0. \quad (3.7)$$

Последнее выражение характеризуется тем, что все входящие в него члены $m_0, m_1, \dots, m_i, \dots, m_k$ являются числовыми параметрами и отличаются друг от друга, исходя из вышеизложенного правила сочетания групп, и при этом в нем ни один член справа после m_k не может отсутствовать, а следовательно, они составляют упорядоченную последовательность и отличаются друг от друга своим местоположением – позицией в данной последовательности.

Подчеркивая аддитивность алгебры E_1 , будем обозначать (вместо современной сокращенной альтернативы: $l \cdot p = q$) операцию $\oplus$ объединения (конкатенацию) l слов одинаковой длины p в одно слово длины q так:

$$\Sigma_l(p) \equiv \underbrace{p \oplus \dots \oplus p}_l = q,$$

здесь $p \leq q$ при $l = 1, 2, \dots$; а также $q = 0$ при $l = 0$, т. е. $\Sigma_0(p) = 0$.

Действительно, если количество сочетаемых аргументов равно нулю (т. е. операция является пустой), то и результат конкатенации тоже равен нулю, и при этом в качестве аргумента может быть все, что угодно. С учетом введенных обозначений, а также того, что любой символ « Γ_i » является сокращением записи конкатенации определенного количества символов «1», каждый параметр m_i из (3.7) может быть представлен следующим образом:

$$m_0 = \sum_{m_0}(1), \quad m_1 = \sum_{m_1}(\sum_n(1)), \quad m_2 = \sum_{m_2}(\sum_n(\sum_n(1))), \dots$$

Вследствие ассоциативности используемой операции параметры примут вид:

$$m_0 = \sum_{m_0}(1), \quad m_1 = \sum_{m_1} \sum_n(1), \quad m_2 = \sum_{m_2} \sum_n \sum_n(1), \dots \quad (3.8)$$

По аналогии с вышеизложенным, можно привести цепочку рассуждений и показать, что для любых возможных значений параметра или любых возможных количеств m_i : $0 \leq m_i \leq n - 1$, участвующих в конкатенации символов «1» в (3.8), может быть биективно сопоставлена одна из n различных букв $0 \leq a_i \leq n - 1$ в алфавите A_i .

Например, в группе, обозначенной m_0 , может находиться только один из членов последовательности

$$0 \equiv \sum_0(1); \quad 1 \equiv \sum_1(1); \quad 1 \oplus 1 \equiv \sum_2(1); \quad \dots; \quad \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_{n-1} \equiv \sum_{n-1}(1). \quad (3.9)$$

Здесь члены последовательности упорядочены по числу символов, участвующих в конкатенации. Поэтому каждому ее члену (в соответствие с индексом под знаком суммирования) можно взаимно однозначно сопоставить одну из букв $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$ алфавита A_0 именно в том порядке, как они приведены здесь. По аналогии с десятичным счислением назовем A_0 алфавитом Единиц.

Нетрудно заметить, что в группе, обозначенной m_1 , может находиться только один из членов последовательности

$$\sum_0 \sum_n(1); \quad \sum_1 \sum_n(1); \quad \sum_2 \sum_n(1); \quad \dots; \quad \sum_{n-1} \sum_n(1) \quad (3.10)$$

Точно так же, в более общем случае и в группе, обозначенной m_i , где $i > 0$, может находиться только один из членов последовательности

$$\begin{aligned} & \sum_0 \underbrace{\sum_n \dots \sum_n}_{i} \sum_n(1); \quad \sum_1 \underbrace{\sum_n \dots \sum_n}_{i} \sum_n(1); \quad \sum_2 \underbrace{\sum_n \dots \sum_n}_{i} \sum_n(1); \dots; \\ & \sum_{n-1} \underbrace{\sum_n \dots \sum_n}_{i} \sum_n(1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из последних трех выражений видно, что различным параметрам $m_0, m_1, \dots, m_i, \dots, m_k$, членам конкатенации (3.7), соответствует различное количество внутренних знаков суммирования (которыми являются все, кроме левого крайнего), т. е. различные члены обладают различным «инкрементным весом». В то же время все n членов одного произвольного параметра m_j из последовательности $m_0, m_1, \dots, m_i, \dots, m_k$ обладают одинаковым «инкрементным весом».

Поскольку

а) различные члены конкатенации (3.7) содержат различные (нижние) индексы при символе m , и им биективно соответствует различное количество внутренних знаков суммирования в выражении (3.11), согласно его параметру i ;

б) порядок увеличения индекса в членах конкатенации (3.7) определяется порядком следования (или местом расположения) в этом выражении его члена справа налево без пропусков позиции;

в) для каждого члена m_j конкатенации (3.7) существует всего n различных значений (включая ноль), обладающих при этом одним и тем же «инкрементным весом»;

то для обозначения всех возможных значений каждого m_j из $m_1, \dots, m_i, \dots, m_k$ в (3.7) будем также использовать n -ку различных букв $(0, 1, 2, \dots, n-1)$, упорядоченных от 0 до $n-1$, для любого алфавита A_i из алфавитов $A_1, \dots, A_i, \dots, A_k$, т. е. ту же самую n -ку и точно также упорядоченную, как и в алфавите Единиц A_0 . Продолжая аналогию с десятичным счислением, назовем A_1 алфавитом Десятков, при этом каждая из его букв $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ (различаясь написанием символа ее обозначающего) будет иметь свое собственное значение (но при этом все они будут иметь одинаковый «инкрементный вес»), биективно сопоставляемое соответствующему члену последовательности (3.10). Продолжая, назовем A_2 алфавитом Сотен, A_3 алфавитом Тысяч и т. д. В каждом из них все n букв будут различны и упорядочены, а вся n -ка будет биективно связана с упорядоченной последовательностью (3.11) (при соответствующем значении параметра i в последнем).

Таким образом, для обозначения и Единиц, и Десятков, и Сотен, и т. д. будем использовать одну и ту же n -ку букв. Но одна и та же буква b из одинаковых n -ок (т. е. из одной упорядоченной последовательности букв $0, 1, 2, \dots, n-1$) в алфавитах A_s и A_p (где $s \neq p$ и $0 \leq s, p \leq k$) будет иметь различное значение в соответствии с местом расположения индексов s и p внутри последовательности $0, 1, 2, \dots, i, \dots, k$ из (3.7) в полном согласии с общим выражением (3.11), т. е. буква b в разных алфавитах будет обладать различным «инкрементным весом». Если принять соглашение, что между членами в (3.7) всегда необходимо выполнять процедуру конкатенации, даже если она не указывается в явном виде, то для упрощения записи знак операции можно опустить. Тогда, окончательно, произвольному слову

$$N_t = \underbrace{111 \dots 1}_t$$

примитивного языка сопоставим в новом языке запись вида

$$N_t = m_k \dots m_i \dots m_2 m_1 m_0 \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) определяет компактную форму записи любого элемента все того же натурального ряда $\aleph$, который является носителем алгебры

$$E_1 = \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \bar{\rho}, \bar{\delta}, \oplus, \bar{\oplus}, \Gamma_{E_0}, \Gamma_{E_1 \oplus} \rangle,$$

тем самым множеству всех элементов натурального ряда $\aleph$ биективно сопоставляется множество слов-чисел n -значного позиционного счисления $\aleph_n$.

Множество слов $\aleph_n$ получено конструктивным способом, назовем его алгоритмом компактификации в n -значное позиционное счислению и обозначим $K_n(\aleph)$: $K_n(\aleph) \rightarrow \aleph_n$. Включая в алгебру E_1 алгоритм $K_n(\aleph)$, мы тем самым расширяем E_1 . В алгоритме $K_n(\aleph)$ для перехода от отображения произвольного слова примитивного языка к отображению этого слова в компактном виде использовались только конкатенации и их сочетания, а также способ взаимно однозначного отображения всех возможных групп конкатенаций, возникающих в новом языке, на множество (двумерную упорядоченную таблицу, содержащую номер позиции и номер буквы алфавита) обозначений. Поэтому для алгоритма $K_n(\aleph)$ существует ему обратный алгоритм $K_n^{-1}(\aleph_n)$: $K_n^{-1}(\aleph_n) \rightarrow \aleph$ такой, что $K_n^{-1}(K_n(\aleph)) \rightarrow \aleph$. Следовательно, введя в алгебру E_1 , наряду с алгоритмом $K_n(\aleph)$, обратный алгоритм $K_n^{-1}(\aleph_n)$, а также в явном виде множество всех чисел $\aleph_n$ (т. е. в новом формате), мы получим новую алгебру, назовем ее алгеброй $E_1(n)$, в рамках которой с добавлением в нее всех отношений и операций, имеющих место в алгебре E_1 и переформулированных к новой компактной форме выражения элементов натурального ряда $\aleph$ через слова множества $\aleph_n$, будет нам обеспечено корректное применение в расширенной таким способом алгебре $E_1(n)$ и порознь, и одновременно и средств E_1 , и вновь введенных средств $E_1(n)$. Аналогичные преобразования, произведенные для алгебры

$$H_1 = \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \varsigma, \bar{\varsigma}, \bar{\theta}, \otimes, \bar{\otimes}, \Gamma_{H_0}, \Gamma_{H_1 \otimes} \rangle,$$

позволят получить алгебру $H_1(n)$, содержащую, как и в вербальной алгебре $E_1(n)$, множество элементов T_n , биективно соответствующее множеству T , геометрический алгоритм композиции членов линейно упорядоченного (позиционного) множества $K_{L,n}(T)$: $K_{L,n}(T) \rightarrow T_n$ и ему обратный алгоритм декомпозиции $K_{L,n}^{-1}(T_n)$: $K_{L,n}^{-1}(T_n) \rightarrow T$, а также все отношения и операции, переформулированные к новой компактной форме членов множества T_n , сгруппированных алгоритмом $K_{L,n}(T)$ из элементов множества T .

Структура вновь полученной математики $M_L(n)$ будет следующей:

$$M_L(n) = \langle \{E_1(n) \cong H_1(n)\}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{A}_n\} \rangle.$$

Здесь

$$E_1(n) = \left\langle \langle E_1 \rangle, K_n, K_n^{-1}, \aleph_n, \emptyset_n, 1_n, \delta_n^0, \delta_n, \rho_n, \overline{\rho_n}, \overline{\delta_n}, \oplus_n, \overline{\oplus_n}, \Gamma_{E1n}, \Gamma_{E1n\oplus} \right\rangle -$$

(вербальная) алгебра, содержащая алгебру

$$E_1 = \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \overline{\rho}, \overline{\delta}, \oplus, \overline{\oplus}, \Gamma_{E0}, \Gamma_{E1\oplus} \rangle$$

с некомпактифицированным носителем $\aleph$;

компактный носитель $\aleph_n$;

список констант, операций и отношений

$$\emptyset_n, 1_n, \delta_n^0, \delta_n, \rho_n, \overline{\rho_n}, \overline{\delta_n}, \oplus_n, \overline{\oplus_n}, \Gamma_{E1n}, \Gamma_{E1n\oplus},$$

аналогичный соответствующему списку в алгебре E_1 и адаптированный под новый носитель $\aleph_n$;

алгоритм компактификации K_n элементов $\aleph$ в элементы носителя $\aleph_n$ –

$$K_n: K_n(\aleph) \rightarrow \aleph_n;$$

алгоритм декомпактификации K_n^{-1} элементов $\aleph_n$ в элементы $\aleph$ –

$$K_n^{-1}: K_n^{-1}(\aleph_n) \rightarrow \aleph, \text{ для которого выполняется}$$

$$\text{условие: } K_n^{-1}(K_n(\aleph)) \rightarrow \aleph;$$

$$H_1(n) = \left\langle \langle H_1 \rangle, K_{\Gamma,n}, K_{\Gamma,n}^{-1}, T_n, a_{n,0}, L_n, \theta_n^0, \theta_n, \varsigma_n, \overline{\varsigma_n}, \overline{\theta_n}, \otimes_n, \overline{\otimes_n}, \Gamma_{H1n}, \Gamma_{H1n\otimes} \right\rangle -$$

(мета) алгебра, содержащая алгебру

$$H_1 = \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \varsigma, \overline{\varsigma}, \overline{\theta}, \otimes, \overline{\otimes}, \Gamma_{H0}, \Gamma_{H1\otimes} \rangle \text{ с}$$

некомпактифицированным носителем T ;

компактный носитель T_n ;

список констант, операций и отношений

$$a_{n,0}, L_n, \theta_n^0, \theta_n, \varsigma_n, \overline{\varsigma_n}, \overline{\theta_n}, \otimes_n, \overline{\otimes_n}, \Gamma_{H1n}, \Gamma_{H1n\otimes},$$

аналогичный соответствующему списку в алгебре H_1 и адаптированный под новый носитель T_n ;

алгоритм компактификации $K_{\Gamma,n}$ элементов T в элементы T_n –

$$K_{\Gamma,n}: K_{\Gamma,n}(T) \rightarrow T_n;$$

алгоритм декомпактификации $K_{\Gamma,n}^{-1}$ элементов T_n в элементы T –

$$K_{\Gamma,n}^{-1}: K_{\Gamma,n}^{-1}(T_n) \rightarrow T, \text{ для которого выполняется}$$

$$\text{условие: } K_{\Gamma,n}^{-1}(K_{\Gamma,n}(T)) \rightarrow T;$$

$$\{\mathfrak{U}\} = \{\mathfrak{M}, \mathbb{k}_0, \mathbb{k}_1, \Delta^0, \Delta, P, \overline{P}, \overline{\Delta}, \Psi, \overline{\Psi}, \Gamma_L, \Gamma_{L+}\} - \text{список полиморфных}$$

объектов для всех констант, операций и отношений в алгебрах E_1 и H_1

с некомпактифицированными носителями;

$$\{\mathfrak{U}_n\} = \{\mathfrak{M}_n, \mathbb{k}_{n,0}, \mathbb{k}_{n,1}, \Delta_n^0, \Delta_n, P_n, \overline{P_n}, \overline{\Delta_n}, \Psi_n, \overline{\Psi_n}, A, \overline{A}, \Gamma_{Ln}, \Gamma_{Ln+}\} -$$

список полиморфных объектов для всех констант, операций, отношений

и алгоритмов в алгебрах с компактными носителями $\aleph_n$ и T_n ,

среди которых

$$\mathfrak{M}_n, \mathbb{k}_{n,0}, \mathbb{k}_{n,1}, \Delta_n^0, \Delta_n, P_n, \overline{P_n}, \overline{\Delta_n}, \Psi_n, \overline{\Psi_n}, \Gamma_{Ln}, \Gamma_{Ln+} - \text{список полиморфных}$$

объектов для всех констант, операций и отношений, аналогичный

списку объектов в математике M_L , но адаптированных под новые компактные носители соответствующих алгебр;

$A, \bar{A}$ – новые полиморфные объекты, определяющиеся через соответствующие объекты алгебр $E_1(n)$ и $H_1(n)$, следующим образом:

$$A = \{K_n, K_{G,n}\}; \quad \bar{A} = \{K_n^{-1}, K_{G,n}^{-1}\}.$$

В итоге мы получим новую математику $M_L(n)$ или новое алгебро-геометрическое отображение, в рамках которой возможно корректное применение и порознь, и одновременно и средств M_L и вновь введенных средств $M_L(n)$. Последнее утверждение можно интерпретировать (верифицировать, проверить) на любой из рассматриваемых нами геометрических моделей: на векторном или скалярном, замкнутом или незамкнутом контуре.

Примечательная особенность построенного позиционного счисления в том, что способ упорядочивания всех слов нового языка будет принципиально иной, нежели лексикографический, который используется обычно для упорядочивания слов в словаре, например, русского языка (приложение П.8).

П.4. Конструктивная математика шумеров

Приведем способ создания древними шумерами специального языка, исследование внутренних закономерностей которого привело впоследствии к появлению научных знаний, получивших название «математики».

П.4.1. Корреляция метрик разнородных величин

Рассмотрим геометрию на плоскости.

При повороте вокруг центра окружности радиус замечает плоскую фигуру – сектор, который характеризуется тремя параметрами: центральным углом, длиной дуги и площадью. В общем случае в результате такого движения радиуса, осуществляющего раз за разом полные обороты, могут быть получены, наряду с множеством всех дуг, два множества, представляющие для нас интерес в дальнейшем: множество всех углов и множество всех площадей секторов. В силу принадлежности каждого угла и каждой площади одному и тому же сектору, существует возможность установить между элементами множеств взаимно-однозначное соответствие, биекцию, при котором каждому элементу из множества всех углов сопоставлен один элемент из множества всех площадей и, при этом, каждому элементу из множества всех площадей сопоставлен один элемент из множества всех углов. Воспользуемся данным фактом для построения единой системы метризации неограниченно изменяющихся величин площадей и углов, формируемых плоскими геометрическими объектами.

Пусть задана окружность некоторого радиуса R . Впишем в нее правильный n -угольник $P_n(R)$, разделив окружность на n равных частей. Соединим вершины полученного многоугольника $P_n(R)$ с центром окружности. В результате произведенной триангуляции¹⁴ T_{Pn} , назовем ее тривиальной, многоугольника $P_n(R)$ вся его площадь S_Σ и полный центральный угол U_Σ рассекаются на n равных частей. Фактически это внутренний инвариант геометрии, в которой имеют место рассматриваемые операции на плоскости при любом выборе радиуса R описанной окружности.

Элементом сети триангуляции T_{P_n} правильного n -угольника $P_n(R)$ является равнобедренный треугольник $\Delta(1/n, R)$, который будет выполнять роль сектора, упомянутого выше. Именно его площадь S_Δ и угол Y_Δ при его вершине составляют $1/n$ часть соответственно всей площади S_Σ и полного угла Y_Σ многоугольника $P_n(R)$.

Выше была приведена математика $M_L(n) = \{E_1(n) \cong H_1(n)\}$, основанная на двух изоморфных алгебрах $E_1(n)$ и $H_1(n)$. Было отмечено, что математика $M_L(n)$ позволяет ввести целочисленную аддитивную метрику в данной геометрической модели для одинаковых хорд, соединяющих вершины правильного n -угольника. Причем и математика, и целочисленная метрика для отрезков были получены исходя из определения отрезков, согласно которому композицией отрезков является отрезок. В то же время, по определению, и композицией площадей является площадь, и композицией углов является угол¹⁵. Например, на основании определения угла, в той же самой геометрической модели возможно построение метаотображения, алгебра $H_1(n, Y)$ которого будет изоморфной алгебре $H_1(n)$. Фактически в последней следует лишь заменить константу длины L на константу угла Y_Δ и изменить интерпретацию всех операций соответствующим образом. Алгебра $E_1(n, Y)$ вербального отображения, в сравнении с $E_1(n)$, формально останется без изменения, необходимо лишь в последней изменить интерпретацию ее ресурсов. Тогда во вновь полученной математике $M_Y(n, Y) = \{E_1(n, Y) \cong H_1(n, Y)\}$ нетрудно также ввести целочисленную аддитивную метрику, соответствующую данной геометрической модели с конечным множеством одинаковых (центральных) углов, между вершинами правильного n -угольника в единицах угла Y_Δ . Аналогично, можно получить математику $M_S(n, S) = \{E_1(n, S) \cong H_1(n, S)\}$ с изоморфными алгебрами $E_1(n, S)$ и $H_1(n, S)$, если в последней использовать константу меры площади S_Δ и в обеих изменить соответствующим образом интерпретацию всех операций и отношений. И тогда в данной математике также можно ввести целочисленную метрику площадей с единицей площади S_Δ . Поскольку между мерой угла Y_Δ и мерой площади S_Δ существует биективное соответствие $Y_\Delta \Leftrightarrow S_\Delta$, т. е. угол, замещающий площадь S_Δ , являющуюся мерой площади, в многоугольнике $P_n(R)$, в точности является мерой угла Y_Δ , то метаалгебры $H_1(n, Y)$ и $H_1(n, S)$ можно рассматривать как совершенно эквивалентные с точностью до интерпретации константы и операций (отношений, алгоритмов) над ними, а вербальные алгебры $E_1(n, Y)$ и $E_1(n, S)$ – как совершенно (или с точностью до единицы измерения, определяемой в соответствующей метаалгебре) эквивалентные: $E_1(n, Y) \equiv E_1(n, S)$. Из этого следует, что, построив для двух новых типов геометрических объектов две пары изоморфных аддитивных алгебр $\{E_1(n, S) \cong H_1(n, S)\}$ и $\{E_1(n, Y) \cong H_1(n, Y)\}$, мы с помощью только одной из них можем получить коррелированную метрику сразу для двух разнородных целочисленных величин (площадей и углов), которыми измеряются геометрические объекты. При этом их метрики будут заведомо

коррелированы в рамках одного и того же n -значного позиционного счисления, носителя аддитивной алгебры: или из алгебры $E_1(n, Y)$, или из алгебры $E_1(n, S)$.

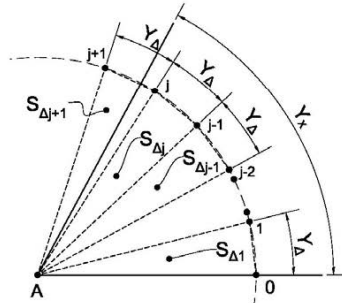
Данный факт позволил шумерам на концептуальном уровне решить задачу сокращения количества независимых эталонных единиц измерения и количества минимально необходимых изоморфных алгебр. Таким образом, исходя из соответствия $Y_\Delta \Leftrightarrow S_\Delta$ и возможности замены одного из них другим, за единицу угловых величин, т. е. за один угловой градус (у. г.), они приняли угол, который отсекает $1/n$ -ая часть площади правильного многоугольника $P_n(R)$ или площадь S_Δ одного из n одинаковых треугольников $\Delta(1/n, R)$. В силу этого измерение произвольного угла Y_x они заменили измерением площади S_x , отсекаемой углом Y_x от правильного многоугольника. Содержательно, если известен метод метризации площадей, то величину площади S_x можно вычислить через суммирование единичных площадей S_Δ (Рис.3а) и выразить ее числом $\aleph(m)$, из множества чисел n -значного позиционного счисления $\aleph_n = \{0, 1, 2, \dots\}$. Но тогда и величина угла Y_x в выше оговоренных единицах измерения не требует больше никакого измерения, она будет равной в точности $\aleph(m)$ (угловых градусов).

Не вызывает сомнения, что идея сокращения независимых единиц измерения может быть только во благо. Но все же подобного рода метрика в математике воспринимается, скорее, как средство счета совокупности цельных одинаковых объектов, в отличие от «существенно» метрической системы, позволяющей измерять не только изменяющиеся совокупности (целых) отдельных однородных объектов, но и изменяющиеся по величине одиночные (целые) объекты определенного рода, будь то угол или площадь некоторой геометрической фигуры, а также соразмерять друг с другом различные единицы измерения (например, метры с футами). В связи с этим шумеры развили идею (Рис.3а) метризации произвольных углов (при условии, что способ измерения площадей известен) до такой степени, что в рамках той же концепции стало возможным измерять произвольный угол с любой заданной наперед точностью (Рис.3б) и выражать не только целым, но и дробным числом, однако числом не произвольного счисления, а только n -значного позиционного. С этой целью они предложили использовать упорядоченную совокупность геометрических фигур, построенных конструктивным способом, с площадями, составляющими убывающую прогрессию

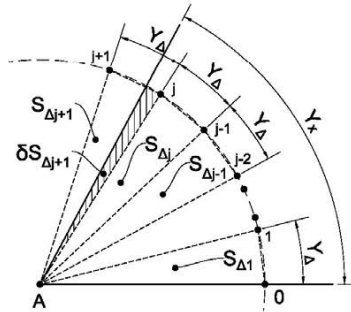
$$S_r, S_{r-1}, \dots, S_{t+1}, S_t, S_{t-1}, \dots, S_2, S_1, S_0,$$

каждый член которой представляет сумму из n слагаемых своего ближайшего соседнего члена справа и в которой в качестве эталонной (единичной) выбрана площадь S_t , т. е. $S_t = S_\Delta$, здесь r, t – числа десятичного счисления (используемого в качестве линейно упорядоченного множества различных

символов), причем число r определяется количеством полных оборотов радиуса или полных площадей многоугольника $P_n(R)$, которое может иметь место в общем случае определения величины искомого угла.



а) количество одинаковых углов Y_{Δ} внутри угла Y_x равно такому же количеству одинаковых треугольников площадью S_{Δ} ; величина угла Y_x определяется с точностью до единичного угла $Y_{\Delta t} = Y_{\Delta} = 1$ через подсчет количества площадей $S_{\Delta j} = S_{\Delta}$; $Y_{\Delta} \Leftrightarrow S_{\Delta}$; $S_{\Delta 1} = \dots = S_{\Delta j-1} = S_{\Delta j} = S_{\Delta j+1} = S_{\Delta}$.



б) чтобы определить величину угла Y_x с большей точностью необходимо измерить заштрихованную часть угла, которой соответствует часть $\delta S_{\Delta j+1}$ площади треугольника $S_{\Delta j+1}$.

Рис. 3. Измерение произвольно заданного угла.

Содержательно все члены прогрессии могут быть выражены через определенные суммы ее члена с наименьшей площадью, т. е. фигуры с площадью S_0 :

$$[S_1] = \sum_n(1) \cdot [S_0]; \quad [S_2] = \sum_n(1) \cdot [S_1] = \sum_n \sum_n(1) \cdot [S_0];$$

$$[S_3] = \sum_n(1) \cdot [S_2] = \sum_n \sum_n \sum_n(1) \cdot [S_0]; \dots$$

Поэтому привлеченные средства потенциально позволяют отобразить результат измерения отсекаемой углом Y_x площади S_x в единицах площади S_0 , определяемой из необходимости достижения наперед заданной точности

измерения относительно S_t . А конкретная реализация данного потенциала будет следующей.

Измеряя площадь S_x наложением на нее максимально возможного количества площадей $S_r, S_{r-1}, \dots, S_1, S_0$ в указанном порядке, результат можно выразить в виде:

$$S_x[S_0] = j_r \cdot [S_r] + \dots + j_{t+1} \cdot [S_{t+1}] + j_t \cdot [S_t] + j_{t-1} \cdot [S_{t-1}] + \dots \\ \dots + j_1 \cdot [S_1] + j_0 \cdot [S_0],$$

где $0 \leq j_r, \dots, j_{t+1}, j_t, j_{t-1}, \dots, j_1, j_0 < n$ – это некоторый набор символов (цифр) из n -значного алфавита (n -значного позиционного счисления). С учетом приведенной прогрессии тот же результат можно переписать следующим образом:

$$S_x[S_0] = (j_r \cdot n^r + \dots + j_{t+1} \cdot n^{t+1} + j_t \cdot n^t + j_{t-1} \cdot n^{t-1} + \dots \\ \dots + j_1 \cdot n^1 + j_0 \cdot n^0) \cdot [S_0]$$

или в свернутой форме числа n -значного позиционного счисления:

$$S_x[S_0] = (j_r \dots j_{t+1} j_t j_{t-1} \dots j_1 j_0) \cdot [S_0] = \aleph(k) \cdot [S_0].$$

Здесь $n^r, \dots, n^{t+1}, n^t, n^{t-1}, \dots, n^1, n^0$ – инкрементный вес позиции в числе данного счисления; $j_r \dots j_{t+1} j_t j_{t-1} \dots j_1 j_0 = \aleph(k)$ и $\aleph(k) \in \aleph_n$. Чтобы теперь указать единичный член S_t из членов приведенной прогрессии площадей, необходимо выделить запятой справа соответствующую позицию целого числа и заменить в последнем выражении S_0 на S_t , члены, которые являются не числами, а единицами измерения:

$$S_x[S_t] = (j_r \dots j_{t+1} j_t j_{t-1} \dots j_1 j_0) \cdot [S_t].$$

Таким образом, численный результат измерения площади в заданных единицах будет выглядеть так:

$$j_r \dots j_{t+1} j_t j_{t-1} \dots j_1 j_0 = \aleph'(k).$$

Число $\aleph'(k)$ принадлежит множеству чисел $\aleph'_n$, которое является расширением множества $\aleph_n$ за счет введения знака запятой в алфавит последнего. Определив данным способом величину площади с заданной точностью, мы можем, следуя шумерам, выразить и величину угла с той же самой точностью.

Результатом измерения, проведенного таким способом, будет величина угла, представленная тем же числом:

$$Y_x = \aleph'(k)(y.z.) = (j_r \dots j_{t+1} j_t j_{t-1} \dots j_1 j_0)(y.z.).$$

Данная концепция получила свое развитие в метрической системе математиков древних шумер, для чего им потребовалось дополнить ее еще некоторыми деталями. В частности, необходимо было указать конструктивные средства (инструменты и процедуры) для

- соразмерения площадей, по крайней мере, для определения меры S_Δ в единицах площади;
- построения правильного n -угольника, т. е. деления окружности на n равных частей;
- деления отрезка (радиуса) на n равных частей.

Все вместе это входит в нормативную базу конкретной конвенции изоморфизма.

П.4.2. Конвенция изоморфизма шумеров

В дальнейшем все геометрические построения осуществляются циркулем и линейкой. Данный способ гарантированно обеспечит конструктивность исследуемых объектов геометрии.

Как известно, площади двух геометрических объектов сравнивают, накладывая контуры одного на контуры другого. Наиболее удобно такую процедуру выполнять при сравнении прямоугольников. К тому же из двух частей прямоугольника, имеющих общей стороной его диагональ, нетрудно составить равнобедренный треугольник, а любой равнобедренный треугольник, разделив пополам высотой, можно перестроить в прямоугольник. Будем называть n -частичным отрезок, состоящий из n равных частей, равенство которых устанавливается одним и тем же раствором циркуля (и только циркуля). Введем обозначение $\Delta 345$ для треугольника со сторонами, представляющими 3-х, 4-х и 5-ти частичные отрезки, каждая часть которых равна некоторому выбранному эталону длины D .

Решение задачи построения единой метрики для определения величин углов и площадей равнобедренных треугольников достигается выбором треугольника $\Delta 345$ в качестве измерительного инструмента¹⁶ и аддитивной алгебры, носителем которой является позиционное счисление с основанием шестьдесят ($n = 60$), для отображения в символьном виде результатов измерения.

Приведем аргументы, свидетельствующие в пользу выбора данных средств.

Для начала сделаем некоторые геометрические построения. Возьмем прямолинейный шестичастичный отрезок, добавив последовательно к отрезку D еще пять, ему равных, и обозначим его $AbcdefG$: заглавными буквами – его концы, прописными – внутренние границы его одинаковых частей. Из точки A , как из центра, восстановим циркулем окружность радиусом Af , аналогично, из точки G – окружность радиусом Gb . Оба радиуса – пятичастичные отрезки. Построенные окружности пересекутся в двух точках M и N , соединим их с помощью линейки. Отрезок MN пересечет шестичастичный отрезок $AbcdefG$ в точке d и разделит его на два трехчастичных $Abcd$ и $defG$, каждый из которых можно использовать в качестве катета в паре с одним из катетов Md или dN для построения прямоугольного треугольника. Всего возможны четыре комбинации треугольников с одной из гипотенуз: AM, AN, GM, GN . Каждый из них будет $\Delta 345$. Важность результата так подробно описанной процедуры в том, что условие построения (таким способом) четырех $\Delta 345$ ограничивает используемую геометрию, которая заведомо не выходит за рамки евклидовой. С другой стороны, из невозможности их построения следует ничтожность всех нижеследующих доводов. Это и будет первым аргументом.

Во-вторых. Данный треугольник содержит все необходимые элементы для деления окружности на 60 равных дуг. В частности, имеется эталонный отрезок D и прямой угол, к вершине которого сходятся два эталонных отрезка. Если из вершины прямого угла восстановить окружность радиусом D , то катеты, сходящиеся в центре окружности, позволят без труда разделить окружность на четыре равных дуги, т. е. построить правильный четырехугольник (квадрат). Как известно, построение правильного шестиугольника вообще не требует ортогональных диаметров, достаточно иметь только начальную точку на дуге и радиус – им в данной окружности является все тот же отрезок D . Чтобы разделить данную окружность на пять частей (Рис.4), необходимо сначала один из ортогональных радиусов D (а они уже расположены вдоль катетов данного треугольника), например, $AG = D$ продолжить до (второго) пересечения с окружностью в точке F и разделить $AF = D$ (точка A – это центр окружности) пополам, чтобы получить точку H . Затем из точки H построить вспомогательную окружность радиуса HE , где точка E является конечной точкой радиуса AE , второго из двух изначально заданных ортогональных радиусов. Последняя из построенных окружностей пересечет радиус AG в точке K .

Теперь из точки E радиусом EK пересекаем заданную окружность радиуса D ; длина дуги от точки пересечения до точки E является в точности одной пятой частью полной длины заданной окружности. Комбинируя приведенные способы деления окружности на 6, 4 и 5 равных частей, возможно построить правильный многоугольник, наибольшее число вершин которого будет равно шестидесяти. Число его вершин не изменится (все вновь получаемые вершины совпадут с уже имеющимися), если добавить еще и известные из евклидовой

геометрии способы деления окружности на 3 и 10 равных частей (тривиальные бисекции, т. е. способы деления на 2^k частей, кроме 2^2 , не рассматриваются), поэтому их без ущерба можно проигнорировать.

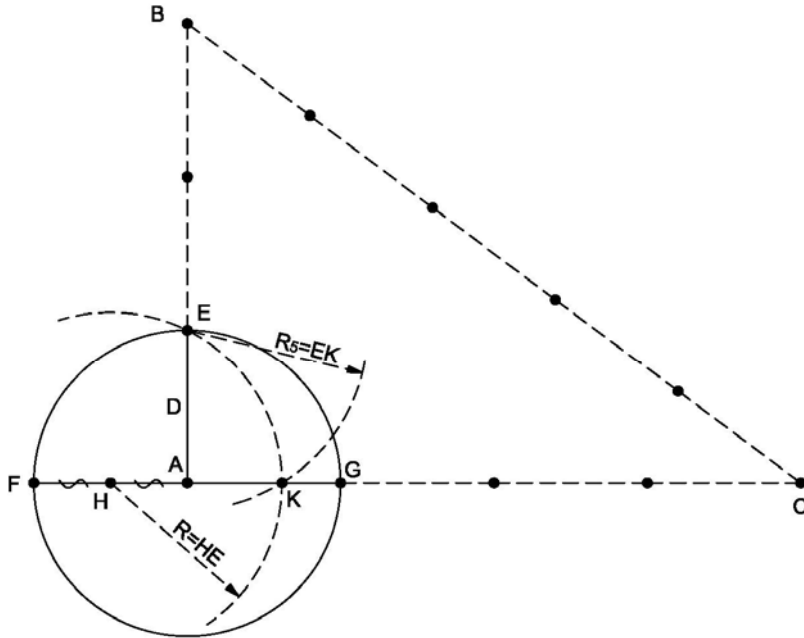


Рис.4. К процедуре деления окружности на пять равных частей: $\triangle ABC = \triangle 345$;
 $AE = AG = AF = D$; $FH = AH$; $R_5 = EK$ - сторона правильного пятиугольника.

В-третьих. С помощью $\triangle 345$ можно **разделить эталонный отрезок D на 60 равных частей**. Еще раз обратимся к Рис.4. Треугольник EFG является равнобедренным по построению. Опустим из вершины G медиану, она пересечет отрезок $AE = D$ (другую медиану этого же треугольника). В точке их пересечения каждая медиана делится в отношении 1: 2. Полученную треть отрезка D делим на четыре (методом бисекций) равные части. Приведенные процедуры позволяют разделить отрезок D на $3 \times 4 = 12$ равных частей. Уникальность свойств $\triangle 345$ в том, что с его помощью можно разделить любую, в том числе и одну двенадцатую, часть еще на пять равных частей. То есть, в конце концов, мы разделим произвольный отрезок с помощью циркуля и линейки ровно на шестьдесят равных частей. Для этого необходимо в имеющемся $\triangle 345$ опустить высоту из вершины прямого угла на гипотенузу и из этой же вершины восстановить окружность радиусом, равным половине 4-х частичного катета. Построенная окружность разделит высоту на две части. Любая половина меньшей из них будет составлять $1/5$ часть отрезка x , которому равна любая из частей 3-х, 4-х и 5-ти частичных сторон $\triangle 345$. В

частности, для деления одной двенадцатой части отрезка D можно построить треугольник, подобный $\Delta 345$, каждая часть которого равна не отрезку D , а одной двенадцатой части D .

В-четвертых. Площадь произвольного прямоугольника может быть вычислена суммированием максимального количества треугольников $\Delta 345$, заполняющих ее. С учетом семейства треугольников ему подобных, результат измерения возможно получить с любой наперед заданной точностью относительно эталонного $\Delta 345$ в рамках 60-значного позиционного счисления. Это достигается следующим образом. Выбираем эталонный отрезок D и ему соответствующий эталонный (с 3-х, 4-х и 5-ти частичными сторонами) треугольник, обозначим его – $\Delta 345_0$, а его площадь – $S_{345/0}$. Определяем семейство треугольников $\Delta 345_{2i}$, как совокупность треугольников, подобных $\Delta 345_0$, с увеличенными в 60^i (где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ – масштаб или коэффициент подобия)¹⁷ раз катетами и с площадями $S_{345/2i}$. Все треугольники семейства можно упорядочить в последовательность по коэффициенту подобия. Между площадями $S_{345/0}$ и $S_{345/2i}$, соответственно эталонного $\Delta 345_0$ и треугольника $\Delta 345_{2i}$ из семейства, выполняется соотношение:

$$S_{345/2i} = \underbrace{\sum_{60} \dots \sum_{60} \sum_{60} (S_{345/0})}_{2i} = \underbrace{\sum_{3600} \dots \sum_{3600} \sum_{3600} (S_{345/0})}_i,$$

кроме того, для площадей соседних членов последовательности $S_{345/2i}$ и $S_{345/2(i-1)}$ будет верно соотношение:

$$S_{345/2i} = \sum_{60} \sum_{60} (S_{345/2(i-1)}) = \sum_{3600} (S_{345/2(i-1)}).$$

Таким образом, в каждом треугольнике текущего масштаба помещается ровно 3600 (или 60 раз по 60) треугольников масштаба на единицу меньшего. Затем из семейства $\Delta 345_{2i}$ выбираем треугольник $\Delta 345_{2t}$, соответствующий заданной точности измерения t (t – фиксированное целое десятичное число с определенным знаком) относительно $\Delta 345_0$. Максимальное количество треугольников $\Delta 345_{2t}$, целиком помещаемое на площади S заданного прямоугольника, определит площадь последнего в единицах площади $S_{345/2t}$. Формируя полученную совокупность треугольников $\Delta 345_{2t}$ в группы по 3600 или по 60 (и продолжая рекурсивно формировать полученные группы в новые группы по 3600 или по 60 соответственно), один и тот же результат измерения площади S может быть представлен в символьном (свернутом числовом) виде:

$$S = \langle [M_p] \dots [M_j] \dots [M_2][M_1][M_0] \rangle \otimes S_{345/2t} \quad (4.1)$$

или

$$S = \{(N_{2p+1})(N_{2p}) \dots (N_{k+1})(N_k) \dots (N_2)(N_1)(N_0)\} \otimes S_{345/2t}, \quad (4.2)$$

где первое выражение – это представление (число) в 3600-значном позиционном счислении, а второе – в 60-значном, причем в обоих случаях числа выражены в единицах площади $S_{345/2t}$. Используемые обозначения такие: в 3600-значном позиционном счислении конечный упорядоченный алфавит (цифры) представляется символами $[0], [1], [2], \dots [3599]$, а в 60-значном – $(0), (1), (2), \dots (59)$; все число, состоящее из набора цифр, в первом случае обрамляется угловыми скобками, во втором – фигурными; символ « $\otimes$ » означает, что справа от него стоит единица измерения.

Из приведенного можно вывести, что каждая цифра $[M_j]$ из (4.1) имеет связь с двумя цифрами, стоящими на вполне определенных позициях выражения (4.2), а именно:

$$[M_j] \Leftrightarrow \sum_{60} |(N_{2j+1})| + (N_{2j}), \quad (4.3)$$

где нижний индекс в знаке суммирования (для удобства записи он, как и все остальные индексы, приведен в десятичном счислении) указывает количество слагаемых в сумме из одного и того же выражения, стоящего внутри прямых скобок (в данном случае одной и той же цифры 60-значного счисления)¹⁸. Следовательно, кроме эффективно исполнимого рекурсивного алгоритма в геометрических операциях при формировании конструктивных геометрических объектов в группы существует алгебраический алгоритм (успешно верифицируемый на геометрической модели), сопоставляющий биективно с помощью аддитивных операций множество чисел одного из рассматриваемых счислений множеству чисел другого. Для выражения чисел (4.1) и (4.2) в единицах $S_{345/0}$ при $t > 0$ в первом числе справа дописывается t Нолей¹⁹ 3600-значного, а во втором – $2t$ Нолей 60-значного счислений; при $t \leq 0$ в первом числе аналогом десятичной запятой (будем обозначать ее также запятой в обоих счислениях) справа отделяется t цифр, а во втором – $2t$ цифр; во всех случаях в каждом числе $S_{345/2t}$ заменяется на $S_{345/0}$. Таким образом, при $t > 0$ выражение (4.1) примет вид числа, состоящего из $t + p + 1$ цифр

$$S = \underbrace{([M_p] \dots [M_j] \dots [M_2][M_1][M_0][0][0] \dots [0])}_{t+p+1} \otimes S_{345/0}, \quad (4.4)$$

выражение (4.2) – числа, состоящего из $2t + 2p + 2$ цифр

$$S = \underbrace{\{(N_{2p+1})(N_{2p}) \dots (N_{k+1})(N_k) \dots (N_2)(N_1)(N_0)(0) \dots (0)\}}_{2t+2p+2} \otimes S_{345/0}, \quad (4.5)$$

при $t \leq 0$ и $p > t$ те же выражения примут соответственно вид

$$S = \langle [M_p] \dots [M_j] \dots [M_t], [M_{t-1}] \dots [M_2][M_1][M_0] \rangle \otimes S_{345/0} \quad (4.6)$$

$$S = \{(N_{2p+1})(N_{2p}) \dots (N_{k+1})(N_k) \dots (N_{2t}), (N_{2t-1}) \dots \dots (N_2)(N_1)(N_0)\} \otimes S_{345/0} \quad (4.7)$$

Итак, окончательный результат измерения площади заданного прямоугольника с наперед заданной точностью t относительно эталонного треугольника $S_{345/0}$ однозначно выражается числом $\{N_{int}\}$ 60-значного позиционного счисления из (4.5) при $t > 0$ или из (4.7) при $t \leq 0$. Результат измерения не изменится, если в $\{N_{int}\}$ отбросить незначащие Нули.

Поскольку нет никаких ограничений для последовательного деления или умножения сторон эталонного $\Delta 345$ на 60, то число t может быть выбрано любым, а, следовательно, ввиду возможности выбрать произвольную величину числа t , площадь прямоугольника $ABCE$ может быть измерена с *любой* заданной наперед точностью. С учетом вышеприведенных обозначений число N_{int} принадлежит множеству $\aleph'_{60}$, т. е. множеству чисел 60-значного позиционного счисления, алфавит которого расширен добавлением символа запятой (носитель алгебры метаотображения, в свою очередь, может быть расширен внесением, например, цветового маркера T'_{60}).

В-пятых. Как известно, площадь прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника, построенного на его катетах, и, наоборот, площадь двух одинаковых прямоугольных треугольников равна площади соответствующего прямоугольника; площадь равнобедренного треугольника может быть представлена алгебраической суммой двух одинаковых прямоугольных треугольников, а поэтому и площадью соответствующего прямоугольника. Отсюда следует, что площадь произвольного равнобедренного треугольника может быть измерена с любой наперед заданной точностью t эталонным треугольником $\Delta 345$ и семейством ему подобных, а результат измерения однозначно представлен числом 60-значного позиционного счисления. Последний факт важен для корреляции метрик углов и площадей, составленных из равнобедренных треугольников внутри правильного многоугольника, потому что совокупности таких равнобедренных треугольников, как совокупности объектов с определенной площадью, расположенных в модели с замкнутым контуром, возможно поставить в биективное соответствие множество одинаковых прямоугольников, выстроенных в незамкнутый контур и

обладающих точно такой же площадью, а именно, каждый из них в качестве двух ортогональных сторон имеет основание, равное половине основания равнобедренного треугольника, и высоту, равную высоте того же треугольника.

П.4.3. Математика шумеров

Геометрия шумеров, не выходя за рамки евклидовой, принципиально отличается от последней, например, отсутствием пятого постулата Евклида. Существуют отличия и в методах доказательства геометрических утверждений. В частности, в их геометрии, восстанавливая нормаль к некоторой линии AB из произвольной точки C , необходимо обусловить данное построение предварительным доказательством существования точки D на линии AB , через которую должна проходить предполагаемая нормаль из точки C , а также, что собственно отрезок CD является высотой некоторого треугольника с основанием, если не AB , то, по крайней мере, расположенном на линии AB . В противном случае вывод о возможности построения нормали к линии AB из произвольной точки C будет некорректным.

Таким образом, можно говорить о существовании наряду с евклидовой и множеством неевклидовых геометрий еще и доевклидовой геометрии – геометрии шумеров, которая хотя и отличается меньшей гибкостью относительно своих последовательниц, но тем не менее она существует и является в достаточной мере информативной. Одно из ее принципиальных отличий – в доказательстве методом сравнения конструктивных объектов, полученных с помощью циркуля и линейки. В частности, возможно исходить из наличия построенных данным способом симметричных объектов, что и было продемонстрировано выше при доказательстве существования $\Delta 345$. Кстати говоря, сравнивая геометрии шумеров и Евклида, можно заметить, что хотя последняя и отличается большей гибкостью, являясь расширением первой, но очень часто в ней приходится специально оговаривать какой из двух симметричных исходов следует выбирать, например, продолжать линию в одном из двух возможных направлений или откладывать угол относительно данного луча в той или иной полуплоскости и т.д. В то же время у шумеров, что наиболее вероятно, существование симметрий – один из основополагающих постулатов, на который и опирается доказательный аппарат.

По причине конструктивности всех объектов в геометрии шумеров отсутствует необходимость в постулировании целой группы аксиом, которую приходится специально вводить в наше время. Речь идет о группе аксиом непрерывности.

Так оба биективных множества T_{60} и N_{60} , носители новых алгебр, перечислимы, а также каждое из них является разрешимым с точностью до не имеющего значения остатка. На основании таких свойств можно утверждать, что, например, при измерении площади произвольного прямоугольника доступен

результат не только с любой наперед заданной точностью, но и совершенно точно. Для доказательства данного утверждения можно построить две монотонные последовательности геометрических объектов – убывающую и возрастающую, – которые должны сходиться к одному пределу, линии, не имеющей в математике никакой значащей площади. И если элементы возрастающей последовательности биективно сопоставляются с последовательно и без пропусков возрастающим числовым рядом, а элементы убывающей – аналогично, но с убывающим числовым рядом, то, поскольку может существовать одно и только одно число, где эти числовые последовательности сходятся (что будет соответствовать одной и только одной границе между двумя соседними положениями измерительного инструмента, т. е. между которыми отсутствует площадь, имеющая метрически существенное значение), поэтому данное число и будет пределом совершенно точного измерения площади геометрического объекта. Вследствие изоморфизма между алгебрами углы также доступны совершенно точному измерению.

Множество всех чисел в алгебре шумеров словарно по построению. По сути это множество условно-целых чисел, так как, в силу перечислимости количества цифр в каждом из них, запись любого числа в форме целого или дробного зависит от выбора масштаба относительно эталонного $\Delta 345$ и при этом любое число всегда может быть выражено в целочисленной форме, т. е. без значащих цифр после запятой. Свойства чисел такого множества были использованы в наше время при разработке концепции чисел с плавающей запятой, которые в качестве также конструктивных объектов используются в современных вычислительных системах.

Интересен тот факт, что в конструкции шумеров, в отличие от современной математики, система счисления не возникает из «небытия» в качестве некоего абсолюта, статус системы счисления приобретает их новый язык в результате анализа его свойств и потенциала, источником же происхождения данного языка является собственно конструкция.

Несмотря на аддитивность алгебр, требуемой для сохранения изоморфизма, в вербальной, например, можно использовать не только операцию умножения, но и операцию деления, как сокращенные записи многократного сложения и вычитания соответственно, т. е. исключительно как вспомогательный инструмент. С первой из них не может возникать трудностей, потому что она действительно ничем не отличается от многократного повторения только аддитивной операции. Операция деления на n – это аддитивная операция с соблюдением двух обязательных условий: повторяемое вычитаемое число должно быть одним и тем же (что, как и в умножении, не создает трудностей), а также после последнего, n -го, вычитания результатом должен быть ноль. Второе из условий достаточно критично, поэтому данная операция может быть использована только для вычислений с точностью до математически значащего остатка, т. е. с приближенной точностью. Однако самостоятельное значение операции умножения и деления в математике шумеров имеют

постольку, поскольку не возникает конфликта с метрикой; фактически, только тогда, когда можно представить конструктивные объекты (или группы таких) для их верификации.

Подведем итоги конвективного соглашения. Необходимыми и достаточными элементами для конструктивной математики шумеров являются следующие: плоскость, циркуль, линейка, эталонный радиус, операции деления окружности на три, четыре и пять равных дуг, треугольник со сторонами, равными трем, четырем и пяти эталонным радиусам и шестидесятизначное позиционное счисление. Перечисленный набор ресурсов вместе с технологией (алгоритмом) оперирования ими составляют конвенцию изоморфизма шумеров.

В то же время сравнительный анализ примитивной математики M_L и математики шумеров M_{III} показывает, что имеющихся в нашем распоряжении конструктивных ресурсов недостаточно для представления непротиворечивого преобразования одной математики в другую. Да, в математике шумеров M_{III} почти каждый ресурс, которым могла бы быть расширена математика примитивная M_L , является конструктивом (т. е. построенным в результате выполнения определенного алгоритма над ресурсами алгебр примитивной математики M_L) и имеет себе обратный, который также является конструктивом. И каждая такая пара взаимобратных ресурсов должна быть введена в математику M_{III} . К ним, в частности, относятся алгоритм построения треугольника $\Delta 345_0$ с эталонной площадью $S_{345/0}$ на основе (одночастичного) линейного эталонного отрезка L ; триангуляция T_{P60} правильного многоугольника $P_{60}(R)$; дополнительные компактные носители алгебр T_{60} и $\aleph_{60}$, а также все операции и отношения алгебр примитивной математики, которые нетрудно адаптировать под новую структуру компактных носителей. Но наряду с этим, мы, например, не имеем возможности из математики M_{III} редуцировать конструктивно (т. е. с помощью ресурсов, имеющихся в ней) величину константы единичной (эталонной) площади $S_{345/0}$, которая равна «1», т. е. единицу шестидесятизначного счисления $\aleph_{60}$, в величину имеющейся в математике M_L константы единичной (эталонной) длины L , которая равна тоже «1», но уже символу (единичному числу), с помощью которого формируется бесконечное множество слов натурального ряда $\aleph = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots)$, даже с учетом того, что известны и алгоритмы компактификации членов $\aleph$ в числа $\aleph_{60}$, и декомпактификации последних обратно в члены множества $\aleph$, и алгоритм геометрического построения треугольника $\Delta 345_0$ с эталонной площадью $S_{345/0}$ на основе (одночастичного) линейного эталонного отрезка L . Да, мы можем только констатировать, что, допустив существование некоторого соответствия между константами L и $S_{345/0}$ имеется возможность построить две алгебры, которые по современным критериям вполне можно отнести к изоморфным. Но в них отсутствуют какие-либо конструктивные инструменты, реализующие выше допущенную связь (или соответствие) между константами так, чтобы при

посредстве таких конструктивных инструментов стало бы возможным преобразование результатов, полученных в одной из алгебр, в результаты другой. Это яркий пример того факта, что требование к алгебрам быть изоморфными является необходимым, но недостаточным, для непротиворечивого расширения соответствующих математик.

Таким образом, из сравнительного анализа примитивной математики M_L и математики шумеров M_{III} следует важный вывод, что не существует непротиворечивого расширения математики M_L до уровня математики M_{III} . Основой же математики шумеров является примитивная математика M_S , в которой базовыми элементами сравнения в геометрических моделях обоих типов являются не длины отрезков (*не одномерные пространства*) между равноудаленными точками (на окружности и/или прямой), а площади одинаковых прямоугольников (*двумерные пространства*) между ними. Выше уже упоминалось, что равнобедренный треугольник с произвольными основанием и высотой несложно переформатировать в прямоугольник с половинным основанием и той же высотой, и отмечалась возможность установления биективного соответствия между множеством таких треугольников модели с замкнутым контуром и множеством таких прямоугольников, основание которых расположены на незамкнутом контуре. Поэтому основным (некомпактифицированным) носителем T метаалгебры $H_1(S)$ математики M_S , которую, в свою очередь, содержит метаалгебра $H_1(n, S)$ математики $M_S(n)$, является представленное на прямой или на окружности (с произвольно выбранным центром и радиусом) бесконечное множество $T = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ точек, которые разделяют одинаковые *площади равнобедренных треугольников*, будучи концами их оснований, или *равные углы* в вершинах (совпадающих с центром окружности) данных треугольников или равные площади одинаковых прямоугольников, соответствующих данным равнобедренным треугольникам и выстроенных своими основаниями вдоль незамкнутого контура, а основным носителем X вербальной алгебры $E_1(S)$ математики M_S , которую, в свою очередь, содержит вербальная алгебра $E_1(n, S)$ математики $M_S(n)$, является (бесконечное множество слов) натуральный ряд $X = (\emptyset, 1, 11, 111, \dots) = (0, 1, 2, 3, \dots)$, соответствующий множеству T метаалгебры $H_1(S)$.

Забегая вперед, отметим, что только в конвенции Пифагора, где легитимным измерительным инструментом будет прямоугольник, станет возможным *конструктивная конвертация константы единицы площади* альтернативной конвенции *в константу единицы длины* примитивной математики; и только математика Пифагора будет иметь две ветви редукции: одна к математике шумеров и далее к математике M_S , а другая ветвь – непосредственно к математике M_L . Другими словами, только тогда предоставится возможность установить следующее соответствие: единицей или эталоном площади является квадрат, сторона которого имеет эталонную длину, единицей или эталоном длины является сторона квадрата эталонной площади. Именно оно и будет

основой конструктивной конвертации, которое, по умолчанию, используется во всех измерениях со времен Пифагора и вплоть до нашего времени. Только конвертировав константу площади конвенции Пифагора, мы сможем непротиворечиво редуцировать математику. Однако из данной редуцированной математики мы не сможем без противоречий напрямую вернуться в математику шумеров, минуя конвенцию Пифагора. Это можно будет сделать только, обратив ее до уровня математики с конвенцией Пифагора, а затем уже также без противоречий редуцировать (по другой, «нисходящей», ветви) до математики шумеров. Для получения структуры математики шумеров M_{III} в явном виде необходимо в метаалгебре H_1 математики M_L заменить эталон длины L на эталон площади ΔS (это площадь равнобедренного треугольника или прямоугольника, в котором выделена одна сторона, называемая основанием, располагающаяся между двумя соседними точками контура), получим метаалгебру $H_1(S)$, а ее вербальную алгебру переобозначить: $E_1 \rightarrow E_1(S)$, выразив в явном виде их принадлежность к примитивной математике площадей M_S : $M_S = \langle E_1(S) \cong H_1(S) \rangle$. Математике $M_L(n)$ будет соответствовать математика площадей $M_S(n)$ с алгебрами на компактных (для общего случая) носителях: $M_S(n) = \langle E_1(n, S) \cong H_1(n, S) \rangle$. Зафиксировав основание позиционного счисления $n = 60$ и заменив произвольный эталон площади ΔS на константу ΔS_{345} (т. е. на величину, выраженную в единицах площади $S_{345/0}$ треугольника $\Delta 345$), произведем преобразование $M_S(n) \rightarrow M_{S_{345}}(60)$, в результате чего получим математику

$$M_{S_{345}}(60) = \langle \{E_{S_{345}}(60) \cong H_{S_{345}}(60)\}, \{\mathfrak{A}\}, \{\mathfrak{A}_{60}\} \rangle.$$

В этом случае математика M_{III} будет непротиворечивым расширением математики $M_{S_{345}}(60)$, если в математику с алгебрами $E_{S_{345}}(60)$ и $H_{S_{345}}(60)$ добавить соответствие между площадями и углами, т. е.

- 1) соответствие между единицами площадей и углов $Y_\Delta \Leftrightarrow S_\Delta$, где Y_Δ – угол, а S_Δ – площадь равнобедренного треугольника $\Delta(1/60, R)$, являющегося элементом тривиальной триангуляции $T_{P_{60}}$ правильного многоугольника $P_{60}(R)$;
- 2) алгоритм пересчета единицы площади S_Δ правильного многоугольника $P_{60}(R)$ в площадь, измеренную в единицах $S_{345/0}$;
- 3) алгоритм пересчета измеренной в единицах $S_{345/0}$ площади $S_x(S_{345/0})$, являющейся частью площади правильного многоугольника $P_{60}(R)$, в величину площади $S_x(S_\Delta)$ той же самой части многоугольника $P_{60}(R)$, выраженной в единицах S_Δ , т. к. по конвенции шумеров, величина площади $S_x(S_\Delta)$, выраженная в 60-значном счислении, в точности соответствует величине угла Y_x , заштрихованной измеряемой площадью части правильного многоугольника $P_{60}(R)$,
- 4) соответствия $Y_x(S_\Delta) \Leftrightarrow S_x(S_\Delta)$;

а также добавить алгоритмы измерения площади произвольного прямоугольника, а следовательно, и произвольного угла, с любой наперед заданной точностью.

В итоге расширяющая описанным способом математику $M_{S345}(60)$ **математика шумеров** $M_{III} = \langle \{E_{III} \cong H_{III}\}, \{\mathfrak{U}_{III}\} \rangle$ с расширенными изоморфными алгебрами E_{III} и H_{III} , с расширенным списком полиморфных объектов $\{\mathfrak{U}_{III}\}$ **будет единообразно применима** для сравнительного анализа объектов как **на замкнутом**, так и **незамкнутом векторном или скалярном контуре**, а также **для сравнительного анализа** как **площадей**, так и **углов**. При этом численный результат сравнения с любой наперед заданной точностью всегда будет выражен условно-целым числом, т. е. числом, состоящим из **конечного количества цифр**. Последние замечания относятся к свойству данной математики – обладать метрикой, выражаемой конечным числом, – к свойству, ради которого и выстраивалась вся конструкция. Ввиду особой важности данное свойство потребовалось формализовать отдельно, несмотря на наличие его полного формального клона в виде операций композиции и конкатенации. С этой целью в математике $M_L(n)$ в список полиморфных объектов

$$\{\mathfrak{U}_n\} = \{\mathfrak{M}_n, \mathbb{K}_{n,0}, \mathbb{K}_{n,1}, \Delta_n^0, \Delta_n, P_n, \overline{P_n}, \overline{\Delta_n}, \Psi_n, \overline{\Psi_n}, A, \overline{A}, \Gamma_{Ln}, \Gamma_{Ln+}\}$$

был включен объект, соответствующий обобщенной метрике $\Gamma_{Ln+} = \{\Gamma_{E1n\oplus}, \Gamma_{H1n\otimes}\}$. В математике $M_S(n) = \langle E_1(n, S) \cong H_1(n, S) \rangle$ данный список объектов адаптируется и принимает вид

$$\{\mathfrak{U}_n\} = \{\mathfrak{M}_n, \mathbb{K}_{n,0}, \mathbb{K}_{n,1}, \Delta_n^0, \Delta_n, P_n, \overline{P_n}, \overline{\Delta_n}, \Psi_n, \overline{\Psi_n}, A, \overline{A}, \Gamma_{Sn}, \Gamma_{Sn+}\},$$

где обобщенным метрикам в алгебрах $E_1(n, S)$ и $H_1(n, S)$ соответствует полиморфизм $\Gamma_{Sn+} = \{\Gamma_{E1n\oplus}, \Gamma_{H1n\otimes}\}$.

При переходе от $M_S(n)$ к математике $M_{S345}(60)$, а затем к математике шумеров $M_{III} = \langle \{E_{III} \cong H_{III}\}, \{\mathfrak{U}_{III}\} \rangle$ в списке полиморфных объектов $\{\mathfrak{U}_{III}\}$ также должен быть полиморфизм $\{S_{III}\}$, соответствующий обобщенной метрике математики шумеров. В дальнейшем, будем ссылаться на данный полиморфный объект $\{S_{III}\} \Leftrightarrow \{S_1 \oplus S_2 = S_3\}$, как на обобщенную метрику $S_1 \oplus S_2 = S_3$ математики шумеров M_{III} , в которой S_1, S_2, S_3 – это или (геометрические) объекты из T_{60} (площади прямоугольников с выделенным основанием или углы) метаалгебры H_{III} или (числовые) объекты из $\aleph_{60}$ вербальной алгебры E_{III} .

И, в заключение, отметим, следующее. В математике шумеров вместо системы координат с сеткой из равноудаленных декартовых абсцисс и ординат двумерную измерительную среду образуют оси абсцисс и ординат шумеров и сеть одинаковых треугольников Δ_{345} (Рис.5). Абсциссой является полупрямая (незамкнутый контур) с отмеченными на ней точками – элементами

носителя $T_{60} = (a_{(0)}, a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(58)}, a_{(59)}, a_{(1)(0)}, a_{(1)(1)}, \dots)$ – на одинаковом расстоянии, равном длине одного из катетов треугольника $\Delta 345$ единичного масштаба, ординату формирует другой из катетов того же треугольника и равные ему катеты других треугольников измерительной сетки. В силу квадротропности треугольника $\Delta 345$, которую более подробно обсудим ниже, абсциссу и ординату можно формировать и другой ортогональной парой – гипотенуза-высота. Площадь произвольного прямоугольника с выделенным основанием в измерительной среде шумеров определяется следующим образом.

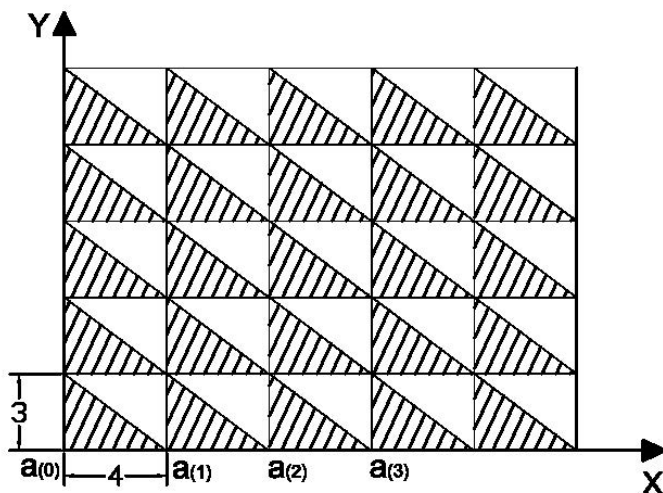


Рис.5. Измерительная среда (система координат) шумеров с $\Delta 345$ к инварианту $I_{\perp}$ произвольного прямоугольного неравностороннего треугольника ABC .

Строим основание (произвольной длины) прямоугольника на оси абсцисс шумеров, начиная с точки $a_{(0)}$, из конечных точек основания возводим параллельно ординатам две стороны, равные высоте прямоугольника, и соединяем полученные конечные точки высот. Количество (сумма) треугольников $\Delta 345$ (как заштрихованных, так и не заштрихованных на (Рис.5), которое полностью замещается контурами измеряемого прямоугольника, представляет величину площади данного прямоугольника в единицах площади $\Delta 345$ (данного масштаба) при условии, что полученное количество выражено в 60-значном позиционном счислении

Чтобы измерить площадь уже (где-то) построенного прямоугольника, выбираем одну из его сторон в качестве основания, строим вдоль основания ось абсцисс шумеров, совместив начальные точки основания и абсциссы, затем выстраиваем ось ординат шумеров и заполняем в соответствии с построенными осями площадь прямоугольника сетью из треугольников $\Delta 345$

единичного масштаба. Подсчет последних внутри имеющегося прямоугольника определит его площадь.

II.5. Концепция теоретической математики

Анализ показывает, что для декларации конвенции изоморфизма шумеров практически не требуются дополнительные аксиомы ни геометрического, ни алгебраического характера. Из всего вышеперечисленного для начала являются необходимыми только плоскость, циркуль, линейка и способ воспроизведения символов, все остальное постигается или опытом или через восприятие демонстрации их возможностей Учителем. Впоследствии из постигнутого конструктивного материала отбираются объекты и процедуры, которые и постулируются в конвенции. Поэтому собственно конвенция с вышеперечисленным перечнем ресурсов выглядела бы вполне самодостаточной, если бы не один факт. Нетрудно заметить, что конструкция шумеров, кроме перечисленного, нуждается в еще одной фундаментальной опоре, которая, будучи базовым звеном всей системы, не является конструктивом. Это – *аксиома геометрии*. Необходимость ее формулирования обусловлена доводами скорее общепhilosophического характера. Изложить ее можно следующим образом: **площадь произвольной плоской фигуры является инвариантом геометрии.**

Вместе с тем, кроме начального, необходим еще и завершающий пункт конвенции, которым должна быть *главная гипотеза*: **площадь произвольного прямоугольника является инвариантом математики шумеров и не зависит ни от математически различных, ни от физически различных способов ее измерения.**

Смысл формулирования данной гипотезы в том, что мы точно не знаем, а потому только предполагаем, что все возможные алгебраические преобразования, связанные с различием процессов измерения, приводят к выводу об инвариантности площади и в алгебре шумеров. И эти предположения требуют доказательства. Данная гипотеза является ключевой, как бы выразились в наше время, для последующего развития всей математики, определяя и промежуточные вехи, и в целом градиент движения математической мысли. Но это будет выглядеть именно так только с современной точки зрения. А что же происходит по существу? Идея, заложенная в гипотезе, порождает множество различных истинных утверждений, которые могут быть сформулированы

при детальном рассмотрении процесса измерения. В частности, вследствие конструктивных особенностей собственно системы шумеров, в любой паре множеств элементов, рассматриваемых в ней, установление взаимно-однозначного соответствия между их элементами, если оно вообще возможно, допускается не одним способом. Другой пример: отсутствие биекции между множеством всех прямоугольников, имеющих не нулевую площадь и множеством чисел счисления. И все такие и им подобные факторы не должны влиять на конечный результат. Кроме того, представляется также вполне очевидным, что результат измерения не должен зависеть от способа ориентации, от порядка и времени размещения измерительного инструмента на измеряемой площади: можно сразу всей совокупностью соответствующих данной точности (или меньшей, а затем просуммировав их, свести к целому количеству в границах данной точности) треугольников $\Delta 345$ покрыть ее или по очереди, начиная с произвольного места, помещать их, возможно, переставляя и/или временно убирая, растянуть процесс во времени и т. д. и т.п. И, конечно, результат измерения не должен зависеть от субъекта. Все возможные и вполне различимые (математически, физически и пр.) друг от друга варианты процесса измерения должны представлять его (процесса) допустимые симметрии, поскольку конечный результат – число, отображающее величину измеряемой площади с наперед заданной точностью, – должен быть одним и тем же.

Разрешение единственного не конструктивного множества – множества истинных утверждений – является действием необходимым для достижения замкнутости всей системы шумеров, только в данном случае можно будет вполне определенно утверждать, что она является действительно самодостаточной.

Если невозможно сразу решить проблему в целом, ее следует разделить на этапы. На каждом из них происходит выбор конкретных различных способов, подлежащих формированию, например, в некий симметричный мультиплет. Это позволяет в приложении к конкретно рассматриваемой ситуации наполнить частной семантикой формальное утверждение (или форму) гипотезы, а затем семантически уточненное утверждение необходимо интерпретировать математической моделью (по-другому, математической структурой), задача которой – служить средством верификации для подтверждения (или опровержения) главной гипотезы только в той части, которую ограничивает данное уточнение, т. е. в части, соответствующей симметричному объединению в единую совокупность некоторого количества конкретных (математически или физически) различных способов измерения произвольного прямоугольника. Как правило, подобная симметризация приводит к расширению алгебры математики шумеров, поэтому в расширенную алгебру необходимо внести ресурсы ее редуцирования обратно к алгебре шумеров. Например, наряду с имеющимся носителем алгебры возможно появление преобразованного носителя, наряду с имеющимися операциями – появление новых (в частности, на элементах преобразованного носителя) и т.п. Непротиворечивость

расширения при этом обуславливается, например, приведением некоторого алгоритма соответствующего преобразования (носителя, операций, отношений), а кроме того, алгоритма, ему обратного. Таким образом, к уже имеющимся ресурсам в расширяемую алгебру в качестве дополнительных ресурсов вносятся и преобразованные носитель, операции, отношения (если таковые имеют место быть), и алгоритмы соответствующих преобразований, и алгоритмы, обратные последним. Если все это сделано для одной из изоморфных алгебр, то неперенным условием является поиск способа расширения соответствующих ресурсов и построение взаимнообратимых алгоритмов также и в другой алгебре. В итоге, получая в расширенной математике некий результат или результаты (измерений), можно за счет имеющихся в ней средств преобразовать их (результаты) обратно (редуцировать) к математике шумеров. Сравнивая редуцированные результаты измерения на предмет непротиворечивости уже в рамках математики шумеров, можно делать выводы об инвариантности или не инвариантности того или иного фактора именно в данной математике.

В контексте изложенной концепции теории математики отметим следующее.

Любая математическая структура создается не ради создания собственно какой-то новой математической структуры. Ее создание является необходимым шагом для доказательства определенной части главной теоремы. По этой причине все известные математические структуры в рамках теоретической математики выстраиваются в некоторую последовательность необходимых ресурсов для доказательства отдельных этапов основной гипотезы (главной теоремы математики шумеров).

В общем случае условия измерения столь многообразны, что для их симметризации потребуется использовать достижения всех на сегодня известных математических и физических школ, начиная от древних греков во главе с Пифагором и вплоть до Кантора с его теорией множеств, до абстракционистов, конструктивистов, интуиционистов всех направлений. Но не только это. Потребуются и Ньютон, и Максвелл, и Планк, и Эйнштейн, и копенгагенская школа во главе с Бором, и физики с более современными идеями. И опять-таки не только это. Потребуется учет и социальных, и психологических, и биологических, и химических, и прочих, исследуемых различными науками, факторов не только для всего социума – нашей цивилизации, но и для отдельных ее субъектов с их индивидуальными психо-физиологическими свойствами (наклонностями, способностями) и генетическим строением. Главная заслуга шумеров именно в том, что они создали **язык**, на котором возможно описывать все вокруг, используя слова конечной длины.

Выше было отмечено, что без существования тождественных элементов построение примитивного языка в принципе невозможно. А данное утверждение является прямым следствием более общего. Только существование

некоего стабильного фактора, независимого от пертурбаций любого свойства в нашем изменчивом мире позволяет создать объективную систему описания чего бы то ни было в нем. Если нет такого фактора, который может выступать в качестве абсолюта стабильности для всего остального, то необходимо найти систему, в рамках которой флуктуации нестабильности одной ее части (или одних ее частей) полностью компенсируются процессами в другой, т. е. систему в рамках которой непреложно выполняется принцип относительной стабильности.

И в то же время только такой, абсолютно стабильный фактор, может служить и основой создания объективной системы описания ВСЕГО. В этой связи следует, например, заметить, что без абсолютов Ньютона, т. е. прямых и необходимых следствий системы шумеров, невозможно построение современной физики, несмотря на иное отношение к этому Эйнштейна и других физиков-релятивистов (см. параграф 2.2.2). А с другой стороны, процесс построения подобной системы описания ВСЕГО, действительно, можно рассматривать как процесс развития всей математики.

В качестве первого примера использования главной гипотезы конвенции шумеров приведем следующую теорему.

Теорема. Результат измерения произвольного прямоугольника в измерительной среде системы шумеров не зависит от замены любого из $\Delta 345$ на его копию или на совокупность других $\Delta 345$, суммарная площадь которых тождественна площади заменяемого $\Delta 345$.

Вполне вероятно, что существует не один способ, а некоторая совокупность различных способов интерпретации данного утверждения, т. е., содержательно, существует совокупность различных математических моделей. Однако, если будет приведена определенная модель, которая или подтвердит, или опровергнет (за счет выявленных с ее помощью противоречий) высказывание теоремы, то можно утверждать, что данная модель с точностью до **изоморфных ей** моделей доказывает истинность или ложность утверждения теоремы. В принципе, наряду с моделями, доказывающими истинность теоремы, можно построить и модели, доказывающие утверждение противоположное. Далее, что наиболее важно, если эта модель является к тому же и изоморфной всей конструкции шумеров, то она еще раз подтверждает с точностью до всех **изоморфных ей и системе шумеров** моделей отсутствие внутренних противоречий или вскрывает их внутри собственно системы шумеров. Отсутствие логической необходимости в подтверждении данной моделью непротиворечивости конструкции шумеров в более широком аспекте, нежели изложенном в теореме, не должно смущать. Модель фактически только идентифицируется на принадлежность к множеству моделей изоморфных собственно системе шумеров (в определенной части системы шумеров) с тем, чтобы нам были обеспечены правомерность следующего из нее вердикта (об отсутствии в системе или в той ее части, для которой модель представляется изоморфной, внутренних противоречий согласно изложенной в теореме причине), а также

легитимность утверждения о непротиворечивости расширения математики шумеров новыми элементами и процедурами, содержащимися в представленной модели (если таковые имеются).

Функционально, модель, интерпретирующая условие приведенной теоремы, может быть представлена так.

Рассмотрим множество всех прямоугольников с выделенным основанием, обладающих площадью. Пусть имеется произвольный прямоугольник $ABCD$ из такого множества. Совместим его основание AD с абсциссой шумеров, полупрямой, на которой размещены элементы множества T , так, чтобы его точка A совпала с начальной точкой $a_0 \in T$, а точка D прямоугольника $ABCD$ находилась, например, после точки $a_i \in T$. Продолжим полупрямую от точки $a_0 \in T$ в обратном направлении и построим на стороне (на высоте) AB прямоугольника $ABCD$ равный ему прямоугольник $ABC'D'$. Получим два одинаковых прямоугольника, симметрично расположенных относительно одной общей стороны AB . Далее. Существует конструктивные способы получения неограниченного количества и геометрических, и алгебраических элементов, привлекаемых к процессу измерения прямоугольника $ABCD$. Некоторые из них будут принимать участие в процедуре измерения его площади, другие будут находиться в резерве. Геометрические объекты, непосредственно участвующие в измерении, поместим внутрь прямоугольника $ABCD$, резервные – в прямоугольник $ABC'D'$. Полностью заполним оба прямоугольника измерительным инструментом заранее заданного (или произвольно выбранного) масштаба. Два таких множества треугольников $\Delta 345$ будут разграничиваться конструктивно построенными контурами измеряемого прямоугольника: в одно множество войдут, не перекрывая друг друга, только объекты, располагаемые внутри измеряемого прямоугольника, в другое – объекты, располагаемые внутри смежного прямоугольника и также не перекрывающие друг друга. У контура измеряемого прямоугольника отсутствует площадь, поэтому он, как и «прямоугольник» с нулевой площадью, совершенно идентичен «треугольнику $\Delta 345$ » с нулевой площадью, и без внесения каких-либо противоречий можно допустить, что измерение первого из них осуществляется последним. Из способа построения прямоугольников $ABCD$ и $ABC'D'$ следует эквивалентность двух множеств треугольников $\Delta 345$, заполняющих каждый из прямоугольников. В каждом прямоугольнике определенная совокупность треугольников $\Delta 345$ равна по площади треугольнику $\Delta 345$, имеющему больший масштаб. Элементы обоих множеств при точной идентификации факта принадлежности только к одному из них (через принадлежность только к одному из прямоугольников) могут быть перемещаемы из одного в другое множество, не перекрывая другие элементы в каждом из множеств, что следует из существования геометрических симметрий. Следовательно, без утраты маркера (например, цвета линий), определяющего их принадлежность к одному из множеств, об элементах и того и другого множества можно говорить как об элементах

одного множества всех треугольников $\Delta 345$, построенных конструктивным способом, если в качестве разграничивающего их друг от друга дополнить множество элементами $\Delta 345$ с нулевой площадью (при этом количество пустых элементов не имеет никакого значения, поскольку они пусты). Как было показано, в алгебре метаотображения объект с такой площадью определяется пустой операцией или операцией выбора (например, начала системы отсчета). В силу произвольности $ABCD$ и отсутствия ограничений для его построения, измеряемая площадь может быть сколь угодно большой, соответственно, может быть неограничен и объем привлекаемых для измерения ресурсов.

В свою очередь, в алгебре вербального отображения принадлежность элементов к соответствующим множествам обеспечивается введением для каждого элемента одного из двух аддитивных алгебраических знаков: плюса или минуса.

В результате будет получена математика, расширенная введением новых носителей в каждой из алгебр и новых операций. Например, можно привести множество T_k красных и множество T_q черных треугольников $\Delta 345$, а также множество $T_{k,q}$, объединяющее оба этих множества в метаалгебре и соответствующие три множества $\aleph_{60}^+$, $\aleph_{60}^-$, $\aleph_{60}^\pm$ с использованием разных аддитивных знаков в вербальной алгебре. В частности, в такой математике приобретают легитимность новые способы решения алгебраических уравнений (верифицируемые на объектах геометрической модели) путем сведения их к эквивалентным за счет переноса члена уравнения за знак равенства с противоположным алгебраическим знаком (соответствующим другому цвету линий треугольника в геометрической модели). Вместе с тем, имея алгоритм построения каждого из трех $\aleph_{60}^+$, $\aleph_{60}^-$, $\aleph_{60}^\pm$ (T_k , T_q , $T_{k,q}$) новых множеств в расширенной алгебре, существует и обратный алгоритм как для разрешения (по знаку в $\aleph_{60}^\pm$ и по цвету в $T_{k,q}$) каждого элемента из объединяющего множества $\aleph_{60}^\pm$ ($T_{k,q}$) на принадлежность к одному и только одному из объединяемых множеств $\aleph_{60}^+$, $\aleph_{60}^-$ (T_k, T_q), так и для редукции каждого из объединяемых множеств $\aleph_{60}^+$, $\aleph_{60}^-$ (T_k, T_q) к носителю соответствующей алгебры шумеров $\aleph$ (T). Аналогичная связь, обеспечивающая взаимообратимость способа (преобразования или алгоритма) расширения математики (например, за счет операции переноса члена уравнения) шумеров и способа редукции к ней же, является неперенным атрибутом и каждой новой операции. Ну и, в конце концов, расширение каждой из алгебр производится не иначе, как только на основе верификации на модели с геометрическими объектами, построенными конструктивным способом.

Два множества углов между радиусами могут быть также конструктивно различимы, если различать углы, измеряемые в двух противоположных направлениях: по и против часовой стрелки. По аналогии с $\Delta 345$, они могут быть объединены в одно множество без утраты идентификации с одним и только одним из подмножеств углов при дополнении множества нулевым углом. При этом также два множества чисел позиционного 60-значного

счисления для отображения величины углов будут различимы, если их относить к множеству или положительных, или отрицательных чисел, разграниченных друг от друга нулем. С учетом того, что способ измерения углов остается прежним, расширенная математика для угловых величин не будет отличаться от расширенной математики для площадей плоских фигур.

В результате в расширенной математике мы имеем два одинаковых прямоугольника $ABCD$ и $ABC'D'$, заполненных, согласно теореме, треугольниками $\Delta 345$ двух разных «сортов», перенос треугольников $\Delta 345$ из прямоугольника $ABC'D'$ в $ABCD$ возможен только в случае освобождения для них места за счет переноса эквивалентного по площади количества треугольников $\Delta 345$ из прямоугольника $ABCD$ в $ABC'D'$. В математике шумеров, которая наследуется расширенной математикой (и потому в последней вполне корректно употреблять законы математики шумеров), площади обоих прямоугольников совместно представляют аддитивную величину, обладающую свойством ассоциативности, что дает возможность выделять скобками треугольники, принадлежащие или к одному или к другому прямоугольнику или выделять скобками (что будет в математике шумеров эквивалентом переноса) треугольники замещающие и замещаемые. Доказательством того, что результат измерения площади как прямоугольника $ABCD$, так и $ABC'D'$ не изменится при обмене между ними произвольной (но одинаковой) совокупностью треугольников $\Delta 345$, является выполнимость утверждения (метрики) $S_1 \oplus S_2 = S_{12}$ как на носителях расширенной математики, в которой $S_1 \in T_\kappa$, $S_2 \in T_\eta$, $S_{12} \in T_{\kappa,\eta}$ или $S_1 \in \aleph_{60}^+$, $S_2 \in \aleph_{60}^-$, $S_{12} \in \aleph_{60}^\pm$, так и на носителях математики шумеров, в которой $(S_1, S_2, S_{12}) \in T'_{60}$ или $(S_1, S_2, S_{12}) \in \aleph'_{60}$ с одновременным переносом (с целью верификации на геометрической модели) произвольной совокупности ΔS_1 треугольников $\Delta 345$ из множества S_1 в множество S_2 и совокупности ΔS_2 треугольников $\Delta 345$, равной по площади совокупности ΔS_1 треугольников $\Delta 345$, из множества S_2 в множество S_1 ; причем в обеих математиках это будет относиться и к измерению площадей, и к измерению углов. Но в силу произвольности прямоугольника $ABCD$ тот же результат будет получен и для произвольного прямоугольника в измерительной среде системы шумеров. Теорема доказана.

Рассмотрим привлеченные для доказательства теоремы ресурсы, служащие расширением математики шумеров. Прежде всего были введены два дополнительных множества: множество всех отрицательных чисел позиционного 60-значного счисления и множество всех (целых) чисел позиционного 60-значного счисления. В последнем из них числа счисления шумеров (т. е. положительные числа) представляют подмножество. Аналогично в метаалгебре к множеству объектов, например, черного цвета добавлено такое же множество цвета красного, а также множество, состоящее из объектов и черного и красного цвета. Расширенная алгебра на геометрических множествах из моноида становится группой. То же самое относится и к вербальной алгебре

расширенной математики шумеров. Кроме того, вся математика (конечно, и каждая из изоморфных алгебр) пополняется еще и понятием «уравнение», поскольку в ней становятся легитимными аддитивные операции обоих знаков с его членами, а именно, перенос членов из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.

Для доказательства теоремы потребовалось построить новую математику $M_{III}^{\pm}$. Она содержит математику шумеров M_{III} с носителями $\aleph$, $\aleph_{60}$, T , T_{60} ее алгебр E_{III} , H_{III} и операционным контентом (описанным выше) над элементами указанных носителей. Кроме того в соответствующие алгебры M_{III} добавлены «противоположные» носители $\aleph^{-}$, $\aleph_{60}^{-}$, T^{-} , T_{60}^{-} и операционный контент для них, аналогичный контенту для первой четверки носителей, а также добавлены носители $\aleph^{\pm}$, $\aleph_{60}^{\pm}$, $T^{\pm}$, $T_{60}^{\pm}$, каждый из которых является объединением «взаимопротивоположных» вышеприведенных носителей, и соответствующий операционный контент на $\aleph^{\pm}$, $\aleph_{60}^{\pm}$, $T^{\pm}$, $T_{60}^{\pm}$. В математику $M_{III}^{\pm}$ добавлены две бинарные коммутативные операции вычитания для любых двух элементов из $\aleph^{\pm}$ и двух элементов из $\aleph_{60}^{\pm}$, и, соответственно, две бинарные коммутативные операции декомпозиции поворотов (декомпозиции сдвигов точек) для любых двух элементов из $T^{\pm}$ и двух элементов из $T_{60}^{\pm}$. Примечательный факт: все добавленные бинарные коммутативные операции обладают не только свойством ассоциативности, но и замкнутости. В результате таких преобразований будут получены две расширенные изоморфные алгебры $E_{III}^{\pm}$ и $H_{III}^{\pm}$. И в конце концов, математика $M_{III}^{\pm} = \langle \{E_{III}^{\pm} \cong H_{III}^{\pm}\}, \{\mathfrak{A}_{III}^{\pm}\} \rangle$ содержит полный набор полиморфных объектов $\{\mathfrak{A}_{III}^{\pm}\}$, соответствующий списку элементов в каждой из изоморфных алгебр. Отдельно отметим, что, среди прочих, в список объектов $\{\mathfrak{A}_{III}^{\pm}\}$ входит обобщенная метрика $\{\mathfrak{S}_{III}^{\pm}\}$ для элементов новых носителей: $\{\mathfrak{S}_{III}^{\pm}\} \Leftrightarrow \{S_1 \oplus S_2 = S_3\}$, где S_1, S_2, S_3 – это или (геометрические) объекты из $T_{60}^{\pm}$ (площади прямоугольников с выделенным основанием или углы) метаалгебры $H_{III}^{\pm}$ или (числовые) объекты из $\aleph_{60}^{\pm}$ вербальной алгебры $E_{III}^{\pm}$.

Несколько слов о приведенном методе доказательства и о природе вновь введенных ресурсов. Принципиальный вывод из математики шумеров: результат измерения площади – это результат *ad hoc*. У них ничего не говорится о деталях процесса, т. е. о том, как должно происходить измерение, за исключением того, что сказано. Известно только одно, если измерение свершилось – получим то, что предписано математикой. В данной теореме мы хотим объединить вместе для сравнения и последующего вывода два, три или гораздо больше (счетное количество) результатов, каждый из которых получим после перестановки тех или иных совокупностей треугольников $\Delta 345$. Но, следуя теории, ее вывод относится только к одному из результатов. Остальные находятся за пределами предложенной ими теории. Если мы хотим в ее рамках проанализировать другой из них, то все остальные, в том числе, и первый, неправомерно включать в предполагаемый вывод.

Метод, используемый для доказательства теоремы, предполагает объединение для сравнительного анализа двух или нескольких актов (процессов) измерения, результаты которых рассматривать *совместно* в теории шумеров некорректно. А за пределами их теории, то, что объединяется в один мультиплет, заведомо не являясь совместным у шумеров, может иметь, например, различный «индекс» (или «переключатель»), указывающий, что *совместными* (т. е. корректно представляемыми) *ресурсами в рамках математики шумеров* являются только те, что имеют *один и тот же «индекс»*. В данной теореме требуется объединить несовместные в системе шумеров ресурсы: задействованные в измерении совокупности треугольников $\Delta 345$ и их резервные копии.

Например, несомненно, что конструктивный геометрический объект в модели не может иметь площадь меньше нулевой, поэтому знак «минус» перед значением площади означает лишь иной способ (в том числе и операционной) «индексации» площадей объектов *относительно* тех, что задействованы для получения теоретически обусловленного результата. Кроме того, при доказательстве было использовано множество всех прямоугольников, обладающих площадью. Это явно неконструктивный объект. Но собственно принцип *объединения несовместного* внутри любой системы, в том числе и системы шумеров, является некорректным. Объединение возможно только вне ее рамок. А вне рамок системы шумеров допустимо использование и неконструктивных элементов, при непременном условии существования содержательных алгоритмов редукции к конструктивным элементам именно системы шумеров. Получив результат вне рамок системы шумеров, дальнейшая эффективная (т. е. уже конструктивная) редукция его к математике шумеров осуществляется через операции, отношения, алгоритмы, в соответствии с его «индексом».

Далее рассмотрим подробно еще две теоремы, которые, по всей видимости, были доказаны Пифагором.

П.6. Расширенная математика Пифагора

П.6.1. Симметрии инструмента шумеров (Теорема Первая)

Изотропность или анизотропность среды – это вопрос физики. Вопрос же в математике следует поставить так: какую дополнительную степень возмущения в процесс измерения объектов вносят метрические свойства собственно инструмента? Например, существует возможность его дискретных поворотов на плоскости. Согласно аксиоме, его собственная площадь при этом не изменяется. В то же время, измеряя один и тот же отрезок разными катетами $\Delta 345$, мы получаем два разных алгебраических результата. Если отложить одним и тем же раствором циркуля в ортогональных направлениях одинаковые отрезки, то, по аналогии с предыдущим, несложно установить, что вдоль каждого из них будет располагаться, например, также различное количество катетов треугольника $\Delta 345$. В силу свойств собственно измерительного инструмента шумеров, в метрику может быть внесена дополнительно даже не ортотропия, а квадротропия, поскольку кроме катетов имеется еще и вторая ортогональная пара: гипотенуза-высота (Рис.6). Основой способа метризации пространства у шумеров является принцип соотнесения (сравнения) площадей путем наложения. Возникает вопрос: данная метрика является объективным свойством собственно пространства или она является следствием внутренних свойств измерительного инструмента? Наша задача – показать, что в системе шумеров метрика измеряемых объектов не зависит от асимметрии формы $\Delta 345$, что само по себе является частным случаем более широко утверждения: (согласно главной гипотезе) метрика – это инвариант математики шумеров. В связи с этим следующим шагом будет симметризация четырех возможных способов измерения треугольником $\Delta 345$.

Теорема 1. Собственная метрика произвольного прямоугольника системы шумеров инвариантна относительно измерения его площади любой из двух возможных характерных пар ортогональных отрезков $\Delta 345$.

Как уже было отмечено, в треугольнике $\Delta 345$ имеются две пары ортогональных отрезков – два катета и гипотенуза с высотой, причем все четыре

отрезка разные по длине. Поэтому в измерительной среде шумеров ось абсцисс можно построить четырьмя взаимоисключающими друг друга способами: ее могут составлять отрезки, равные либо малому, либо большому катету, либо гипотенузе, либо высоте.

Необходимо доказать, что, несмотря на асимметрию формы инструмента шумеров, метрика произвольного прямоугольника не зависит от того, какая из пар ортогональных отрезков треугольника $\Delta 345$ располагается вдоль его сторон в процессе измерения, т. е. располагаем ли мы на оси абсцисс гипотенузу (высоту) или катет малый (большой).

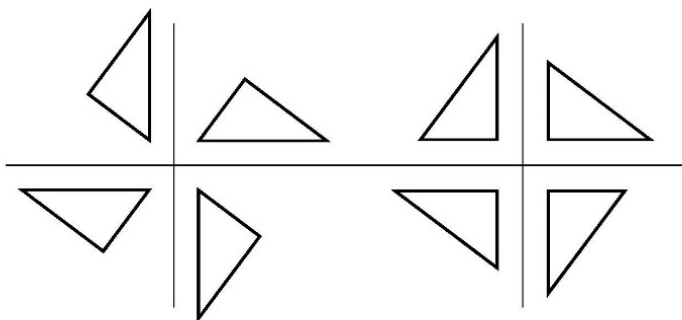


Рис. 6. Две группы вращений треугольника $\Delta 345$ на прямой угол.

В принципе метрика не должна зависеть и от перемены мест отрезков в любой паре относительно сторон измеряемого прямоугольника, т. е. не должна зависеть от ортотропности измеряющего инструмента вообще. Но данное утверждение будет доказываться в следующей теореме.

Тем не менее рассмотрим самый общий для данной теоремы случай. Имеется четыре различных варианта измерения площади произвольного прямоугольника треугольником $\Delta 345$, с каждым из которых связано определенное начальное положение $\Delta 345$ относительно выбранной стороны измеряемого прямоугольника. Все четыре возможных процесса необходимо представить некоторой единой процедурой измерения, в рамках которой каждый из упомянутых поворотов измерительного инструмента будет рассматриваться совершенно симметрично, т. е. как один из четырех равноправно возможных исходов. Для этой цели нам потребуется такой прямоугольный объект, чтобы вдоль любой его стороны могло разместиться целое количество любого отрезка, из четырех неравных, треугольника $\Delta 345$. А затем полученным прямоугольным объектом попытаемся измерить заданный прямоугольник. Конструктивно такое представление может быть смоделировано, если воспользуемся даже не прямоугольником, а квадратом. Последний, как известно, симметричен относительно поворотов на углы, кратные 90° вокруг его центра и при этом также сохраняет, согласно аксиоме, свою площадь неизменной. Подберем сторону

квадрата такой, чтобы вдоль нее укладывалось целое число треугольников $\Delta 345$ при любом из четырех его возможных положений. В математике такая величина отрезка называется наименьшим общим кратным (НОК). Тогда, каким из четырех способов ни заполняй квадрат треугольниками $\Delta 345$, вдоль любой его стороны действительно будет размещаться их целое количество. В двух случаях измерения (Рис. 7), когда катеты располагаются параллельно сторонам квадрата, можно убедиться непосредственно, что в квадрате размещается одинаковое целое количество треугольников $\Delta 345$. Но, согласно опять же аксиоме, и в каждом из двух других случаев это количество должно быть таким же. Однако в системе шумеров отсутствуют алгебраические ресурсы для подтверждения совершенно точно данного факта в таких случаях, как два последних. А именно, у шумеров ничего не говорится о двух равных или неравных («осколочных») частях треугольника $\Delta 345$, составляющих площадь, эквивалентную *целому* треугольнику $\Delta 345$, т. е. неизвестны ни площади таких частей ни их сумма.

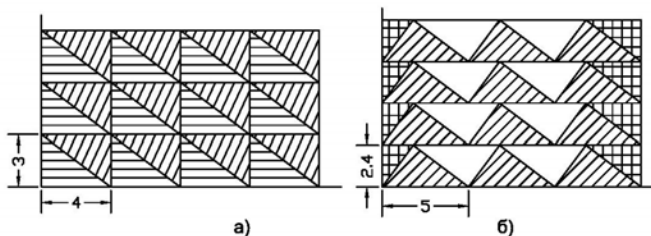


Рис. 7. Два способа заполнения квадрата 60x60 треугольниками $\Delta 345$.

Поэтому для доказательства теоремы нам не остается ничего другого, как прибегнуть к симметризации двух различных ортотропных метрик.

Другими словами, план доказательства будет следующим. Мы должны показать, что для двух различных способов измерения треугольником $\Delta 345$, порождающих две различные ортотропные метрики, существует симметричное представление. Это значит, что мы должны привести способ измерения некоторой геометрической формой, порождающей одну ортотропную метрику, не обусловленную треугольником $\Delta 345$ (и обобщающую в некотором смысле две исходных), и показать, что алгебраический результат такого измерения непротиворечиво согласовывается с результатом одного из двух возможных способов измерения треугольником $\Delta 345$ в рамках конвенции шумеров, в частности, с результатом измерения парой катетов — одной из ортотропных пар отрезков измерительного инструмента шумеров. Но тогда тот же результат должен иметь место и при измерении другим способом, т. е. при измерении ортотропной парой гипотенуза-высота. И данный факт может быть верифицирован вплоть до наименьших частей при любой заданной наперед точности измерения. В частности, в силу симметрии расположения

«осколочных» частей измеряющих треугольников $\Delta 345$ вдоль (например, боковых) сторон измеряемого прямоугольника (при том, что каждая часть также представляет некоторый прямоугольный треугольник), вычисляя с помощью аддитивных операций количество экземпляров новой геометрической формы (с одной ортотропной парой отрезков), приходящееся на каждую пару частей (с неизвестной площадью) треугольника $\Delta 345$, можно будет установить, что данное количество соответствует полной площади треугольника $\Delta 345$ и, следовательно, две «осколочные» части вместе дают площадь целого треугольника $\Delta 345$. Затем после верификации суммарного количества площадей, соответствующих целым треугольникам $\Delta 345$, размещаемых на прямоугольнике, при его измерении как одной, так и другой парой ортогональных отрезков треугольника $\Delta 345$, можно будет сделать вывод или соответствующий теореме или противоположный.

Попутно отметим, что перечисленные способы ориентации инструмента в процессе измерения связаны с возможностью поворота $\Delta 345$ на любой из его внутренних углов и/или на смежный любому из них. На основании этого теорему можно было сформулировать так: поворот $\Delta 345$ на любой его внутренний угол не меняет результат измерения площади произвольного прямоугольника. Однако в связи с тем, что от двух ортотропных метрик мы должны перейти к одной, но тоже ортотропной, то в последней формулировке можно смело заменить словосочетание «внутренний угол» на «внутренний острый угол», тем самым игнорируя по ходу симметризации одну степень свободы – повороты на прямой угол. Тем не менее, имея это ввиду, будем исходить из начальной, более общей, формулировки теоремы.

Для реализации искомого представления подберем (методом проб и ошибок или вычислим современными средствами НОК четырех попарно ортогональных отрезков) подходящий квадрат и, установим, что длина его стороны равна 60-ти единицам эталонного диаметра D (т. е. вдоль нее в один ряд можно разместить 60 квадратов площадью $S_{eo} = S_{D^2}$). В результате геометрических построений получим квадрат $ABCD$, составленный из некоторого количества $\Delta 345$ и их частей, полностью покрывающих его любым из четырех различных способов, два из которых представлены на Рис.7. Так как четырехугольник $ABCD$ является квадратом, то к двум вариантам измерения, изображенным на Рис.7, несложно добавить еще два, поменяв местами в одном случае катеты, а в другом гипотенузу с высотой. Хотя, по той причине, что квадрат симметричен относительно поворотов на 90° , можно только переобозначить его вершины циклической перестановкой и больше ничего не менять на рисунке; тогда относительно вершины с данной буквой ориентация отрезков каждой из ортогональных пар изменится на противоположную.

В связи с изложенным, процесс заполнения площади квадрата $ABCD$ треугольниками $\Delta 345$ можно начинать, размещая первый $\Delta 345$ одним из четырех возможных способов в одном из углов прямоугольника $ABCD$. Все восемь

треугольников $\Delta 345$, изображенных на Рис.8а,б представляют полную картину рассматриваемых симметрий измерительного инструмента шумеров при его дискретных поворотах на плоскости, имеющих непосредственную связь с его собственными внутренними углами.

Каждый треугольник из пары, расположенных на Рис.8а по диагонали, необходим для другого, поскольку их ориентация относительно квадрата $ABCD$ является взаимно необходимой для максимально плотного заполнения его площади. Данное замечание относится также и к диагональным треугольникам на Рис.8б. Таким образом, каждый из четырех обсуждаемых нами вариантов измерения конструктивно представлен на Рис.8 своей парой диагональных треугольников $\Delta 345$. А вместе все четыре пары представляют совершенно симметрично процесс измерения квадрата $ABCD$ одним и тем же инструментом. Из аксиомы следует, что в каждом варианте в квадрат должно помещаться одно и то же количество треугольников $\Delta 345$ (нетрудно выяснить, что их должно быть ровно 600), в то же время по способу заполнения площади все варианты различны. Итак, мы представили конструктивный мультиплет, а именно, квартет, соединяющий воедино, судя по способам заполнения площади квадрата, четыре совершенно различных варианта измерения. И в то же время, объединяя четыре различных варианта, данный квартет должен выдать при любом исходе один и тот же алгебраический результат – одну и ту же величину площади квадрата. В целом, это и будет содержательным представлением того случая, упоминавшегося выше, когда разные исходы совершенно симметрично объединены в один мультиплет, из чего можно будет сделать вывод об эквивалентности площади целого треугольника $\Delta 345$ площадям пары его соответствующих частей (что отсутствовало у шумеров).

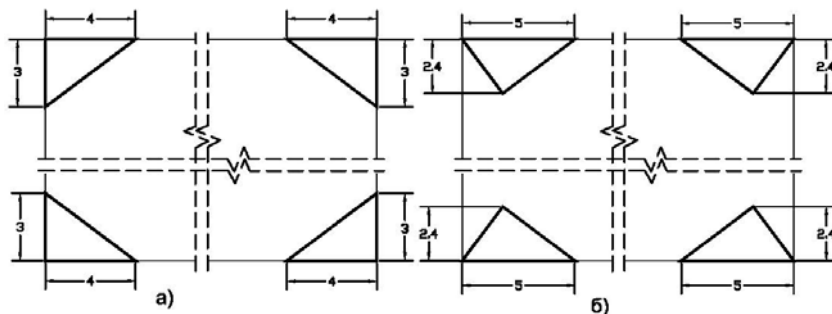


Рис.8. Ориентация треугольников $\Delta 345$, формообразующих симметричные множества покрытия площади квадрата.

Теперь рассмотрим, насколько эффективным будет такое представление при доказательстве исходной теоремы. Как уже упоминалось, исходная теорема является частью более общей теоремы (доказанной Пифагором). В представленной группе симметрий всех поворотов $\Delta 345$ выделим две

самостоятельные группы поворотов, с каждой из которых связана одна из двух возможных ортотропных метрик, вносимых инструментом. Это будет группа поворотов, приводящая к замене одного катета на другой и группа, приводящая к взаимной замене гипотенузы и высоты.

Для доказательства исходной теоремы покажем, что результат измерения площади произвольного прямоугольника системы шумеров не зависит от того, какая из групп (как целый объект, т. е. без рассмотрения внутренних симметрий в каждой из них) приведенных симметрий была использована в процессе измерения, т. е. на данном этапе необходимо привести к симметрии две различные ортотропные метрики. Это будет сделано в данном параграфе. Вторым этапом будет доказательство утверждения о независимости результата измерения вообще от ортотропности метрики, вносимой инструментом (т. е. от внутренней симметрии в любой из групп). Оно будет приведено в следующем параграфе.

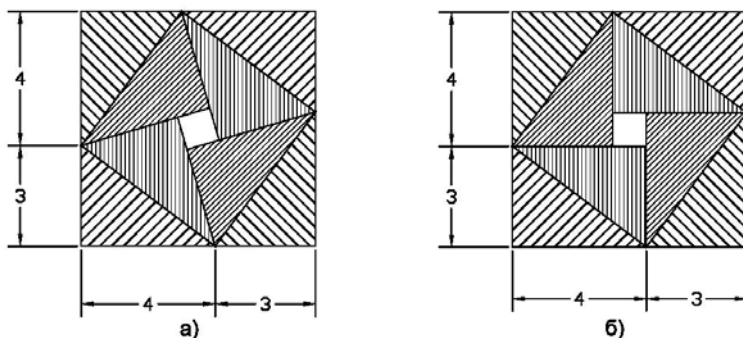


Рис.9. Две формы инварианта I_{345} группы симметрий дискретных поворотов мерительного инструмента шумеров.

В приложении к данному этапу можно отметить то, что является наиболее важным в изложенном представлении. Из приведенных на Рис.8 треугольников можно составить две наименьшие формы инварианта рассматриваемых двух групп геометрических симметрий (Рис.9а,б)²⁰. Каждая из них представляет собой квадрат со стороной, равной сумме катетов, и вписанными в него восемь $\Delta 345$ (в большем квадрате треугольники располагаются по схеме Рис.8а, в меньшем – Рис.8б), в центре которого имеется также еще и квадрат малый. Обе формы содержат все возможные способы размещения треугольников $\Delta 345$ в квадрате, связанные с имеющимися у него внутренними углами. Фактически они отличаются зеркально симметричными способами заполнения внутренних квадратов, о чем можно судить по ориентации, например, катетов любого из внутренних треугольников относительно его гипотенузы.

На любую из форм будем ссылаться, как на инвариант I_{345} математики шумеров, содержащий все положения $\Delta 345$, подлежащие симметризации, сконцентрированные в наименьшем из возможных квадратов.

О данном инварианте можно сказать следующее. Во-первых, сторону малого (незаштрихованного) квадрата, расположенного в центре инварианта, в сравнении со сторонами $\Delta 345$, представляет не многочастичный, а единичный (одночастичный) отрезок, что следует из разности длин²¹ катетов. Во-вторых, как ни располагай внутри данного квадрата описанными выше способами треугольники $\Delta 345$ (Рис. 7), всю без остатка его площадь, как известно, заполнит целое количество $\Delta 345$, в точности 600 штук, масштаба на один порядок меньше исходного. Стоит напомнить, что площадь $\Delta 345$ на один порядок меньше исходного $\Delta 345$ будут составлять 60 подобных ему треугольников (а не один, который будет на два порядка меньше исходного), у которых каждый из катетов уменьшен в 60 раз относительно соответствующего катета исходного $\Delta 345$.

В-третьих, целым числом центральных квадратов инварианта измеряется и площадь собственно $\Delta 345$ (площадь прямоугольника, составленного из двух $\Delta 345$, заполняют ровно двенадцать центральных квадратов). В-четвертых, площадь всего инварианта I_{345} измеряется также целым числом площадей единичного квадрата, их будет сорок девять, что проверяется непосредственным размещением единичных квадратов внутри инварианта.

При доказательстве исходной теоремы инварианту I_{345} , состоящему из таких элементов, как (i) квадрат, помещенный в центре, (ii) треугольники $\Delta 345$, а также (iii) квадраты, которые образуют четверки треугольников $\Delta 345$, отводится роль в качестве ресурса непротиворечивой редукции метрики нового измерительного инструмента, необходимость введения которого обусловлена методом доказательства. Содержательно это значит, что, во-первых, для вновь вводимого измерительного инструмента все площади объектов, составляющих композицию любой из форм должны быть штатными, т. е. не должно оставаться объектов с неустановленной площадью. Во-вторых, непротиворечивость метрики будет обеспечена в том случае, если площадь любого элемента инварианта I_{345} , измеренная новым инструментом будет соответствовать площади того же объекта, измеренной треугольником $\Delta 345$.

П.6.2. Постановка промежуточной задачи

В связи с вышеизложенным для доказательства теоремы необходимо скорректировать план рассуждений и сформулировать промежуточную задачу. С этой целью еще раз проанализируем всю систему.

Ее фундаментом является измерительный инструмент $\Delta 345$, т. к. именно его свойства дают возможность установить изоморфизм между системами измерения (алгебрами) двух различных типов величин (углов и площадей) и

алгеброй 60-значного позиционного счисления, с аддитивной операцией (сложения), что и определяет имеющуюся математику в целом. При анализе соразмеримости площадей треугольников и квадратов внутри инварианта I_{345} мы оперировали не площадью S_{345} треугольника $\Delta 345$, а площадью $S_{e0} = S_{D^2}$ единичного квадрата, которая в шесть раз меньше первой. Применение в качестве измерительного инструмента квадрата с площадью, равной S_{e0} , влечет нарушение всей конвенции шумеров, потому что свойств квадрата недостаточно для установления изоморфизма между двумя метриками. Поэтому для последующего доказательства сначала необходимо решить промежуточную задачу: *найти, если это возможно, геометрическую форму с площадью S_{e0} , которой можно будет заменить $\Delta 345$, т. е. найти такой измерительный инструмент, применение которого позволит нам поддерживать не нарушая исходный изоморфизм шумеров (корреляцию метрик углов и площадей).*

Отправными данными для поиска будет все та же система измерения шумеров с главным инструментом – треугольником $\Delta 345$, имеющим площадь S_{345} , инвариант (соразмеримости $\Delta 345$ с квадратом) I_{345} (Рис.9а,б), площадь S_{e0} квадрата со стороной эталонной (одночастичной) длины D .

Первым делом необходимо обобщить два различных поворота $\Delta 345$ на его острые углы, поскольку с ними связана ориентация ортогональной пары гипотенуза-высота относительно пары катетов. В инварианте I_{345} данные степени свободы представлены различной ориентацией внутренних треугольников. Предполагается, что минимально необходимая степень абстракции от каждого из двух рассматриваемых поворотов заключается в переходе от $\Delta 345$ к произвольному прямоугольному треугольнику. Действительно, треугольник $\Delta 345$ является одним из объектов класса всех прямоугольных треугольников, которые представляют все возможные пары острых углов. Кроме того, он сохраняет-таки одну степень свободы (повороты на прямой угол, т. е. допускает замену каждого катета на ему ортогональный), симметризацию которой можно игнорировать без ущерба доказательству (на данном этапе), что оговаривалось выше.

Фактически, в процессе поиска мы прибегаем к типовому способу симметризации, имеющему многовековую историю. Чтобы логически обосновать правомерность, например, некоторого действия в частном случае, приводятся условия, при которых появляется возможность осуществления данного действия в более общем случае. Приведем анализ принципов типичной реализации такого способа на конкретном примере. Для доказательства данной теоремы необходимо найти форму (с определенными свойствами), которой можно измерять квадрат, состоящий из однотипных объектов, треугольников $\Delta 345$, ориентированных в квадрате в соответствие с одним из двух их характерных острых углов. С этой целью мы обобщаем данный конкретный случай измерения квадрата, состоящего из $\Delta 345$, до общего. Поскольку множество всех пар острых углов (в сумме равных прямому углу) возможно биективно

связать с множеством прямоугольных треугольников, мы предполагаем, что некий квадрат может быть заполнен копиями любого объекта из множества прямоугольных треугольников. В подобном множестве пара острых углов треугольника $\Delta 345$ будет только одним элементом из множества других. Поэтому мы и рассматриваем все возможные пары таких углов (и прямоугольные треугольники) совершенно симметрично.

При этом нас интересует только одно свойство треугольников – наличие прямого угла. Характерно то, что в процессе обобщения мы не задаемся вопросом возможна ли конструктивная реализация каждого элемента такого множества, несмотря на то что это может быть крайне важным для последующей верификации. Мы берем, как данность, уже полученный ранее вывод: в математике шумеров существует ничем не ограничиваемая возможность конструктивного воспроизведения прямоугольных треугольников с различающимися острыми углами. И в последующем доказательстве будем ссылаться только на него. Ведь если впоследствии потребуется верифицировать наше утверждение на каком-то прямоугольном треугольнике, то он с необходимостью должен быть представлен для подобного рода экспертизы в графическом виде, т. е. должен быть уже получен в результате исполнения определенного геометрического алгоритма, а следовательно, будет одним из класса конструктивных геометрических объектов.

Именно поэтому возможность конструктивного воплощения каждого элемента всего множества, как и многие другие свойства прямоугольных треугольников, для нас несущественны и не обсуждаемы в рамках текущего доказательства. В связи с этим, характеризуя приводимый метод симметризации, вероятно, более корректным будет выражение: «обобщение частного случая до условно-общего». Продолжая доказательство, обычно в таких случаях ограничиваются построением произвольного элемента, который, конечно, является (поскольку его уже построили) конструктивно воспроизводимым, и все последующие этапы верификации демонстрируются на нем. В приложении к данной теореме, если теперь заполнив (подходящий) квадрат копиями произвольного прямоугольного треугольника (т. е. с произвольной парой острых углов), в соответствующих ему ориентациях, мы найдем некоторую форму и предъявим способ измерения ею произвольного прямоугольного треугольника, а следовательно, и всего квадрата, то тем самым заведомо обеспечим измеримость ею и треугольника $\Delta 345$ и соответствующего ему квадрата, а также и произвольного равнобедренного треугольника. Если данная форма будет удовлетворять еще и требуемым свойствам, то она, не нарушая имеющегося изоморфизма в математике шумеров, вполне может заменить измерительный инструмент шумеров. К этому можно добавить, что приведенная цепочка рассуждений является всего лишь другой формой изложения все того же общего метода при доказательстве теорем данного типа в приложении к конкретному случаю.

Итак, выбрав обобщенный объект, перейдем к анализу процедур измерения его параметров. В общем случае произвольный прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, измеренный треугольником $\triangle 345$, будет иметь площадь, величина которой выражается (путем суммирования его заполняющих треугольников $\triangle 345$) условно-целым числом в 60-значном счислении. Длина каждого катета $\triangle ABC$ будет выражена также условно-целым числом (того же счисления), отражающим количество расположенных вдоль него катетов или гипотенуз или высот $\triangle 345$. Поэтому для $\triangle ABC$, если он не равнобедренный, может быть составлена геометрическая фигура, подобная инварианту I_{345} (Рис.10), отличающаяся от него лишь длинами сторон внешнего и центрального квадратов: первая будет равна сумме катетов $\triangle ABC$, а вторая – их разности. Для неравнобедренного $\triangle ABC$ данная фигура будет также инвариантом группы симметрий всех его дискретных поворотов, связанных с его собственными внутренними углами. При равенстве катетов $\triangle ABC$ их разность становится равной нулю и центральный (незаштрихованный) квадрат исчезает.

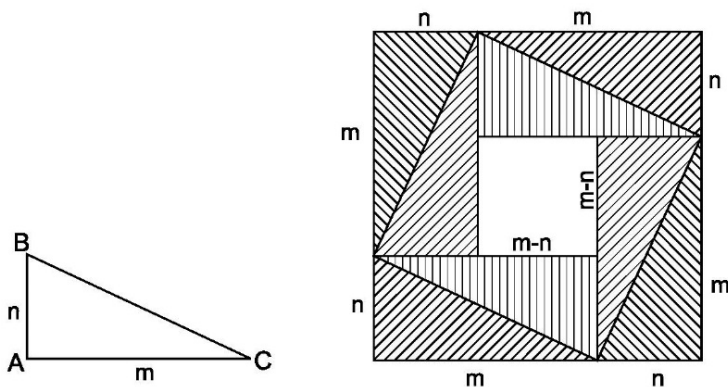


Рис.10. Деформация I_{345} к инварианту $I_{\perp}$ произвольного прямоугольного не равнобедренного треугольника ABC .

С учетом последнего факта наиболее общим геометрическим инвариантом $I_{\perp}$ для всего класса прямоугольных треугольников в системе шумеров, неизменяющимся при переходе от равнобедренных к неравнобедренным и обратно, является фигура (Рис.11), составленная из квадрата, сторона которого равна сумме катетов $\triangle ABC$, и вписанных в него по его периферии четырех $\triangle ABC$. Из сравнения фигур на Рис.11 и Рис.12 можно заключить, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе (внутренний квадрат на первом из них), равна сумме площадей квадратов (незаштрихованы на втором из них), построенных на катетах $\triangle ABC$.

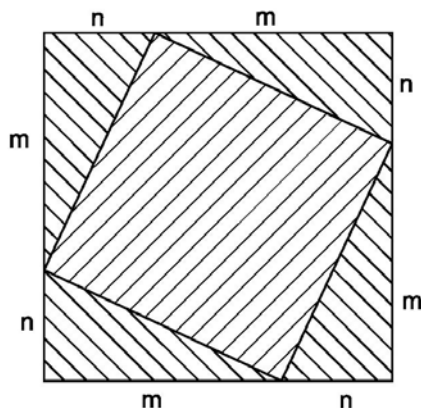


Рис.11. Геометрический инвариант $I_{\perp}$ для всего класса прямоугольных треугольников.

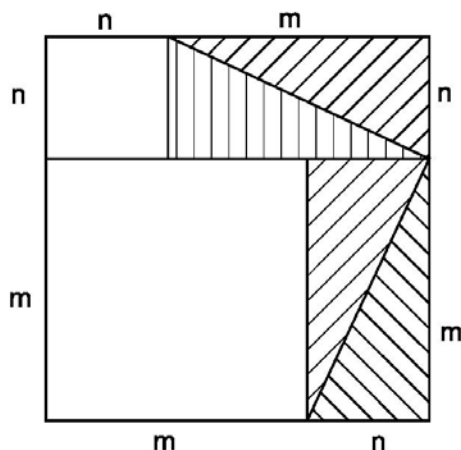


Рис.12. Соразмеримость площади прямоугольного треугольника с площадью геометрического инварианта $I_{\perp}$.

Отсюда следует, что для непротиворечивого расширения математики шумеров новыми ресурсами вновь вводимый измерительный инструмент должен иметь специфические свойства, необходимые не только для установления изоморфизма между алгебрами, подобно тем, что имеются у треугольника $\Delta 345$, но и для обеспечения непротиворечивой редукции в каждой из изоморфных алгебр связанной с ним метрики к метрике шумеров, обусловленной инвариантом $I_{\perp}$ и выражаемой алгебраически в следующем виде

$$S_{K1} + S_{K2} = S_{\Gamma}, \quad (6.1)$$

где $S_{K1}; S_{K2}; S_{\Gamma}$ – полиморфные объекты, соответствующие площадям квадратов, восстановленных на каждом катете (они произвольно помечены индексами K1 и K2) и гипотенузе соответственно при том, что значениями данных объектов в равной степени может выступать как тройка элементов носителя метаалгебры, так и тройка элементов носителя алгебры вербальной. Все вместе можно рассматривать как уточнение промежуточной задачи по содержанию.

П.6.3. Необходимые ресурсы для решения промежуточной задач

В данном конкретном случае требуется замена инструмента $\Delta 345$ другой геометрической формой, имеющей площадь S_{ed} . Во-первых, аддитивные расчеты (для ускорения можно использовать и мультипликативные, хотя они еще не являются легитимными в общей системе) показывают, что основанием счисления, если, конечно, пользоваться также позиционным счислением, должно быть число в шесть раз меньше шестидесяти, т. е. десять. Во-вторых, данная форма должна выстраиваться средствами геометрии шумеров, т. е. конструктивно. В-третьих, она должна содержать все элементы, необходимые для деления полного угла на 10 равных частей, что позволит нам построить правильный 10-угольник, необходимый для последующего биективного отображения углов и чисел десятичного счисления. В-четвертых, поскольку это связано с обобщением двух конкретных ортотропных метрик инструмента шумеров в одну произвольно ортотропную, то искомая форма должна быть, по крайней мере, прямоугольником. И, в-пятых, она должна иметь площадь S_{ed} . Это минимально необходимый содержательный перечень свойств новой формы, которые позволят нам использовать её для измерения площади произвольного прямоугольного треугольника в единицах S_{ed} и обусловят возможность (изоморфного) биективного формирования результатов измерения как площадей, так и углов в числа 10-значного позиционного счисления. Поэтому все, что требуется, так это найти форму-агрегатор всех перечисленных свойств.

Для достижения указанной цели воспользуемся потенциалом, имеющимся внутри системы шумеров. Рассмотрим хорошо известную процедуру деления окружности на пять равных частей несколько подробнее и в другом ракурсе. Пусть имеется эталонный отрезок длиной D , заданный, например, некоторым раствором циркуля. Построим прямоугольный треугольник ΔABC с катетами $AB = D$ и $BC = 2D$. Из вершины B прямого угла $\angle ABC$ восстановим окружность радиуса $BC = 2D$ (Рис.13)²². Затем на продолжении катета AB построим отрезок AE равный гипотенузе AC так, чтобы точка B оказалась между точками A и E , для чего воспользуемся окружностью радиуса AC ,

изображенной на рисунке штриховой линией. Стороны полученного прямоугольного $\triangle CBE$ являются искомыми элементами, необходимыми для деления окружности на пять и десять равных частей. Катет $BC = 2D$ указывает радиус окружности, подлежащей делению, а гипотенуза CE и катет BE равны соответственно сторонам правильного пяти- и десятиугольника, вписываемых в данную окружность.

Таким образом, вспомогательной формой для деления окружности радиуса $BC = 2D$ на десять равных частей является прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ с катетами $AB = D$ и $BC = 2D$. В дальнейшем будем называть любой треугольник с отношением катетов 2:1 Золотым Треугольником (ЗТ). Отметим, что сторона вписанного правильного десятиугольника равна разнице двух отрезков: гипотенузы $AC = AE$ и катета $AB = D$, а в два раза меньший отрезок, будет такой же мерой для окружности эталонного радиуса длиной D .

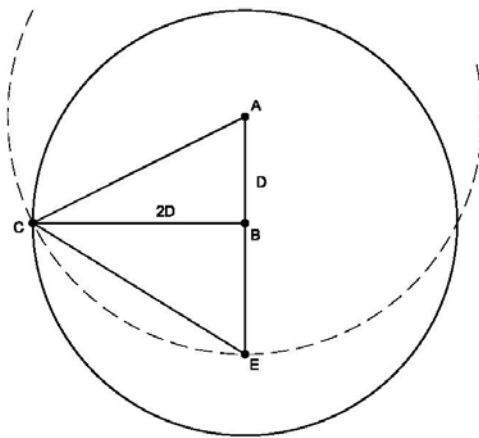


Рис.13. Построения отрезков CE и BE , равных стороне соответственно правильного 5- и 10-угольника, вписанного в окружность радиуса BC .

Восстановим окружность *диаметра* D с центром в середине гипотенузы AC Золотого Треугольника $\triangle ABC$ (Рис.14). Она поделит гипотенузу на три отрезка: средний $FG = D$ и два равных крайних $AF = GC < D$, обозначим их длину равной $\Phi - D$, т. е. $AF = GC = \Phi - D$, тогда $AG = FC = \Phi$. Данная схема деления гипотенузы называется Золотым Сечением (что соответствует и современной терминологии: см. Приложение П.7). Как было отмечено выше, отрезок $AF = GC = \Phi - D$ равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса D .

Можно показать, что отрезок D , в свою очередь, равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиуса Φ . Для этого необходимо или непосредственно строить соответствующие окружность и многоугольник, воспользовавшись построениями на Рис.13 или, построив

прямоугольный треугольник с катетами Φ и 2Φ и окружность диаметра Φ в середине гипотенузы, убедиться, что построенная окружность отсечет от гипотенузы два крайних отрезка длиной D каждый. Кроме того, тем же конструктивным способом можно выстроить окружность радиуса $\Phi + D$ и показать, что стороной правильного десятиугольника, вписанного в нее, является отрезок длиной Φ .

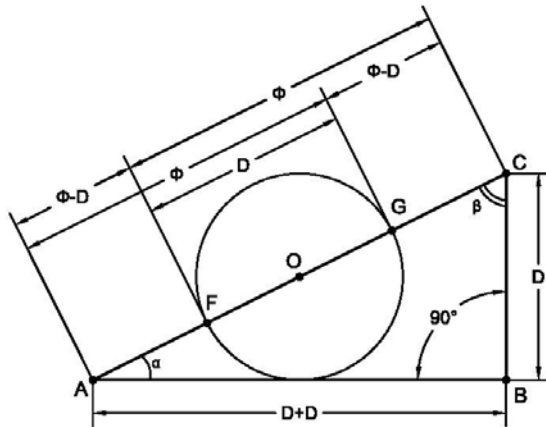


Рис.14. Сечение окружностью произвольного диаметра D гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами D и $2D$.

Итак, при заданной эталонной длине D два инструмента, отрезки Φ и $\Phi - D$, получаемые конструктивным методом в рамках геометрии шумеров, позволяют делить окружность на десять равных частей. Кроме способа деления окружности необходимо указать правило построения теми же инструментами площадей соответствующей кратности. Это достигается, например, делением на десять равных частей самих линейных инструментов Φ и $\Phi - D$. Чтобы убедиться в наличии такой возможности, построим $\Delta 345$ на базе одночастичного отрезка длиной не D , как строилось прежде, а длиной Φ или $\Phi - D$, тогда с помощью циркуля (см. выше свойства $\Delta 345$) можно выделить часть наименьшей высоты построенного треугольника, которая будет равна $0,1 \cdot \Phi$ или $0,1 \cdot (\Phi - D)$ соответственно. Таким образом, приведенные инструменты (совместно с $\Delta 345$) позволяют нам поддерживать десятикратное масштабирование каждого из двух отрезков. Из сказанного следует, что для построения оси абсцисс возможны два взаимоисключающих варианта: формировать ее или из отрезков Φ или из отрезков $\Phi - D$.

Как и для произвольного прямоугольного треугольника, в соответствие с инвариантом $I_{\perp}$ для Золотого Треугольника ΔABC с катетами $AB = D$ и $BC = 2D$, квадрат, построенный на гипотенузе AC равен сумме квадратов, построенных на катетах $AB = D$ и $BC = 2D$. С другой стороны, построив

окружность диаметра D с центром в середине гипотенузы AC (см. приложение П.7 Рис.22), можно убедиться, что, согласно геометрической модели, в квадрат гипотенузы AC в точности вписываются: в центре – один квадрат со стороной D , а по периферии – четыре прямоугольника со сторонами Φ и $\Phi - D$. Следовательно, в соответствии с геометрической составляющей инварианта $I_{\perp}$, прямоугольник со сторонами Φ и $\Phi - D$ имеет искомую площадь S_{e0} , т. е. равную площади S_{D^2} эталонного квадрата.

Для непротиворечивой редукции возникающей метрики к метрике шумеров необходимо выразить в соответствующем виде и алгебраическую составляющую инварианта $I_{\perp}$. Данное требование будет соблюдено, если перейдем к десятичной позиционной системе, заменив измерительный инструмент $\Delta 345$ (с площадью S_{345}) Золотым Прямоугольником (ЗП) со сторонами Φ и $\Phi - D$, площадь $S_{\Phi \cdot (\Phi - D)}$ которого в точности равна S_{e0} , т. е. $S_{\Phi \cdot (\Phi - D)} = S_{e0}$.

В этом случае в рамках десятичного счисления часть необходимых условий для сохранения концепции шумеров (т. е. изоморфизма между тремя алгебрами с аддитивными операциями), связанная с непротиворечивой редукцией метрики, будет соблюдена.

Теперь проверим, насколько успешно мы справились с решением промежуточной задачи в другой ее части. Найденная форма, Золотой Прямоугольник, является ортотропной геометрической формой. Она отлична от формы $\Delta 345$ и состоит из элементов, позволяющих построить правильный десятиугольник, тривиальная триангуляция которого определяет новый единичный угол. В результате тривиальной триангуляции правильного десятиугольника мы, как и прежде, получим множество треугольников, два множества параметров которых, множество всех углов и множество всех площадей равнобедренных треугольников (элементов триангуляции), могут быть взаимно однозначно сопоставлены как друг другу, так и множеству всех чисел десятичного позиционного счисления. Имея возможность конструктивно воспроизводимого деления отрезков на десять равных частей, каждому из этих множеств может быть также взаимно однозначно сопоставлено множество всех площадей прямоугольников новой системы.

Таким образом, можно считать, что промежуточная задача решена и искомой формой-агрегатором со всеми вышеперечисленными свойствами является ЗП. Фактически конструктивным способом введена новая метрика.

Теперь мы имеем измерительный инструмент, ортотропность которого никоим образом не имеет отношения к внутренним острым углам $\Delta 345$. Заполнив, согласно теореме, заданный произвольным образом прямоугольник системы шумеров новым измерительным инструментом, можно измерить его площадь. Значение полученное в десятичном счислении может быть переведено в шестидесятизначное, которое будет соответствовать значению площади данного прямоугольника, полученному в результате ее измерения треугольником $\Delta 345$ при размещении, например, каждого его катета вдоль одной

из сторон измеряемого прямоугольника. Дополнительная верификация данного факта производится через непосредственное замещение каждого шести прямоугольников ЗП одним треугольником $\Delta 345$. Из тождественности сравниваемых результатов измерения площади произвольного прямоугольника системы шумеров двумя различными инструментами следует вывод о том, что тот же результат мы получим, размещая теперь вдоль ортогональных сторон измеряемого прямоугольника гипотенузу и высоту измеряющего треугольника $\Delta 345$, а также равенство композиции площадей каждой пары «осколочных» частей, размещенных вдоль боковых сторон измеряемого прямоугольника, полной площади треугольника $\Delta 345$ того же масштаба. Успешная верификация данного вывода на геометрической модели подтверждает истинность утверждения теоремы. Тем самым теорема доказана.

П.6.4. Альтернативная конвенция и ее преимущества

С использованием новой формы конвенция изоморфизма шумеров при сохранении их концепции претерпевает весьма значительное изменение: на смену основному измерительному инструменту $\Delta 345$ приходит ЗП, а на смену 60-значному позиционному счислению приходит десятичное, под симметрии которого переформируются и множества углов и площадей. В дальнейшем будем различать эти конвенции, ссылаясь на последнюю, как на альтернативную (сокращенно, АК).

Новой конвенции соответствует и несколько измененная математика. Несомненно, что новая *геометрия* является расширением геометрии шумеров. Если у шумеров использовался один не выражаемый числом геометрический элемент – эталон D , то в новой геометрии введены еще два новых линейных элемента, Φ и $\Phi - D$, не говоря уже о новой геометрической форме и ее свойствах. Однако расширение *алгебры*, возможно, не столь очевидно и для установления данного факта требуется дополнительный анализ. Несмотря на то, что оно не является необходимым для доказательства исходной теоремы и будет востребованным только лишь на дальнейших этапах расширения математики шумеров, оценим его преимущества и включим соответствующие ресурсы в математику новой конвенции сейчас, поскольку именно данная конвенция явилась источником будущей деформации математики углов и площадей шумеров.

Одно из существенных отличий инструмента шумеров от ЗП – в наличии дополнительной асимметрии формы в $\Delta 345$. Для покрытия множеством одинаковых объектов площади одного и того же измеряемого прямоугольника, как хорошо известно, прямоугольников требуется в два раза меньше, чем прямоугольных треугольников, если каждый катет любого из последних равен

соответствующей стороне измеряющего прямоугольника. И все потому, что диагональ любого прямоугольника делит его на два одинаковых треугольника. Но самое важное с точки зрения математических процедур то, что треугольники, составляющие прямоугольник, повернуты внутри него друг относительно друга так, что длину любой стороны прямоугольника составляет катет только одного из двух треугольников. Поэтому, вычисляя площадь произвольного прямоугольника через подсчет катетов треугольников, расположенных вдоль двух его ортогональных сторон, с последующим перемножением полученных чисел, мы непременно должны удваивать результат умножения. В исключительно аддитивной математике шумеров данный факт не играет никакой существенной роли. Например, измерение произвольного отрезка можно осуществлять совокупностью $\Delta 345$, суммируя все $\Delta 345$, чьи стороны (а соответственно и обе вершины) находятся на измеряемом отрезке, а затем добавлять к ним все $\Delta 345$, чьи одиночные вершины, как точки, принадлежат также измеряемому отрезку.

Инструмент альтернативной конвенции, обладая прямоугольной формой, также позволяет вычислять длину произвольного отрезка через (аддитивный) подсчет только количества сторон ЗП, размещаемых вдоль измеряемого отрезка. Однако, будучи наследницей аддитивной математики шумеров, математика АК предоставляет в то же время ещё и преимущества быстрого счета в своей алгебре, когда вместо долгого и утомительного подсчета каждого одиночного объекта намного легче и быстрее вычислить их общее количество умножением на число рядов, предварительно выстроив объекты в одинаковые ряды, подобно клеточкам на шахматной доске.

Измерим площадь S_{ABCE} произвольного прямоугольника $ABCE$ с основанием AB новым инструментом. Измерительную среду системы АК можно создать двумя взаимоисключающими друг друга способами. В первом случае ось абсцисс состоит из счетной совокупности отрезков Φ , ось ординат – из отрезков $(\Phi - D)$ инструмента ЗП. Во втором, наоборот, ось абсцисс – из отрезков $(\Phi - D)$, ордината – из отрезков Φ того же прямоугольника.

Воспользуемся первым способом. Разместим основание AB прямоугольника на оси абсцисс. а высоту BC направим вдоль ординаты. Простым сложением получим, что вдоль AB разместится m штук ЗП, т. е. m площадей $S_{\Phi \cdot (\Phi - D)}$, а вдоль высоты BC – n штук, здесь m и n – условно-целые числа десятичного счисления АК, каждое из которых соответствует определенной композиции площадей $S_{\Phi \cdot (\Phi - D)}$ в геометрической модели.

Результатом измерения площади S_{ABCE} будет сумма общего количества ЗП, площадью $S_{\Phi \cdot (\Phi - D)}$ каждый, покрывающих $ABCE$. Данная сумма может быть вычислена подсчетом количества ЗП в одном из рядов, а затем сложением всего количества (одинаковых) рядов; при этом искомая площадь прямоугольника $ABCE$ будет вычисляться, например, по следующей формуле:

$$S_{ABCE} = \sum_n [\sum_m [S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}]] = k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}. \quad (6.2)$$

Данное выражение, согласно ранее введенным обозначениям, соответствует следующим операциям:

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= \\ &= \underbrace{\underbrace{(S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} + \dots + S_{\Phi \cdot (\Phi-D)})}_m + \dots + \underbrace{(S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} + \dots + S_{\Phi \cdot (\Phi-D)})}_m}_n = \\ &= k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} \end{aligned} \quad (6.3)$$

или

$$S_{ABCE} = \underbrace{m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} + \dots + m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}}_n = k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}. \quad (6.4)$$

В них, как и прежде, m и n – условно-целые числа десятичного счисления, указывающие количество одинаковых (слагаемых) прямоугольников, площадью $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ и $m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ соответственно. Следует иметь в виду, что для более корректного отображения вышеприведенных выражений вместо $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$, т. е. вместо константы метаалгебры АК, необходимо использовать биективную ей константу из вербальной алгебры – символ « 1_A » с индексом, указывающим принадлежность константы к алгебре АК; кроме того, данную единицу вообще можно не указывать, а потому в более корректной форме два последних выражения должны быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= \underbrace{\underbrace{(1_A + \dots + 1_A)}_m + \dots + \underbrace{(1_A + \dots + 1_A)}_m}_n = k; \\ S_{ABCE} &= \underbrace{m + \dots + m}_n = k. \end{aligned}$$

Тем не менее, имея это в виду, будем и дальше употреблять константу $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ в подобных выражениях с единственной целью, чтобы она явно указывала «вес» единичного символа вербальной алгебры или, по-другому, указывала единицу измерения величины S_{ABCE} .

Не лишним будет напомнить здесь, что введение пустого элемента и пустой операции в натуральный ряд приводит в системе шумеров к равенству количества слагаемых количеству операций, требуемых для их сложения. Для установления нуля необходима пустая операция (инициализация), для установления первого ненулевого слагаемого в выражении необходимо к нулю

прибавить это слагаемое, что и будет являться первой операцией сложения. Поскольку альтернативная конвенция наследует систему шумеров, то выражение (6.3) должно иметь следующий вид:

$$S_{ABCE} = \emptyset_A + \underbrace{(\emptyset_A + 1_A + \dots + 1_A)}_m + \dots + \underbrace{(\emptyset_A + 1_A + 1_A + \dots + 1_A)}_m = k$$

или

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= \\ &= 0 + \underbrace{(0 + S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} + \dots + S_{\Phi \cdot (\Phi-D)})}_m + \dots + \underbrace{(0 + S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} + \dots + S_{\Phi \cdot (\Phi-D)})}_m = \\ &= k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где в явном виде выписаны все необходимые операции и слагаемые. Таким образом, здесь еще раз отмечено, что числа m и n соответствуют одновременно и количеству необходимых непустых операций, и количеству не нулевых слагаемых в любом аддитивном выражении. Понятно, что запись в форме (6.2) или (6.3) или (6.4) является всего лишь допустимым эквивалентным сокращением выражения (6.5).

Из аддитивности всех операций в (6.2) следует, что для процедуры получения величины $k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ площади S_{ABCE} с помощью n операций сложения одинаковых объектов $m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ существует цепочка обратных аддитивных операций – процедура разложения площади S_{ABCE} на n одинаковых рядов равных прямоугольников, причем каждый ряд имеет площадь $m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$, т. е. содержит в точности m равных прямоугольников $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$.

Данная процедура соответствует совокупности из n следующих простых аддитивных операций:

$$\begin{aligned} k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} - m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} &\equiv (k - m) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = k_1 \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} \\ (k_1 - m) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} &= k_2 \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} \\ &\dots \dots \dots \\ (k_{n-1} - m) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} &= m \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Действительно, каждый раз вычитая одинаковый ряд прямоугольников $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ в количестве m штук в каждом, можно, следуя методу доказательства древних, «отставить» первый вычитаемый ряд в сторону, а затем, по мере вычитания рядов, «пристраивать» вновь вычитаемые ряды к первому, таким способом будут «перемещены в сторону» все без исключения прямоугольники

$S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$, они по количеству все вместе будут представлять новый прямоугольник с площадью $k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ и состоять из n рядов, в каждом из которых содержится в точности m равных прямоугольников $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$.

Для введения операций быстрого счета – умножения и деления – переобозначим используемые переменные для основания m , высоты n и площади k , чтобы в явном виде указать способ их метризации: $m \equiv m_{\Phi}$, $n \equiv n_{\Phi-D}$, $k \equiv k_{\Phi}$. Для сокращения совокупности операций в выражении (6.5) введем некоммутативную бинарную операцию умножения

$$n_{\Phi-D} \times m_{\Phi} = k_{\Phi} \quad \text{или} \quad (n_{\Phi-D} \times m_{\Phi}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = k_{\Phi} \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}, \quad (6.7)$$

в которой первым сомножителем является высота, вторым – основание измеряемого прямоугольника, а результатом является его площадь, при условии, что абсцисса измерительной среды сформирована стороной Φ инструмента ЗП. Для сокращения совокупности операций в выражении (6.6) введем некоммутативную бинарную операцию деления

$$m_{\Phi} = k_{\Phi} / n_{\Phi-D} \quad \text{или} \quad m_{\Phi} \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = (k_{\Phi} / n_{\Phi-D}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}, \quad (6.8)$$

в которой делимым является площадь, делителем – высота измеряемого прямоугольника, а результатом является его основание, при условии, что абсцисса измерительной среды сформирована стороной Φ инструмента ЗП.

В метаалгебре при данном способе формирования измерительной среды для пары взаимобратных операций (6.7) и (6.8) может быть представлена соответствующая пара взаимобратных операций (алгоритмов), которые также назовем операциями умножения и деления, соответственно.

Отметим, что по своей природе обе операции являются аддитивными.

Кроме того, во множестве всех прямоугольников с выделенным основанием, обладающих площадью, результат операции (6.7) для заданных параметров $n_{\Phi-D}$ и m_{Φ} биективно соответствует одному прямоугольнику с площадью k_{Φ} и основанием m_{Φ} ; как и результат соответствующей операции метаалгебры при заданных сторонах прямоугольника в приведенной измерительной среде. Также существует биекция между результатом операции (6.8) при заданных параметрах $n_{\Phi-D}$ и k_{Φ} и прямоугольником с площадью k_{Φ} и основанием m_{Φ} из множества всех прямоугольников с выделенным основанием, обладающих площадью. Точно также существует биекция и между результатом соответствующей операции метаалгебры при заданной площади и высоте прямоугольника в приведенной измерительной среде.

Аналогично могут быть введены и операции умножения и деления в измерительной среде, организованной вторым способом. В частности, введем некоммутативную бинарную операцию умножения

$$u_{\Phi} \times v_{\Phi-D} = t_{\Phi-D} \quad \text{или} \quad (u_{\Phi} \times v_{\Phi-D}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = t_{\Phi-D} \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} \quad (6.9)$$

и некоммутативную бинарную операцию деления

$$v_{\Phi-D} = t_{\Phi-D} / u_{\Phi} \quad \text{или} \quad v_{\Phi-D} \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = (t_{\Phi-D} / u_{\Phi}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}, \quad (6.10)$$

в которых числа десятичного позиционного счисления $t_{\Phi-D}$, u_{Φ} , $v_{\Phi-D}$ представляют соответственно площадь, высоту и основание измеряемого прямоугольника при условии, что абсцисса измерительной среды сформирована стороной $\Phi - D$ инструмента ЗП. Для последней пары взаимообратных операций, принадлежащих вербальной алгебре, может быть приведена соответствующая пара взаимообратных операций в метаалгебре. А также не трудно предъявить условие биективности их результатов с одним из прямоугольников с выделенным основанием и площадью.

Возьмем тот же прямоугольник $ABCE$, для которого в (6.2) было получено значение площади $S_{ABCE} = k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$, и выберем у него теперь в качестве основания сторону BC , а в качестве высоты – сторону AB . Измерим его площадь измерительной средой, в которой абсциссу формирует сторона $\Phi - D$ инструмента ЗП. Подсчитав количество ЗП, получим те же числа n и m , которые будут представлять теперь количество ЗП в одном ряду и количество таких одинаковых рядов соответственно. Поэтому измерение площади S_{ABCE} даст тот же результат:

$$S_{ABCE} = \sum_m [\sum_n [S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}]] = k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}. \quad (6.2')$$

Единственное отличие в последнем выражении от (6.2) заключается в перестановке индексов суммирования n и m , поскольку мы договорились, что внутренний индекс должен соответствовать длине основания. В связи с этим формально в выражениях (6.7) и (6.9) от перемены мест сомножителей произведение не изменится:

$$(n_{\Phi-D} \times m_{\Phi}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = (m_{\Phi} \times n_{\Phi-D}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = k_{\Phi} \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}. \quad (6.11)$$

Однако в каждом случае вторым сомножителем является количество ЗП в ряду вдоль основания прямоугольника, а первым – количество таких одинаковых рядов, т. е. высота. Отсюда следует, что и в выражениях (6.8) и (6.10) формально можно переставлять делитель и частное. Но, по существу, частным является величина основания прямоугольника площади $k \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$, соответствующая результату, полученному или в одной, или в другой измерительной среде.

Кроме сказанного, математика с альтернативной конвенцией предоставляет дополнительные преимущества в процедурах, связанных с переносом запятой в десятичном числе. Данная операция является часто востребованной в практических вычислениях. Остановимся также более подробно на обосновании связанного с ней расширения математики.

Вернемся к конвенции шумеров с аддитивной алгеброй. В той математике совершенно не важно, что при переходе от масштаба $(60)^i$ к ближайшему следующему масштабу $(60)^{i\pm 2}$ измерительного инструмента $\Delta 345$ относительно исходного изменялась в 60 раз не площадь, а линейные размеры инструмента. Хотя площадь при этом, например, уменьшается не на один порядок, а на два, однако в пределах алгебры исключительно с аддитивными операциями это не имеет особого значения. В ней допускается предварительное (аддитивное) сочетание каждых Десяти экземпляров инструмента (т. е. суммирование 60 раз одного и того же объекта, т. к. в счислении шумеров Десять равно числу 60) с масштабом $(60)^{i-2}$ в группу, совокупно представляющую Единицу площади с масштабом $(60)^{i-1}$:

$$\sum_1^{60} (60)^{i-2} \equiv [(60)^{i-2} + (60)^{i-2} + \dots + (60)^{i-2}] = (60)^{i-1},$$

т. е. уменьшенным относительно исходного масштаба $(60)^i$ только на один порядок, а затем уже такие Единицы группируются (сочетаются) в Десятки, Сотни и т. д. масштаба $(60)^{i-1}$ и по правилам позиционного счисления сворачиваются в условно-целые числа. Почему это допустимо в конвенции шумеров? Потому что изоморфизм между соответствующими алгебрами обеспечивается операцией сложения (сочетания). Следовательно, можно указать биективное соответствие между каждой алгебраической Единицей – объектом масштаба $(60)^{i-1}$, сформированным аддитивно из Десяти Единиц предыдущего разряда счисления, т. е. из совокупности объектов масштаба $\sum_1^{60} (60)^{i-2}$, – и определенным объектом как в геометрии так и в алгебре, хотя последний как в геометрии, так и в алгебре также представляет собой не один объект, а 60 (или геометрических или алгебраических) объектов причем так, что суммарно они составляют площадь, величина которой уменьшена всего на один порядок. Дополнительное преимущество математики с альтернативной конвенцией заключается в том, что, наряду с аддитивной процедурой формирования объектов в группы, которое имеет место в математике шумеров, в ней также существует и альтернативный метод, который при этом не только сохраняет имеющийся изоморфизм (с аддитивной операцией) между всеми исследуемыми алгебрами, но непротиворечиво расширяет его введением новой процедуры – мультипликативной операции – над избранными группами, называемыми десятками, в каждом из множеств – носителей данных алгебр. А именно, в ней допустимо ограничить способ формирования геометрических и алгебраических объектов исключительно аддитивными процедурами только в

пределах единиц данного (текущего) разряда, а при переходе между разрядами использовать мультипликативную операцию. По сути, речь идет о том, что в новой математике допустимо безграничное повторение изменения количества ЗП эталонного масштаба не только *на определенное* число, но и безграничное повторение изменения его масштаба *в определенное* число раз (без пропусков, как было у шумеров), а именно в 10^n (здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$).

Содержательно, это означает, что, например, в алгебре чисел (символов) альтернативной конвенции наряду с аддитивной процедурой

$$\Sigma_1^{10}(10)^{i-1} \equiv \underbrace{[(10)^{i-1} + (10)^{i-1} + \dots + (10)^{i-1}]}_{10} = (10)^i$$

имеет место и мультипликативная $10 \cdot S_{eo}^{i-1} = S_{eo}^i$. Иными словами, в рамках альтернативной конвенции можно сформулировать вывод, что в новой математике имеется достаточно ресурсов для ее непротиворечивого и неограниченного расширения операцией умножения на множестве всех разрядов десятичного позиционного счисления, т. е. на множестве объектов, алгебраически выражаемых в виде $10^n \cdot S_{\phi \cdot (\phi-D)}$, верно будет утверждение:

$$10^n \cdot 10^m \cdot S_{\phi \cdot (\phi-D)} = 10^{m+n} \cdot S_{\phi \cdot (\phi-D)} = 10^k \cdot S_{\phi \cdot (\phi-D)},$$

где m, n, k – тройка чисел из множества целых (положительных и отрицательных) чисел.

Последнее утверждение, приведенное в алгебраической форме, выражает суть обсуждаемого расширения в вербальной алгебре. А в расширенном алгебро-геометрическом отображении для сохранения возможности установления изоморфизма необходимо, кроме этого, и в геометрии иметь не только «собираательные» образы для аддитивных алгебраических операций (композиций), но и строить конструктивным способом геометрические объекты, соответствующие разрядам чисел в вербальной алгебре, площади (и углы) которых находятся в мультипликативной связи друг с другом, т. е. совокупность ЗП, экземпляры которой отличаются по величине площади (и углов) в 10^n раз (здесь $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Несложно показать, что в новой геометрии для этого существует достаточный потенциал.

Но прежде обратимся еще раз к алгебре. Анализ структуры десятичного позиционного счисления показывает, что в нем, наряду с десяткой – основанием счисления, – мультипликативными элементами являются также еще два простых числа – двойка и пятерка. Действительно, каждое число из трех последовательностей

$$2^0 \equiv 1, 2^{\pm 1}, 2^{\pm 2}, \dots; \quad 5^0 \equiv 1, 5^{\pm 1}, 5^{\pm 2}, \dots; \quad 10^0 \equiv 1, 10^{\pm 1}, 10^{\pm 2}, \dots$$

принадлежит множеству условно-целых чисел. Воспользуемся тем, что каждый разряд десятичного счисления является произведением двойки и пятерки в соответствующей степени. Тогда утверждение о достаточности ресурсов будет вполне аргументировано, если предъявить геометрически конструктивный способ (или способы) построения измерительного инструмента (ЗП) единичной площади в масштабе, численно соответствующем, по крайней мере, каждому члену первых двух последовательностей. Выше было приведено правило получения отрезков для построения Золотого Прямоугольника из прямоугольного треугольника с катетами 2:1; в частности, ЗП площадью S_{ed} (т. е. единичного масштаба) со сторонами Φ и $\Phi - D$ конструктивно получен из треугольника с катетами D и $2D$. Наряду с этим в Приложении П.7 приведены правила построения Золотого сечения для произвольных прямоугольных треугольников, из которых следует возможность удвоения (согласно аддитивным операциям) площади квадрата (Рис.15).

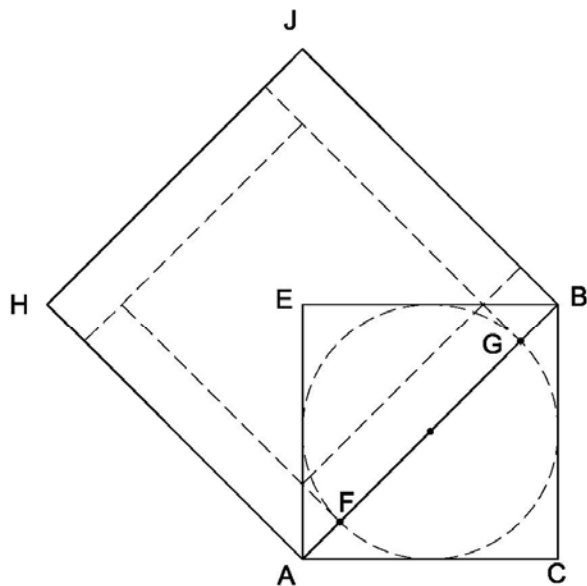


Рис.15. Золотое Сечение гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника и удвоение площади квадрата. Площадь $ACBE : S_1$; площадь $ABJH : S_2 = 2S_1$.

На основании этого возьмем квадрат со стороной D и **на его диагонали, как на стороне**, построим новый квадрат (Рис.16). Площадь последнего будет удвоена относительно исходного в соответствии с инвариантом $I_{\perp}$. Последовательно выстраивая новый квадрат на диагонали уже построенного, можно получить упорядоченный ряд длин сторон $D_1, D_2, D_3, \dots$ квадратов с площадями кратными S_{ed} в $2^1, 2^2, 2^3, \dots$ раз. Процедура построения квадратов во столько же раз меньшими S_{ed} , основывается на процедуре, являющейся

квадратов с площадями во столько же раз меньшими S_{ed} получается несколько сложнее. Наглядный алгоритм соответствующей процедуры представлен на Рис.18. Чтобы построить квадрат с площадью в пять раз меньшей S_{ed} , необходимо для эталонной стороны $D = FB = CB$ квадрата $BCEF$ с площадью $S_{BCEF} = S_{ed}$ построить Золотой Треугольник $\Delta ABC = \Delta_D$ с катетами D и $2D$. Затем необходимо построить Золотое Сечение на его гипотенузе, чтобы получить отрезки Φ и $\Phi - D$. Теперь на отрезке $\Phi - D$, как на гипотенузе нового Золотого Треугольника $\Delta_{\Phi-D}$, подобного треугольнику Δ_D , строим новый треугольник $\Delta_{\Phi-D}$. Затем в полученном треугольнике $\Delta_{\Phi-D}$ строим Золотое Сечение его гипотенузы, больший из полученных отрезков и будет стороной квадрата $AGHJ$, площадь которого в пять раз меньше S_{ed} : $S_{ed} = 5 \cdot S_{AGHJ}$. Но вместе с этим существует и другой способ. Разделим с помощью $\Delta 345$ сторону квадрата с площадью $5^{+1} \cdot S_{ed}$ на пять частей, каждая часть будет стороной квадрата площадью $5^{-1} \cdot S_{ed}$. Аналогично поступив со стороной квадрата $5^0 \cdot S_{ed}$, получим сторону квадрата площадью $5^{-2} \cdot S_{ed}$. Повторяя последовательно операции деления с квадратами нечетной и четной отрицательной степени, получим весь нисходящий ряд площадей кратных пяти. Соответствующие комбинации увеличения в 2 и 5 раз и уменьшения во столько же раз позволят, как отмечалось выше, построить квадраты всего ряда площадей кратных десяти в любой целочисленной степени.

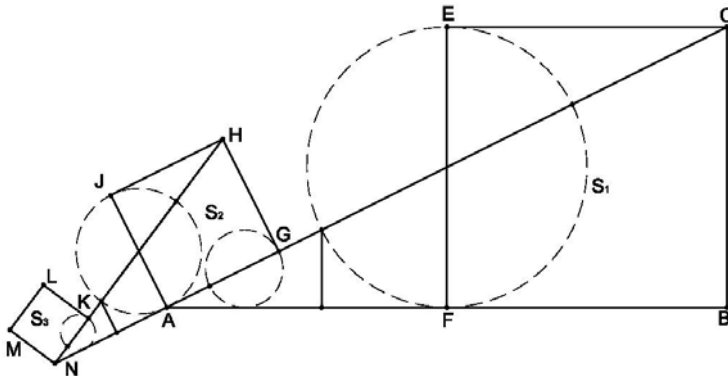


Рис.18. Уменьшение площади квадратов в пять раз: $S_{BCEF} = 5 \cdot S_{AGHJ}$; $S_{AGHJ} = 5 \cdot S_{KLMN}$.

Итак, имеется в наличие конструктивный способ построения квадратов – любого члена монотонно убывающего (возрастающего) ряда. Сторона D_x такого квадрата замеряется циркулем. Теперь через построение соответствующего ему Золотого Треугольника возможно получить ЗП с площадью соответствующей кратности для $S_{ed} = S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ (Рис.19). Следовательно, возможно также конструктивно воспроизвести всю линейку ЗП с площадями, кратными $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$ в 10^n раз, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Сформулируем определение.

Золотые Прямоугольники, площади которых различаются в 10^n раз, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, назовем подобными, а число 10^n назовем коэффициентом подобия.

Заметим, что в данной конвенции подобие для прямоугольников можно ввести только для таких коэффициентов. Введение любой новой закономерности должно начинаться с геометрической модели. Поскольку в нашем распоряжении сейчас еще нет геометрических средств для увеличения любой стороны прямоугольника не «на», а «в» определенное количество раз (не говоря уже о произвольном количестве раз), поэтому вводить подобие для произвольных коэффициентов здесь неуместно.

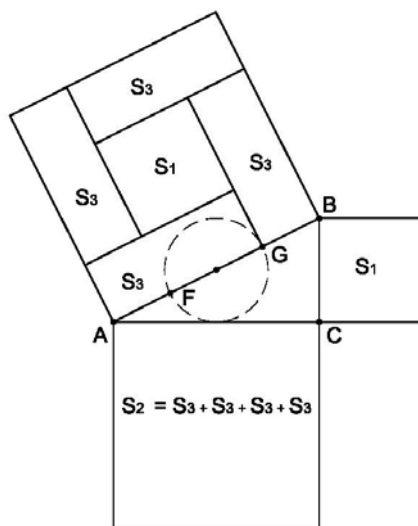


Рис.19. Золотое Сечение гипотенузы произвольного Золотого Треугольника ($AC = 2BC$) и соотношение площадей (при $FG = BC$).

Во множестве углов (поворотов радиуса) ситуация выглядит намного проще. В силу изначально обусловленного конструктивного способа построения и триангуляции правильного многоугольника и возможности последовательного деления произвольной стороны многоугольника многократно на десять равных частей, можно сказать, что в данном множестве уже по определению (или изначально) существует последовательность конструктивных объектов с величинами в $10^0 \equiv 1, 10^{\pm 1}, 10^{\pm 2}, 10^{\pm 3}, \dots$ раз большими относительно единичного угла (поворота), которые и раньше можно было бы биективно связать с подходящими аддитивными сочетаниями единичных площадей ЗП, хотя в этом не было никакой необходимости. Однако, следуя выше установ-

ленному порядку, мы должны метрику углов устанавливать не непосредственно, а опосредованно через метрику площадей.

А в силу сохраненного в альтернативной конвенции изоморфизма между метриками площадей и углов, через такую линейку масштабов ЗП несложно конструктивно воссоздать и всю линейку углов соответствующей кратности.

Таким образом, для обеих совокупностей геометрических объектов, последовательно изменяющихся в результате алгебраической процедуры, связанной с переносом запятой в произвольном числе, существует достаточный геометрический потенциал, позволяющий поддерживать не только имеющийся в конвенции шумеров изоморфизм, но и расширить последний введением во все алгебры дополнительной операции, ассоциируемой в каждой из них с процедурой переноса запятой в числе. Для этого и в метаалгебре и в вербальной алгебре существуют (взаимообратные) алгоритмы конструктивного воспроизведения объектов соответствующего масштаба.

На основании изложенного можно сделать однозначный вывод, что математика с альтернативной конвенцией является расширением математики шумеров, причем непротиворечиво надстроенной. Главным и принципиально важным преимуществом подобным методом расширяемой математики является сохранение в арсенале средств ее непротиворечивой редукции к математике шумеров

П.6.5. Математика альтернативной конвенции

Следующим шагом будет выяснение структуры новой математики $M_A^\pm$, для которой, как и прежде, требуется формально установить, что ее алгебры на множествах с аддитивными и вновь введенными операциями являются изоморфными друг другу и каждая из них является непротиворечивым расширением соответствующей алгебры из изоморфных алгебр математики шумеров $M_{III}^\pm$. Во-первых, математика $M_A^\pm$ будет включать в себя всю математику $M_{III}^\pm$ со всеми ресурсами последней. Во-вторых, алгебры $E_{III}^\pm$ и $H_{III}^\pm$, унаследованные математикой $M_A^\pm$ от математики $M_{III}^\pm$, будут расширены, как всегда, на одинаковое количество элементов каждая, поэтому к списку полиморфных объектов $\{\mathfrak{A}_{III}^\pm\}$, унаследованных от математики $M_{III}^\pm$, в расширенной математике $M_A^\pm$, также появится ровно столько новых полиморфных объектов, на сколько элементов была дополнена каждая из алгебр $E_{III}^\pm$ и $H_{III}^\pm$. В результате получим следующую структуру расширенной математики $M_A^\pm$:

$$M_A^\pm = \langle \{E_A^\pm \cong H_A^\pm\}, \{\mathfrak{A}_{III}^\pm\}, \{\mathfrak{A}_A^\pm\} \rangle.$$

Вербальная алгебра $E_A^\pm$ математики $M_A^\pm$ будет представлять собой объединение алгебры $E_{III}^\pm$ и алгебры $\Delta E_A^\pm$:

$$E_A^\pm = \langle \langle E_{III}^\pm \rangle, \Delta E_A^\pm \rangle,$$

где $\Delta E_A^\pm$ – часть алгебры $E_A^\pm$, содержащая все ресурсы, которые и расширяют $E_{III}^\pm$ до алгебры $E_A^\pm$. Аналогичную структуру имеет метаалгебра $H_A^\pm$:

$$H_A^\pm = \langle \langle H_{III}^\pm \rangle, \Delta H_A^\pm \rangle,$$

где $\Delta H_A^\pm$ – часть алгебры $H_A^\pm$, содержащая все ресурсы, которые расширяют $H_{III}^\pm$ до алгебры $H_A^\pm$.

Чтобы перейти к дальнейшему описанию структуры элементов математики $M_A^\pm$, здесь стоит напомнить цепочку преобразований, в результате которой из примитивной математики площадей M_S была построена математика шумеров $M_{III}^\pm$:

$$M_S \rightarrow M_S(n) \rightarrow M_{S345}(60) \rightarrow M_{III} \rightarrow M_{III}^\pm$$

При этом каждая из изоморфных алгебр преобразовывалась по аналогичной схеме:

$$\begin{aligned} E_1(S) &\rightarrow E_1(n, S) \rightarrow E_{S345}(60) \rightarrow E_{III} \rightarrow E_{III}^\pm, \\ H_1(S) &\rightarrow H_1(n, S) \rightarrow H_{S345}(60) \rightarrow H_{III} \rightarrow H_{III}^\pm. \end{aligned}$$

Из-за различия констант альтернативная математика также, как и математика шумеров, имеет полный набор ресурсов, для которых можно сформировать по той же схеме свои пары изоморфных алгебр. Это значит, что вместо вербальной алгебры

$$E_1(S) = \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \bar{\rho}, \bar{\delta}, \oplus, \bar{\oplus}, \Gamma_{E0}, \Gamma_{E1\oplus} \rangle$$

и метаалгебры

$$H_1(S) = \langle T, a_0, \Delta S, \theta^0, \theta, \zeta, \bar{\zeta}, \bar{\theta}, \otimes, \bar{\otimes}, \Gamma_{H0}, \Gamma_{H1\otimes} \rangle$$

примитивной математики площадей M_S требуется построить две соответствующие изоморфные друг другу алгебры $E_{1,A}$ и $H_{1,A}$: алгебру

$$E_{1,A} = \langle \aleph_A, \emptyset_A, 1_A, \delta_A^0, \delta_A, \rho_A, \bar{\rho}_A, \bar{\delta}_A, \oplus_A, \bar{\oplus}_A, \Gamma_{E0,A}, \Gamma_{E1\oplus,A} \rangle,$$

носителем которой является (бесконечное множество слов) натуральный ряд

$\aleph_A = (\emptyset_A, 1_A, 1_A 1_A, 1_A 1_A 1_A, \dots)$, с константами $\emptyset_A$ и 1_A и полным списком операций и отношений для элементов $\aleph_A$ и алгебру

$$H_{1,A} = \langle T_A, a_{0,A}, \Delta S_A, \theta_A^0, \theta_A, \varsigma_A, \overline{\varsigma_A}, \overline{\theta_A}, \overline{\otimes_A}, \overline{\otimes_A}, \Gamma_{H_{0,A}}, \Gamma_{H_{1 \otimes A}} \rangle,$$

носителем которой является представленное на прямой или на окружности бесконечное множество $T_A = (a_{0,A}, a_{1,A}, a_{2,A}, \dots)$ точек с одинаковой площадью ΔS_A прямоугольников (или равнобедренных треугольников) между любой парой соседних; с константами $a_{0,A}$ и ΔS_A и полным списком операций и отношений для элементов T_A .

По аналогии с выше представленным способом из алгебр $E_{1,A}$ и $H_{1,A}$ могут быть получены алгебры $E_{1,A}(n)$ и $H_{1,A}(n)$ с обобщенными компактными носителями $\aleph_{n,A}$ и $T_{n,A}$, а затем при фиксировании параметра $n = 10$ и при замене эталона (константы) ΔS_A на эталон площади $\Delta S(S_{\Phi \cdot (\Phi-D)})$ будут получены алгебры $E_{\Phi \cdot (\Phi-D)}(10)$ и $H_{\Phi \cdot (\Phi-D)}(10)$ с конкретными компактными носителями $\aleph_{10,A}$ и $T_{10,A}$. Здесь эталон площади $\Delta S(S_{\Phi \cdot (\Phi-D)})$ соответствует в геометрической модели площади (в общем случае любого масштаба, поэтому эталон площади должен быть функцией от площади ЗП единичного масштаба, соответствующего эталону длины D), выраженной в единицах $S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}$, располагающегося между точками носителя $T_{10,A}$ прямоугольника или равнобедренного треугольника в правильном многоугольнике $P_{10}(R)$. Далее. Тем же способом, как были построены алгебры E_{III} , H_{III} и алгебры $E_{III}^{\pm}$, $H_{III}^{\pm}$ из пары $E_{S_{345}}(60)$, $H_{S_{345}}(60)$, расширим алгебры $E_{\Phi \cdot (\Phi-D)}(10)$ и $H_{\Phi \cdot (\Phi-D)}(10)$ до δE_A и δH_A , а затем до $\delta E_A^{\pm}$ и $\delta H_A^{\pm}$ соответственно. Тем самым будут пройдены все этапы расширения в точности, как это было сделано с алгебрами математики $M_{III}^{\pm}$:

$$\begin{aligned} E_{1,A} &\rightarrow E_{1,A}(n) \rightarrow E_{\Phi \cdot (\Phi-D)}(10) \rightarrow \delta E_A \rightarrow \delta E_A^{\pm}, \\ H_{1,A} &\rightarrow H_{1,A}(n) \rightarrow H_{\Phi \cdot (\Phi-D)}(10) \rightarrow \delta H_A \rightarrow \delta H_A^{\pm}. \end{aligned}$$

В то же время вербальная алгебра $\delta E_A^{\pm}$, будучи просто адаптированным (к симметрии с размерностью десять) аналогом алгебры $E_{III}^{\pm}$ не является полным расширением $\Delta E_A^{\pm}$ алгебры $E_{III}^{\pm}$ до алгебры $E_A^{\pm}$, т. е. $\delta E_A^{\pm} \subset \Delta E_A^{\pm}$ при том, что $E_A^{\pm} = \langle \langle E_{III}^{\pm} \rangle, \Delta E_A^{\pm} \rangle$. В алгебре $\delta E_A^{\pm}$ еще отсутствуют элементы конструктивного сопряжения ее носителей с носителями $E_{III}^{\pm}$ (соразмерение элементов группы симметрий размерности десять с элементами группы симметрий размерности шестьдесят). Для этого в $\delta E_A^{\pm}$ следует добавить условия сопряжения ее констант с константами $E_{III}^{\pm}$:

$$\emptyset_A = \emptyset \quad \text{и} \quad 1 = \underbrace{\emptyset_A \oplus 1_A \oplus_A 1_A \oplus_A \dots \oplus_A 1_A \oplus_A 1_A \oplus_A 1_A}_6,$$

а также алгоритмы пересчета чисел десятичного счисления в числа шестидесятизначного и обратно, обозначим совокупно все указанные ресурсы для данной цели через $\delta E_{C,A}^{\pm}$.

Кроме этого, как было отмечено выше, в соответствии с выражениями (6.7), (6.8), (6.9), (6.10), в алгебру $\delta E_A^{\pm}$ должны быть добавлены некоммутативные бинарные операции умножения и деления, что будет представлено частью расширения, обозначенного через $\delta E_{\otimes}^{\pm}$.

И, в конце концов, необходимо ввести новый носитель

$$\overline{\aleph_{10}^{\pm}} = (\pm 10^i, \pm 10^{i-1}, \dots, \pm 10^1, \pm 10^0, 0, \pm 10^{-1}, \dots, \pm 10^{-(j-1)}, \pm 10^{-j},$$

где i, j – произвольные положительные десятичные числа, и совокупность операций на нем, обозначаемую $\delta E_{\Pi,10}^{\pm}$, которая будет включать операцию коммутативного умножения и деления кратных десяти коэффициентов подобия измерительного инструмента $S_{e\partial} = S_{\Phi(\Phi-D)}$:

$$10^n \cdot 10^m \cdot S_{e\partial} = 10^{m+n} \cdot S_{e\partial} = 10^k \cdot S_{e\partial},$$

где $m, n, k \in \aleph_{10}^{\pm}$, и операцию переноса запятой.

Таким образом, структуру расширения $\Delta E_A^{\pm}$ вербальной алгебры можно представить следующим объединением:

$$\Delta E_A^{\pm} = \delta E_A^{\pm} \cup \delta E_{C,A}^{\pm} \cup \delta E_{\otimes}^{\pm} \cup \overline{\aleph_{10}^{\pm}} \cup \delta E_{\Pi,10}^{\pm}.$$

В целом вербальная алгебра $E_A^{\pm}$ математики $M_A^{\pm}$ будет иметь структуру:

$$E_A^{\pm} = \left\langle \langle E_{III}^{\pm} \rangle, \delta E_A^{\pm}, \delta E_{C,A}^{\pm}, \delta E_{\otimes}^{\pm}, \overline{\aleph_{10}^{\pm}}, \delta E_{\Pi,10}^{\pm} \right\rangle.$$

Аналогичную структуру будет иметь и метаалгебра $H_A^{\pm}$:

$$H_A^{\pm} = \left\langle \langle H_{III}^{\pm} \rangle, \delta H_A^{\pm}, \delta H_{C,A}^{\pm}, \delta H_{\otimes}^{\pm}, \overline{H_{10}^{\pm}}, \delta H_{\Pi,10}^{\pm} \right\rangle,$$

элементы которой в точности соответствуют элементам алгебры $E_A^\pm$ с тем, чтобы получилась пара изоморфных алгебр $E_A^\pm$ и $H_A^\pm$ в новой математике $M_A^\pm$ альтернативной конвенции. Из приведенных структур изоморфных алгебр не сложно определить дополнительный список полиморфных объектов $\{\mathfrak{A}_A^\pm\}$, входящих наряду со списком $\{\mathfrak{A}_{III}^\pm\}$ в математику $M_A^\pm$.

В заключение несколько слов об иерархии конвенций. Используемый здесь принцип соответствует тому, что не все объекты, представляемые условно-целыми числами конвенции шумеров, могут быть представлены такими числами в альтернативной конвенции, в то время как обратное соответствие всегда выполнимо. Нетрудно сделать вывод, что с точки зрения возможности представления информации конечной строкой символов альтернативная конвенция является более «узкой» системой. Можно привести тот же аргумент в несколько ином виде. В теории групп группа размерности «десять» является подгруппой группы с размерностью «шестьдесят», по этой причине вторую можно рассматривать, как обобщение первой. В связи с этим в качестве фундаментальной выбрана конвенция шумеров (с наиболее общей группой).

П.6.6. Конвенция Пифагора (Теорема Вторая)

Достоверно восстановить всю цепочку рассуждений Пифагора, в результате которых он пришел к своему знаменитому утверждению, не представляется возможным хотя бы потому, что какие-либо источники информации, повествующие непосредственно об этом, не сохранились до наших дней. И неизвестно, существовали ли они вообще когда-либо. Тем не менее попытаемся здесь восстановить ведущий к нему возможный ход рассуждений. Наша задача значительно упрощается по двум причинам. Во-первых, уже имеется исходная диспозиция – математика шумеров, которая с большой долей вероятности была и перед ним. Во-вторых, в нашем случае задача является одной из класса так называемых задач с подсказкой, ведь мы точно знаем, какой вывод сделал Пифагор. В то же время нам известен не только ответ задачи, но и множество утверждений, которые переплетены в современной математике так, что сразу их не просто рассортировать на причины, допускающие его, и его следствия. Поэтому основная работа сводилась, с одной стороны, к отсечению путем анализа именно всех следствий в алгебре и геометрии после расширения математики определенными «порциями» операций, с другой – к определению минимально необходимых и в то же время достаточных средств непосредственно для расширения. Полный перечень таких средств можно по праву назвать конвенцией изоморфизма Пифагора. Необходимо заметить, что к конвенции Пифагора следовало бы отнести и полный перечень средств альтернативной конвенции, т. е. рассматривать последнюю как часть его комплексной конвенции. Несмотря на это она оформлена в виде отдельной конвенции, так как, являясь

самодостаточной по своим ресурсам и вполне самостоятельной по кругу решаемых с ее помощью задач, она с полным правом может иметь обособленное определение. Конвенция Пифагора наследует все ресурсы альтернативной с заменой конвенционального измерительного инструмента на (выстраиваемый циркулем) квадрат со стороной, равной эталонному отрезку D . К этому выводу, как и к необходимости внести дополнительные изменения в конвенциональное соглашение, мы приходим в поисках доказательства продолжения первой теоремы, сформулированного в следующем виде.

Теорема 2. Собственная метрика произвольного прямоугольника инвариантна относительно измерения его площади любым из двух возможных характерных способов, связанных с неравенством ортогональных отрезков ЗП (или катетов треугольника $\Delta 345$).

По смыслу теоремы (и по известной подсказке) необходимо показать, что площадь фигуры может измеряться прямоугольником, имеющим не только разные стороны, но и одинаковые, каковым является квадрат. Действительно, в предыдущей теореме необходимо было симметризовать две различные ортотропные формы измерительного инструмента $\Delta 345$. Для этих целей было достаточно заменить его ЗП, т. е. прямоугольником с неравными сторонами, позволяющим измерять площадь произвольного прямоугольника не четырьмя различными способами, а только двумя. Теперь, в настоящей теореме, предполагается симметризовать и два оставшихся способа. Ну а для данных целей именно квадрат является подходящим ресурсом при том, что его геометрические свойства в наименьшей степени отличаются от ЗП. Нельзя забывать, что в доказательствах теорем мы можем сосредоточиться на свойствах только прямоугольников при условии, что совокупность свойств действующего измерительного инструмента заведомо обеспечивает нам корреляцию метрик площадей и углов, содержательным следствием чего являются изоморфные алгебры. В то же время, как уже отмечалось, свойств квадрата недостаточно для поддержания взаимно однозначного соответствия между данными метриками. В приложении к геометрическим построениям это означает, что необходимо допустить существование способов деления окружности на произвольное число равных дуг, хотя и не обязательно конструктивно реализуемых. Только в этом случае возможно допустить существование правильных многоугольников с произвольным числом сторон. Кроме того, необходимо также допустить существование, хотя и не обязательно конструктивно реализуемых, способов деления отрезков на произвольное число равных частей.

Введи мы возможность деления друг на друга произвольных чисел, а не обусловленных, как, например, в вербальной алгебре альтернативной конвенции, и это позволило бы использовать позиционное счисление с любым целочисленным основанием. Но скудный перечень известных конструктивных способов деления геометрических объектов ограничивает нас в этом. Теоретически мы вправе предположить, что способы деления окружности и отрезков на равные части не ограничиваются алгоритмами, имеющимися в нашем

распоряжении в настоящее время; вполне допустимо, что когда-нибудь будут найдены доселе еще не известные и даже такие, что позволят делить их действительно на произвольное число равных частей. Но ведь проблема здесь не только в данном предположении. Существуют и другие. Кроме затруднений в геометрии, имеются проблемы алгебраического характера, связанные с типом используемого шумерами счисления. В частности, попытка следовать подобию лексикографического представления результатов измерения циклических величин, т. е. строкой символов, с необходимостью сопровождается требованием соблюдения компромисса между линейными пространствами различной топологии, которые здесь обозначены как пространства на замкнутом и незамкнутом контуре. Решением объективно существующего конфликта между такого сорта пространствами стало позиционное счисление шумеров, сочетающее в себе последовательную упорядоченность и в конечных циклах (внутри разрядов), и в конечных строках (разрядов) символов.

С одной стороны, приведенный в алгебрах сочетательный способ формирования геометрических и символьных объектов в группы симметрии размерности шестьдесят (или десять) позволяет и сейчас формировать в алгебре позиционное счисление с основанием, равным произвольному целому числу. Однако результаты операций над подобного рода свертками в существующих (и до наших дней) геометрических условиях непременно вступят в противоречие с результатами многих наследуемых из предыдущих конвенций операций. Достаточно упомянуть хотя бы необходимость фиксации пустой операции в начале каждого цикла. Действительно, имея построенные конструктивным способом правильные многоугольники с шестьюдесятью (десятью) равными сторонами, мы не сможем компоновать равные объекты в позиционное счисление, например, с основанием 131 без получения противоречий в результатах последующих операций. А конструктивно построить многоугольник с таким числом сторон для последующей верификации мы не можем.

Весьма примечательно то, что с позиций алгебры разделение чисел на классы целых (условно-целых) и рациональных зависит исключительно от традиций в математике, поскольку произвольное рациональное число вида p/q , где p, q - целые числа, становится условно-целым в позиционном счислении с основанием, равным числу q . Так, например, число $10/3$ десятичного счисления содержит бесконечное число цифр, но оно в точности равно числу, состоящему всего из трех цифр в трехзначном счислении: $[101]_3/[10]_3 = [10,1]_3$. По сути, данное свойство – любое рациональное число всегда может быть представлено в форме условно-целого (или состоящим из конечного числа символов) – является характерным и отличительным свойством множества всех позиционных счислений с различными целочисленными основаниями. Вполне очевидно, что источник затруднений при получении конечного результата в алгебраической процедуре деления чисел находится не в способе отображения информации с помощью чисел вообще

как таковых, а в свойствах отображения чисел конкретными счислениями, т. е. в счислениях с фиксированным целочисленным основанием, или, по-другому, источник затруднений в различии групп симметрий в позиционных счислениях. Поэтому, с другой стороны, главная проблема такого типа счислений, как позиционные, в том, что в счислении данного типа результат деления заданного целого числа на целое всегда может быть представлен конечным числом, но не в каждом из них.

В связи с этим, мы вправе рассматривать класс целых и класс рациональных чисел совершенно симметрично, как класс условно-целых чисел на множестве, например, всех позиционных счислений, отличающихся целочисленным основанием (а в более общем случае даже не обязательно с целочисленным основанием, более того, даже не обязательно во множестве позиционных счислений). В практических же вычислениях допустимо пользоваться позиционным счислением с любым целочисленным основанием, представляя результат не конечным числом, а посторонними символами, например, отношением p/q чисел данного счисления. К тому же результат (алгебраического) деления друг на друга двух целых чисел всегда может быть вычислен с любой наперед заданной точностью. Это следует из того, что процедура алгебраического деления является ничем иным как операцией многократного (но конечного) вычитания (т. е. аддитивна по своей природе), обусловленная двумя требованиями: вычитаемое число при каждом повторении операции – одно и то же, результатом последнего вычитания является ноль или «малозначащее» число. Чтобы разделить, например, произвольное целое число K на целое C , необходимо поочередно вычитать (одну) единицу из совокупности K единиц и распределять (т. е. прибавлять) их последовательно в одну из C групп пока в остатке не останется единиц меньше числа групп C . Затем пересчитывается количество M единиц в любой из (равных) групп. Целое число M и будет частным от деления K на C с точностью до целого числа. Если исходные числа имеют дробные части и (или) требуется иная точность вычисления, то это обеспечивается, как известно, предварительным умножением исходных чисел на основание счисления, т. е. на десять, в соответствующей целочисленной степени, что является вполне легитимной процедурой в рамках альтернативной конвенции, и/или продолжением деления до получения заданной точности. В итоге, верифицируя результат деления на геометрическом объекте, полученному числу M можно сопоставить часть (и даже не одну, а любую из C равных частей) прямоугольника с площадью K . Таким образом, становится вполне очевидным, что расширение аддитивной алгебры шумеров как в альтернативной конвенции, так и в конвенции Пифагора производится не иначе, как также аддитивными операциями, разве что не обычными, а специально обусловленными. И мы с полным правом можем считать не только операцию умножения, но и операцию деления условно-аддитивными. А симметризация чисел во множестве всех позиционных счислений приводит к тому, что последние две алгебраические операции можно рассматривать как взаимно

обратные друг другу, действие которых распространяется на все множество условно-целых чисел, причем при заранее заданной точности – *только* на его элементы.

Определившись с ситуацией в алгебре, вернемся к делению геометрических объектов. Рассматривая совершенно симметрично возможность деления как окружности, так и отрезка на любое количество равных частей, мы сталкиваемся с древней общепризнанной дилеммой: бытие-небытие. Допуская возможность существования некоторых геометрических методов деления, которые нам еще неизвестны, мы также имеем право считать, что они могут и не существовать вовсе. Если они существуют, но нам еще неизвестны, то они будут найдены и представлены конструктивными моделями, которые алгоритмически могут быть непротиворечиво сопряжены с уже известными. Следовательно, для всех имеющих право на существование способов, которые позволят нам двигаться дальше, всегда будет существовать алгоритмическая связь как с альтернативной конвенцией, так и с конвенцией шумеров. А «для того, чего быть не может» у нас всегда остается «наготове» десятичное счисление... Дело в том, что Пифагор и не предлагал (не имел возможности и не мог предложить из-за отсутствия соответствующих средств) никакого другого счисления, кроме десятичного. Его использование не только в альтернативной, но и в конвенции Пифагора, вполне логично в обеих ситуациях: и/или до тех пор, пока не будет найдено непротиворечиво поддерживающее требуемый изоморфизм новое и из-за отсутствия на данный момент какого бы то ни было иного. Именно поэтому в рамках десятичного позиционного счисления наряду с имеющимся классом условно-целых чисел мы можем рассматривать весьма широкий класс чисел, в том числе, класс рациональных чисел, для обозначения которых в общих случаях в виде отношения элементов, как уже отмечалось, используется также и символика, не входящая в алфавиты десятичного счисления: например, p/q . С другой стороны, значения обоих элементов отношения, каждое из которых представляемо в десятичном счислении условно-целым числом, позволяют в вербальной алгебре условно-аддитивной операцией определить конечный результат отношения с любой наперед заданной точностью в виде также условно-целого числа того же счисления, а на геометрических объектах модели (с правильным десятиугольником) к тому же и верифицировать его. Вместе с тем, как уже неоднократно отмечалось, должна сохраняться и возможность возвращения (редукции) к уже имеющейся конвенции, а десятичное счисление – это то, хотя и не единственное, средство, которое поспособствует именно этому. В таком случае, будут ли открыты новые методы деления или нет, мы заведомо будем иметь «путь отступления», если последуем главному закону расширения математики:

Непротиворечивым расширением математики является только такое расширение, которое с обязательным наследованием (сохранением) абсолютно всех средств расширяемой математики содержит средства,

позволяющие все вновь вводимые ресурсы непротиворечиво редуцировать (обратно) к средствам математики расширяемой.

Отметим еще раз, что метод, используемый для доказательства данной и всех последующих теорем, предполагает объединение двух или нескольких взаимоисключающих процессов измерения (или, если угодно, непересекающихся классов эквивалентности) в один мультиплет. Полный перечень ресурсов, необходимых для одного процесса, по некоторым позициям не совпадает с таким перечнем для другого (иначе они не были бы взаимоисключающими, а были бы одним процессом). Требуется объединить несовпадающие ресурсы. В частности, в данном случае объединяются два процесса измерения: в одном ЗП при измерении ориентирован так, что вдоль абсциссы измерительной среды альтернативной конвенции располагается отрезок Φ , в другом – $(\Phi - D)$. Для подобного объединения в мультиплет того, что несовместимо, не важно используем ли мы конструктивные средства или неконструктивные, поскольку объединяемое заведомо никогда и нигде не может быть *осуществимым вместе* в рамках системы шумеров.

Почему используется «конструктив» для того, что неосуществимо, чего не может быть? Пожалуй в связи с этим можно привести аналогию с изображением ландшафта: вне зависимости от того существует ли горизонт столь же реально, как граница какого-нибудь предмета, или нет, художник, наряду с другими конструктивными элементами, обязан также конструктивно воспроизвести и ее на картине, как «границу» земли или как линию, в которой «соединяются» и земля и небо. Ведь однозначность восприятия человеком окружающих объектов в Природе весьма затруднительна без выделения их границ.

В подобной ситуации, принципиально важной для нас, является возможность непротиворечивой конструктивной редукции мультиплета к одному и только к одному из объединяемых (конструктивно реализуемых) исходов и ни к чему больше. Именно потому, что математика, расширяющая математику шумеров, должна обладать вышеприведенным свойством непротиворечивости, именно поэтому и то, что должно подлежать конструктивной редукции, само по себе должно быть прежде всего конструктивом.

Все изложенное можно считать достаточным обоснованием выбора Пифагором условий новой конвенции. Ее основным измерительным инструментом является построенный конструктивным способом квадрат со стороной, равной длине эталонного отрезка D ; ее счислением – десятичное позиционное; конструктивные способы деления отрезков и окружностей на десять частей сохраняются прежними, т. к., имея отрезок D , всегда можно восстановить и ЗП и египетский треугольник; способ определения (измерения и вычисления) величины углов также остается без изменения. Таким образом, единственное отличие конвенции Пифагора от альтернативной является новый измерительный инструмент – квадрат с площадью $S_{e0} = S_{D^2} = S_{\Phi \cdot (\Phi - D)}$.

По условию в новой математике $M_{\mathcal{I}}^{\pm}$ наследуются все ресурсы математики $M_A^{\pm}$, по этой причине в ней также может быть определена площадь S_{ABCE} произвольного прямоугольника $ABCE$ через подсчет количества экземпляров ЗП, его покрывающих:

$$S_{ABCE} = \sum_{M_{\Phi}} \sum_{N_{\Phi-D}} [S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}] = (M_{\Phi} \cdot N_{\Phi-D}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = K \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}, \quad (6.12)$$

где $N_{\Phi-D}, M_{\Phi}, K \in \aleph_{10}^{\pm}$, – десятичные числа альтернативной конвенции, первое из которых указывает количество ЗП, расположенных стороной Φ вдоль основания AB , второе – количество ЗП, расположенных стороной $\Phi - D$ вдоль высоты BC прямоугольника $ABCE$. В качестве нового ресурса у Пифагора должно быть декларировано в явном виде условие:

$$S_{D^2} = S_{e\partial} = S_{\Phi(\Phi-D)}.$$

Тогда в силу данного равенства и в рамках одного и того же счисления, измеренная площадь S_{ABCE} будет выражена в новой математике следующим образом:

$$S_{ABCE} = K \cdot S_{D^2}, \quad (6.13)$$

что может быть верифицировано непосредственным измерением с любой наперед заданной точностью площади S_{ABCE} прямоугольника $ABCE$ новым измерительным инструментом:

$$S_{ABCE} = \sum_R \sum_T [S_{D^2}] = (R \cdot T) \cdot S_{D^2} = K \cdot S_{D^2}, \quad (6.14)$$

где R, T – десятичные числа, первое из которых указывает количество квадратов площадью S_{D^2} , расположенных, например, вдоль стороны AB , второе – вдоль стороны BC прямоугольника $ABCE$.

Если теперь измерим площадь S_{ABCE} , повернув измерительную среду (или ЗП) так, чтобы стороны Φ располагались вдоль высоты BC , а стороны $\Phi - D$ – вдоль основания AB , то получим выражение

$$S_{ABCE} = \sum_{N'_{\Phi-D}} \sum_{M'_{\Phi}} [S_{\Phi \cdot (\Phi-D)}] = (N'_{\Phi-D} \cdot M'_{\Phi}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = K' \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)},$$

в котором, согласно альтернативной конвенции, все числа являются также десятичными: $M'_{\Phi}, N'_{\Phi-D}, K' \in \aleph_{10}^{\pm}$.

Суммирование по числам R, T в выражении (6.14) перестановочно в силу равенства сторон нового измерительного инструмента, поэтому

равенство $S_{D^2} = S_{\Phi(\Phi-D)}$ не зависит от того, какая из равных сторон эталонного квадрата ориентирована, например, вдоль стороны $(\Phi - D)$ ЗП:

$$S_{ABCE} = \sum_R \sum_T [S_{D^2}] = \sum_T \sum_R [S_{D^2}] = (R \cdot T) \cdot S_{D^2} = (T \cdot R) \cdot S_{D^2} = K \cdot S_{D^2}$$

Отсюда следует, что

$$K' \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = K \cdot S_{D^2} = K \cdot S_{\Phi(\Phi-D)}$$

и

$$S_{ABCE} = (N'_{\Phi-D} \cdot M'_{\Phi}) S_{\Phi \cdot (\Phi-D)} = (M_{\Phi} \cdot N_{\Phi-D}) \cdot S_{\Phi \cdot (\Phi-D)},$$

т. е. величина площади S_{ABCE} произвольного прямоугольника $ABCE$ не зависит от того, какой из не равных сторон ЗП измерять заданную сторону прямоугольника $ABCE$. Следовательно, площадь произвольного прямоугольника $ABCE$ не зависит от того вдоль какой стороны прямоугольника $ABCE$ направлять, например, сторону Φ измерительного инструмента.

Как обычно доказательство подобного рода теорем приводится сначала в рамках расширенной математики, а затем непротиворечивость полученного результата обосновывается в математике редуцированной путем анализа согласованности вновь вводимых ресурсов ресурсам базовым. Но в данном случае единственным новым конструктивным ресурсом является введенный измерительный инструмент, площадь которого эквивалентна ЗП, что значительно упрощает доказательство. На этом можно было бы считать теорему доказанной. В то же время, вероятно, остается не до конца выясненным принципиальный вопрос о поддержании корреляции метрик, предполагая возможность деления разного типа контуров геометрических объектов на произвольное, но одинаковое, число равных частей. Дело в том, что терминологию «деление окружности на равное число частей» стало возможным использовать, скорее всего, только после того, что доказал Пифагор в непосредственной связи с проблемой доказательства непротиворечивости своей конвенции. В основе всех предыдущих конвенций предусматривается построение правильных многоугольников, т. е. плоских фигур, последовательные вершины которых находятся на одинаковом расстоянии между собой и, вдобавок к этому, на одном и том же расстоянии от некоторой точки – центра данной фигуры. Окружность при этом может совсем не упоминаться. Действительно, выбрав некоторую точку O в качестве центра будущей фигуры, сделаем небольшую засечку произвольным раствором циркуля на расстоянии R от центра O . Затем на данной засечке выберем точку A_1 . Решение задачи построения правильного многоугольника $P_n(R)$ заключается в том, чтобы найти способ построения на плоскости такой упорядоченной последовательности из n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ на расстоянии l друг от друга, чтобы каждая из них в то же время находилась и на расстоянии R от центра O . Если способ найден, то процедура построения

каждой следующей точки будет такой. Из имеющейся точки A_i делаем засечку раствором циркуля, равным l , затем из центра O раствором циркуля, равным R , делаем засечку пересекающую предыдущую; точка пересечения засечек является точкой A_{i+1} последовательности; затем переходим к точке A_{i+1} и повторяем процедуру с засечками для определения следующей точки A_{i+2} и т. д.; после встречи с точкой A_i процедура заканчивается. На основании этого для доказательства непротиворечивости новой конвенции Пифагору потребовалось обосновать возможность построения правильного многоугольника с произвольным количеством сторон. Доказательство данного факта, вероятно, было следующим. Чтобы доказать возможность построения правильного многоугольника с произвольным количеством сторон при любом расстоянии R от центра O , необходимо доказать возможность такого построения при произвольном значении радиуса R . Поэтому выбираем на плоскости центр O и произвольный радиус R . Так как все точки многоугольника $P_n(R)$ должны располагаться на одинаковом расстоянии R от центра O фигуры, значит они располагаются на окружности радиуса R . Данная окружность называется описанной для многоугольника $P_n(R)$, а сам многоугольник – вписанным в окружность радиуса R . Число сторон многоугольника $P_n(R)$ всегда может быть удвоено за счет бисекции. С увеличением числа сторон правильного многоугольника высота каждого треугольника, полученного в результате триангуляции, подобной T_{Pn} , должна приближаться к значению радиуса R , не превышая его ни при каком числе сторон правильного многоугольника. Действительно, высота, опущенная из вершины равнобедренного треугольника на его основание, не может быть больше боковой стороны данного треугольника. С другой стороны, через середины сторон многоугольника $P_n(R)$ существует возможность провести линию, которая также буде окружностью с центром в точке O . Данная окружность называется вписанной в многоугольник $P_n(R)$, а многоугольник $P_n(R)$ называется описанным относительно данной окружности. В силу произвольности выбранного радиуса R , следует вывод, что если для любой окружности существует возможность построения вписанного (описанного) правильного многоугольника с числом сторон n , то для нее существует возможность построения описанного (вписанного) правильного многоугольника с тем же числом сторон n . На основании этого построим для окружности радиуса R описывающий ее правильный многоугольник $P_n^o(R)$. Произведем триангуляцию T_{Pn}^o многоугольника $P_n^o(R)$, проведя прямые, соединяющие каждую его вершину с центром O . Поскольку количество сторон многоугольника $P_n(R)$ всегда может быть удвоено, постольку и количество сторон многоугольника $P_n^o(R)$ также всегда может быть удвоено. С увеличением числа сторон описанного многоугольника вокруг окружности радиуса R боковая сторона равнобедренного треугольника – элемента триангуляции, подобной T_{Pn}^o , – уменьшается, но при этом не может стать меньше длины радиуса R , которому (по построению) равна высота данного равнобедренного треугольника,

опущенная из его вершины на основание. Рассмотрим теперь две монотонные последовательности линейных размеров. Высоты равнобедренных треугольников вписанных многоугольников при увеличении числа сторон многоугольника представляют монотонно возрастающую последовательность, их значения не превышают значения R радиуса описанной окружности. Стороны равнобедренных треугольников, принадлежащих описанным правильным многоугольникам около окружности радиуса R , при увеличении сторон многоугольника представляют монотонно убывающую последовательность, их значения не могут быть меньше значения R радиуса вписанной окружности. С помощью средств конвенции шумеров или альтернативной конвенции для данных двух монотонно сходящихся последовательностей можно доказать существование и единственность предела, равного R . Отсюда следует, что при максимально возможном количестве Π вершин правильного многоугольника боковые стороны и высоты равнобедренных треугольников как вписанного многоугольника в окружность радиуса R , так и описанного вокруг нее должны быть равны радиусу R , а периметр правильного многоугольника должен совпадать с длиной окружности. Отсюда можно прийти к выводу, что для построения правильного многоугольника необходимо и достаточно разделить окружность произвольного радиуса на соответствующее количество равных дуг. Действительно, углы между радиусами R , проходящими через вершины правильного многоугольника, должны быть равными, между множеством данных углов правильного многоугольника и множеством равных дуг описанной окружности имеет место биективное отношение. Именно поэтому если ранее процедура построения правильного многоугольника была, например, связана с построением выходящих из одного центра n лучей, углы между которыми должны быть равными, то после доказательства Пифагора построение правильного многоугольника можно формулировать способом эквивалентным, а именно, через деление окружности на равные части. Причем доказывал ли это Пифагор или это доказывалось еще до него, но он должен был обозначить это в явном виде для обоснования непротиворечивости своей конвенции, дабы исключить возможные разночтения. Теорема доказана.

II.6.7. Математика Пифагора

На первый взгляд, ввиду незначительного формального различия между двумя последними конвенциями, математика Пифагора $M_{\Pi}^{\pm}$ должна также иметь немного отличий от математики $M_A^{\pm}$. В ее изоморфные алгебры $E_{\Pi}^{\pm}$ и $H_{\Pi}^{\pm}$ должны быть добавлены лишь дополнительные ресурсы, соответствующие новому измерительному инструменту, т. е. новые константы, соответствующие S_{D^2} , и средства идентификации новых констант со старыми. Обозначим так расширенную математику $M_{\Pi 0}^{\pm} = \{E_{\Pi 0}^{\pm} \cong H_{\Pi 0}^{\pm}\}$. В то же время

более глубокий анализ показывает, что в новой математике $M_{II}^{\pm}$ появляется целый шлейф новых ресурсов, добавив которые, мы получим

$$(M_{II0}^{\pm} \cup \Delta M_{II0}^{\pm}) \subset M_{II}^{\pm}.$$

При этом согласованное дополнение ресурсов $\Delta M_{II0}^{\pm}$ к алгебрам $E_{II0}^{\pm}$ и $H_{II0}^{\pm}$ обеспечит затем в целом изоморфизм $E_{II}^{\pm} \cong H_{II}^{\pm}$ и не нарушит ни изоморфизм $E_{II0}^{\pm} \cong H_{II0}^{\pm}$, ни изоморфизм $E_A^{\pm} \cong H_A^{\pm}$ между их подалгебрами $E_{II0}^{\pm}$, $H_{II0}^{\pm}$ и $E_A^{\pm}$, $H_A^{\pm}$ соответственно. Возможность такого дополнительного расширения $\Delta M_{II0}^{\pm}$ связана с изотропностью (симметрией) абсцисс и ординат в измерительной среде с новым измерительным инструментом S_{D^2} . Именно в связи с данной симметрией, одно из главных следствий из конвенции Пифагора заключается в том, что каждой из ортогональных сторон произвольного прямоугольника возможно биективно сопоставить определенную длину одного ряда квадратов одинаковой площади S_{D^2} с равными сторонами, эквивалентными эталонному размеру D . Тем самым только в конвенции Пифагора появляется возможность непосредственной и однозначной метризации таких одномерных пространственных многообразий, как прямолинейные отрезки. Из ее корректной реализации будет следовать и измеримость площадей прямоугольников в математике $M_{II}^{\pm}$ через произведение длин их сторон, например, $S_{D^2} = \Phi \cdot (\Phi - D) = D \cdot D$ и знаменитый его вывод $a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c$ для трех квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника.

Для этого в алгебры $E_{II}^{\pm}$ и $H_{II}^{\pm}$ необходимо прежде всего ввести новые линейные (одномерные) константы, соответствующие эталонному размеру D , новые носители, операции, отношения, алгоритмы и пр. Поэтому внутри математики Пифагора $M_{II}^{\pm}$ мы получим две подматематики: математику $M_{II0}^{\pm}$ для двумерных многообразий, наследуемую от примитивной *математики площадей* $M_S = \langle E_1(S) \cong H_1(S) \rangle$ (через математику шумеров $M_{III}^{\pm}$), и математику одномерных многообразий $\Delta M_{II0}^{\pm}$, имеющую независимую ветвь наследования всех ресурсов от примитивной *математики отрезков* $M_L = \langle E_1 \cong H_1 \rangle$.

Формально структуры алгебр, источников наследования, весьма схожи:

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \bar{\rho}, \bar{\delta}, \oplus, \bar{\oplus}, \Gamma_{E0}, \Gamma_{E1\oplus} \rangle, \\ H_1 &= \langle T, a_0, L, \theta^0, \theta, \zeta, \bar{\zeta}, \bar{\theta}, \otimes, \bar{\otimes}, \Gamma_{H0}, \Gamma_{H1\otimes} \rangle \text{ и} \\ E_1(S) &= \langle \aleph, \emptyset, 1, \delta^0, \delta, \rho, \bar{\rho}, \bar{\delta}, \oplus, \bar{\oplus}, \Gamma_{E0}, \Gamma_{E1\oplus} \rangle, \\ H_1(S) &= \langle T, a_0, \Delta S, \theta^0, \theta, \zeta, \bar{\zeta}, \bar{\theta}, \otimes, \bar{\otimes}, \Gamma_{H0}, \Gamma_{H1\otimes} \rangle. \end{aligned}$$

Однако приведенные пары изоморфных алгебр принципиально различны, и источник их различия – в константах, в частности, L и ΔS , для которых

оставалась неопределенной их соразмеримость. Только в конвенции Пифагора появляются однозначные средства сопряжения одномерной и двумерной констант согласно выражению $S_{D^2} = D \cdot D$, а вместе с этим и способы конвертации ресурсов между M_L и M_S .

Фактически математика конвенции Пифагора $M_{II}^{\pm}$ представляет собой объединение:

$$M_{II}^{\pm} = M_{II0}^{\pm} \cup \Delta M_{II0}^{\pm} \cup \delta M_{II0}^{\pm},$$

где новый элемент $\delta M_{II0}^{\pm}$ соответствует части расширения алгебр $E_A^{\pm}$ и $H_A^{\pm}$ до алгебр $E_{II}^{\pm}$ и $H_{II}^{\pm}$, связанной с введением средств сопряжения между константами длины в $\Delta M_{II0}^{\pm}$ и константами площади в $M_{II0}^{\pm}$, а также средств конвертации операций, отношений и др. между их алгебрами.

«Анамнез» двух указанных составляющих математики $M_{II}^{\pm}$ может быть представлен следующим образом:

$$M_S \rightarrow M_S(n) \rightarrow M_{S345}(60) \rightarrow M_{III} \rightarrow M_{III}^{\pm} \rightarrow M_A^{\pm} \rightarrow M_{II0}^{\pm}$$

$$M_L \rightarrow M_L(n) \rightarrow M_L(10) \rightarrow M_L^{\pm}(10) \rightarrow \Delta M_{II0}^{\pm}.$$

Таким образом приведенные средства исчерпывающе представляют структуры математики конвенции Пифагора.

В принципе еще в рамках математики $M_A^{\pm}$ альтернативной конвенции возможно введение части ресурсов, независимая редукция которых приводила бы к (одномерной) примитивной математики прямолинейных отрезков M_L . Однако, в связи с ортотропией между абсциссами и ординатами, в ней потребовалось бы вводить удвоенные ресурсы: и для одномерной математики M_{Φ} и для одномерной математики $M_{\Phi-D}$ при том, что, конечно, значительно упрощает взаимную конвертацию их ресурсов, сопряжение между их константами определяется аддитивной операцией. Дополнительным аргументом в пользу этого может быть значение ресурсов альтернативной конвенции в различных разделах современной математики, например, их значение не только для непротиворечивой верификации существующего решения системы уравнений М. Гроссмана или имеющейся связи физических констант в виде безразмерного отношения в форме постоянной тонкой структуры, но и, вероятно, в той части, что связана с описанием потенциалов, в том числе, и сильных и электро-слабых взаимодействий. Однако для этого необходимы дополнительные исследования. Поэтому оставим все как есть.

II.7. Геометрия и параметризованное Золотое сечение

Ниже для справки приведены в современной форме некоторые факты геометрического характера, относящиеся к Золотому сечению.

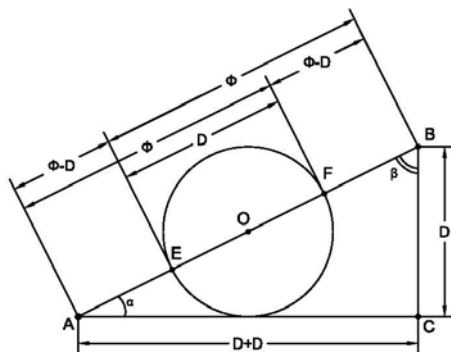


Рис.20. «Золотое Сечение» гипотенузы прямоугольного треугольника (с катетами D и $2D$) окружностью диаметра D .

Построим прямоугольный треугольник ABC (Рис.20) с катетами D и $2D$. Из центра гипотенузы восстановим окружность диаметра D , она разделит гипотенузу на три отрезка AE , EF и FB . Введя обозначения $AF = BE = \Phi$ и $AE = BF = \Phi - D$, мы можем утверждать, что разделили гипотенузу $AB = 2\Phi - D$ на крайние и средний отрезки, которые составляют пропорцию:

$$\frac{\Phi}{D} = \frac{D}{\Phi - D} . \quad (7.1)$$

В последнем выражении будем считать D заданным параметром (переменной, масштабом), от которого зависит значение $\Phi = \Phi(D)$. При $D = 1$ выражение (7.1) примет широко распространённый вид «золотой пропорции» (Рис.21):

$$\Phi_0 = \frac{1}{\Phi_0 - 1}, \quad (7.2)$$

где $\Phi(1) = \Phi_0 \approx 1,61803398...$

Покажем связь «золотой пропорции» с теоремой Пифагора (ТП). Построим с помощью циркуля и линейки из четырех треугольников, равных треугольнику ABC , фигуру, состоящую из двух квадратов: квадрата $CQXY$ со стороной, равной сумме катетов треугольника ABC ($CQ = QX = XY = YC = 3D$), и вложенного в него квадрата $ABSR$ со стороной, равной гипотенузе того же треугольника ($AB = BS = SR = AR = 2\Phi - D$), как показано на Рис.22. Каждую сторону квадрата $ABSR$ разделим на три отрезка: $\Phi - D$, D и $\Phi - D$.

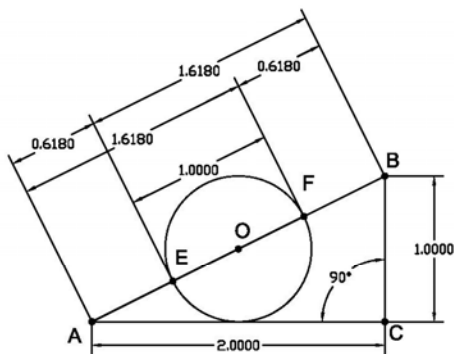


Рис.21. «Золотое Сечение» гипотенузы прямоугольного треугольника

(пропорция катетов 1:2) средней окружностью с $D=1$. $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$;

$$AB = BE = \Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803...; AE = BD = \Phi_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,61803...$$

Через полученные точки проведем в квадрате $ABSR$ параллельные линии так, чтобы выделить в его центре квадрат со стороной D и по его периферии четыре одинаковых прямоугольника со сторонами Φ и $\Phi - D$. Теперь нетрудно заметить, что поскольку для треугольника ABC верна ТП, постольку выполняется равенство между площадями четырех прямоугольников со сторонами Φ и $\Phi - D$ и квадрата со стороной $2D$, восстановленного на большем катете треугольника. Отсюда следует выражение (7.1), а также вывод, что «золотое сечение» обусловлено теоремой Пифагора. Можно показать, что и, наоборот, нарушение соотношения (7.1) между крайним и средним отрезками влечет невыполнение ТП для данного треугольника.

На Рис.23 приведены примеры деления гипотенузы на крайние и средний отрезки для треугольников, катеты которых находятся в отношении $1/3$ и $1/4$. Аналогичное деление гипотенузы можно построить для любого

положительного действительного n при заданном масштабе D . Пусть (Рис.24) длина второго катета будет равна $x = kD$ (где k -произвольное положительное действительное число), тогда для всей действительной полуоси с положительными значениями будем иметь (в соответствие с ТП) отображение:

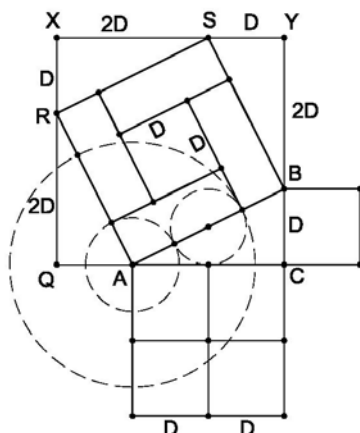


Рис.22. Золотое Сечение и теорема Пифагора.

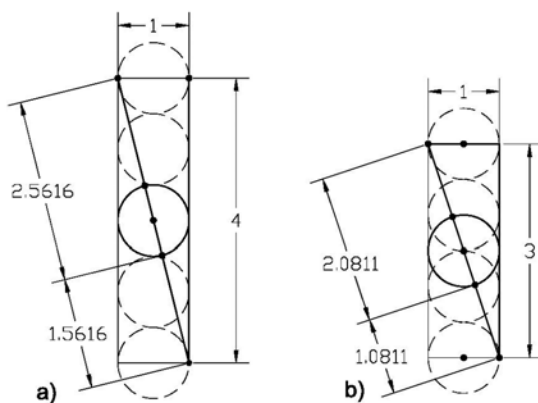


Рис.23. Сечение гипотенузы на «крайние и средний» отрезки при отношении катетов $1/n$, где n - натуральное число: а) $n = 4$; б) $n = 3$.

$$4\Phi(x, D)[\Phi(x, D) - D] = x^2,$$

где каждому положительному x и D соответствует свое значение $\Phi(x, D)$. Для общего случая пропорция примет вид:

$$\frac{2\Phi(x, D)}{x} = \frac{x}{2[\Phi(x, D) - D]}.$$

Используя циркуль и линейку, покажем, как разделить на десять равных частей окружность диаметра D с помощью отрезка «Золотого сечения». Используя в качестве основы Рис.20, сделаем дополнительные построения. Проведем две окружности радиуса $AE = \Phi - D$ с центром в точке A и радиуса D с центром в точке K , отметим точку L пересечения построенных окружностей и соединим ее отрезками с центрами A и K , как показано на Рис.25. Отметим точки M и N пересечения отрезков AL и KL с окружностями радиуса O_1A и AE соответственно. Докажем, что каждый из углов $\angle AO_1M, \angle AKL, \angle NAL$ равен $\pi/5$ и, следовательно, стягивает дугу, равную $1/10$ части соответствующей окружности. Рассмотрим треугольники $\triangle AO_1M, \triangle AKL$ и $\triangle ANL$. Они являются равнобедренными, т. к. каждый из них содержит пару сторон, являющихся радиусами одной окружности; они подобны, т. к. содержат равные углы в основании.

Для нашего доказательства необходимо показать: углы в соответствующих равнобедренных треугольниках находятся в определенном соотношении, а именно, угол β в основании любого из них в два раза больше угла α его вершины ($\beta = 2\alpha$). В этом случае сумма всех углов треугольника кратна сумме пяти равных частей ($\alpha + 2\alpha + 2\alpha$) таких, что одна из них равна углу между его боковыми сторонами. Так как сумма всех углов треугольника равна 180° , следовательно, угол между боковыми сторонами будет равен 36° и указанные стороны стягивают дугу, равную $1/10$ части соответствующей окружности.

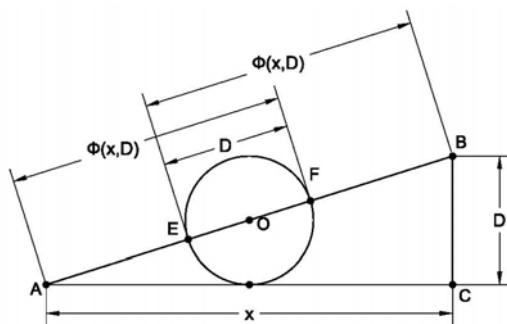


Рис.24. Деление гипотенузы произвольного прямоугольного треугольника на крайние и средний отрезки ($BC = D$; $AC = x$; $AO = OB$): $AF = BE = \Phi(x, D)$; $AE = BF = \Phi(x, D) - D$;

$$4\Phi(x, D)[\Phi(x, D) - D] = x^2; \quad \frac{2\Phi(x, D)}{x} = \frac{x}{2[\Phi(x, D) - D]}.$$

Докажем, что $\triangle AKN$ равнобедренный, т. е. $KN = AN$. Тогда оба угла в основании $\triangle AKN$ будут равны $\angle KAN = \angle AKN = \alpha$, но

$$\alpha \equiv \angle KAN = \angle KAL - \angle NAL = \beta - \alpha.$$

Из последнего мы получим, что $\beta = 2\alpha$, и наше утверждение будет доказано.

Итак, $AN = AL = \Phi - D$ по построению окружности, радиусами которой являются AN, AL . Кроме того, $KN = KL - NL$. Далее, $KL = D$ по построению окружности, радиусом которой является KL . Чтобы определить KN , надо знать NL . Последний вычисляется из подобия треугольников $\triangle AKL$ и $\triangle ANL$ с учетом выражения (7.1). Из соотношения подобных сторон имеем

$$\frac{NL}{AL} = \frac{AL}{KL}, \quad \text{или} \quad \frac{NL}{AL} = \frac{\Phi - D}{D} = [\text{из (7.1)} \Rightarrow] = \frac{D}{\Phi}.$$

Откуда
$$NL = \frac{(\Phi - D)D}{\Phi},$$

$$KN = D - \frac{(\Phi - D)D}{\Phi} = \frac{D^2}{\Phi} = [\text{из (7.1)} \Rightarrow] = \frac{(\Phi - D)}{D} D = \Phi - D.$$

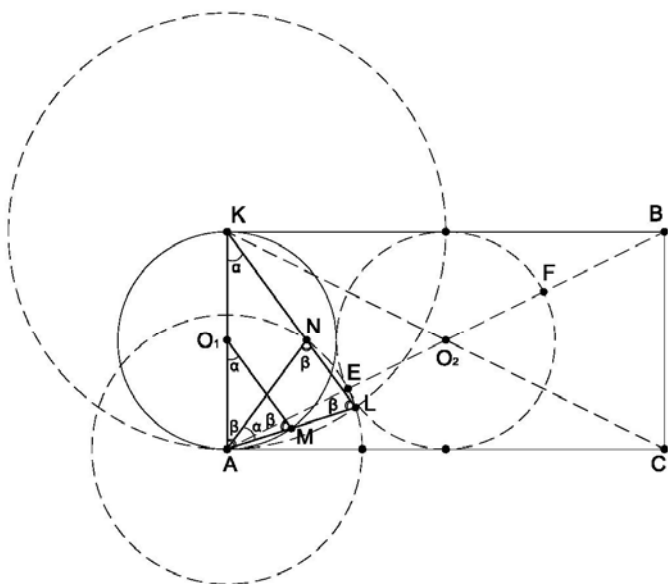


Рис.25. Деление на десять равных частей окружности, построенной в данной точке с помощью отрезков Золотого Сечения.

В итоге получим, что $KN = AN = \Phi - D$, значит $\triangle AKN$ – равнобедренный. Как было сказано выше, отсюда следует: $\alpha = \pi/5$. Утверждение доказано.

П.8. О позиционном счислении

П.8.1. О представлении чисел позиционного счисления

1. Теорема.

Поскольку и пока множество чисел натурального ряда является счетным, постольку и до тех пор множество положительных дробных чисел десятичного счисления меньших единицы счетно.

Доказательством теоремы является способ упорядочивания всех чисел больше нуля и меньше единицы относительно упорядоченного ряда целых положительных чисел.

Искомый способ основан на возможности зеркального отображения строки цифр относительно позиции запятой в числе и исчерпывается следующим набором процедур: полная круговая перестановка цифр.

Номером позиции n любого положительного дробного числа D_n десятичного позиционного счисления $D_n = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_{i-1} a_i a_{i+1} \dots a_{k-1} a_k$, где $a_i = 0, 1, 2, \dots, 9$, в точности равен позиции n положительного целого числа C_n десятичного позиционного счисления $C_n = a_k a_{k-1} \dots a_{i+1} a_i a_{i-1} \dots a_3 a_2 a_1, 0$. Для определения дробного числа D_m рассматриваемого множества, соответствующего номеру m , необходимо выписать число C_m натурального ряда с номером m , произвести полную круговую перестановку его цифр и слева добавить запятую и ноль (для указания количества целых чисел в нем).

Для иллюстрации выпишем последовательно в столбик слева числа C_n натурального ряда, а справа – соответствующее число из D_n :

1,0	0,1
2,0	0,2
.....	
9,0	0,9
10,0	0,01
11,0	0,11
12,0	0,21

19,0	0,91
100,0	0,001
156700,0	0,007651

Следствие.

В силу приведенного биективного соответствия мощности рассматриваемых бесконечных множеств равны.

2. Теорема

Поскольку и пока множество чисел натурального ряда является счетным, постольку и до тех пор множество всех подмножеств натурального ряда счетно.

Доказательство.

Из условия теоремы и определения подмножеств следует, что каждое из рассматриваемых подмножеств состоит из целых чисел и только целых чисел натурального ряда. Тот же вывод относится и к собственно натуральному ряду, рассматриваемому как подмножество самого себя.

Из предыдущего вывода и определения операции объединения множеств следует, что множество, представляющее объединение всех подмножеств натурального ряда, включая и (возможно неограниченное число раз) натуральный ряд как собственное подмножество, состоит из чисел и только целых чисел натурального ряда. Следовательно, во множестве всех подмножеств натурального ряда содержатся как все члены натурального ряда, а их неограниченное количество, так и неограниченное количество копий каждого члена данного ряда. Таким образом в нем содержатся целые числа и только целые числа. Поскольку целые числа, члены натурального ряда, упорядочиваемы, постольку все элементы множества всех подмножеств натурального ряда, т. е. копии целых чисел, взаимно однозначно упорядочиваемы в клетках двумерной неограниченной таблицы. Например, в первом столбце расположим (по порядку возрастания) все первые копии целых чисел, во втором – вторые копии, в третьем – третьи и т. д. так, чтобы все копии одного и того же числа последовательно заполняли одну строку, начиная с первого столбца.

Осуществляя ставшим уже обычным после Кантора способом перечисление заполненных клеток двумерной таблицы (двигаясь, начиная с диагонали имеющейся угловой клетки, рекурсивно по параллельным диагоналям клеток), приходим к выводу, которым и является предложение теоремы.

3. Следуя диагональному методу и логике Кантора нетрудно доказать, по аналогии с доказательством континуальности множества положительных дробных чисел меньше единицы, несчетность

множества целых чисел, рассматривая, по Кантору, бесконечные строки цифр не справа от запятой, а слева. Однако вывод о том, что множество целых чисел не является счетным, противоречит определению счетного множества, согласно которому множество является счетным, если существует биективное соответствие между его элементами и членами натурального ряда.

4. Диагональный метод Кантора не применим к позиционному счислению с целочисленным основанием n (без незначащих нулей), цифры которого принадлежат множеству $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Выводы.

Необходима ревизия теории множеств в части множеств, действительно обладающих мощностью континуума.

Представление числа позиционного счисления с целочисленным основанием в виде актуально бесконечной **строки всевозможных позиций** (с обеих сторон от запятой) цифр и размещением нулей на незначащих позициях является математически не корректным.

Предлагается следующее.

Определение 1.

Потенциально бесконечным множеством или неограниченным множеством называется член ряда множеств, мощность которых последовательно увеличивается на одно и то же конечное число k , где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Мощность такого множества равна числу N , где $N = 0, k, 2k, 3k, \dots$

Определение 2.

Актуально бесконечным множеством или множеством, обладающим мощностью континуума, называется неперечислимое множество.

Гипотеза.

Представление **числа** позиционного счисления с целочисленным основанием, как элемента потенциально бесконечного множества, возможно **в строке** актуально бесконечного множества **позиций**.

П.8.2. О перечислимости чисел позиционного счисления

Множество всех слов в произвольном (конечном) алфавите перечислимо. Поскольку множество всех слов могут быть упорядочены в словарном порядке, т. е. в виде $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$, то существует алгоритм, дающий по произвольному натуральному числу k получить a_k член данной последовательности.

Любое число позиционного счисления может быть представлено в виде двух частей: целой и дробной. Каждая из частей отдельно, представляя некоторое целое число, является перечислимой. Любое число позиционного счисления получается выписыванием целой части, затем через запятую

выписыванием дробной части. Так как множество пар $\langle a, b \rangle$ натуральных чисел десятичного счисления перечислимо, например, функцией (n – натуральное число) [6]

$$\varphi(n) = \langle a, b \rangle, \quad \text{где } n = 2^a(2b + 1) - 1,$$

то множество всех чисел десятичного позиционного счисления является перечислимым.

Два позиционных счисления с любым целочисленным основанием являются эквивалентными в том смысле, что существует алгоритм, дающий по записи произвольного числа в первом счислении, запись этого же числа в другом, а также алгоритм, дающий по записи произвольного числа во втором счислении, запись этого же числа в первом. В силу их эквивалентности числовая функция, вычисляемая в одном из них, вычислима и в другом.

Отсюда вывод: множество положительных чисел позиционного счисления с любым целочисленным основанием перечислимо.

Примечания

¹ Не менее критичным является случай, если цепочку рассуждений начинать с «середины». Примером может служить современная математика, ведущая свое начало с постпифагорейского периода (с.17).

² В некотором смысле для такого принципа можно привести аналогию с организацией склада, пополняемого с развитием технологий все более совершенными образцами новейших инструментов, и в то же время содержащего и лом, и кирку, и лопату, и даже палку, которой первобытный человек, вероятно, впервые сбил плод с дерева; будучи всегда «под рукой», любой инструмент может быть использован по мере востребованности (с.26).

³ Физически циркуль и линейка являются единственно необходимыми инструментами для формирования обсуждаемой метрики. Однако ниже мы будем называть инструментом и выстраиваемую с помощью циркуля и линейки некую специальную форму-агрегатор (в частности, треугольник $\Delta 345$ с длинами сторон, равными трем, четырем и пяти длинам эталонного размера), содержащую все геометрические элементы, необходимые для метризации объектов, и которые в совокупности определяют минимально необходимый набор аксиом геометрии, т. е. определяют границы используемой геометрии (с.27).

⁴ Площадь плоской фигуры – это часть плоскости, ограниченная замкнутой линией; плоский угол – это часть плоскости, ограниченная двумя пересекающимися прямыми; композиция частей плоскости является плоскостью или ее частью (с.29).

⁵ Здесь требуется более тщательный анализ. В то же время множество, требующее разрешения, формируется из множества вполне дискретных и не всегда определенно упорядочиваемых свойств процесса измерения. Последнее можно рассматривать как конечное и неограниченно пополняемое. Процесс измерения, обладающий некоторым свойством, приводит к мультиплету (спектру) возможных результатов, конечному или неограниченному, дискретному или непрерывному. В связи с этим искомое разрешение множества может достигаться «локально» для комбинаций вполне определенного дискретного и конечного набора свойств (в разном порядке) процесса измерения (с.33).

⁶ Аналогично тому, как отличаются два выпущенных экземпляра одной и той же модели автомобиля от того, что мы подразумеваем, когда говорим об определенной модели автомобиля. Данная концепция была реализована в объектном программировании (с.36).

⁷ Для справки: операция, имеющая один аргумент, называется унарной, имеющая два аргумента, называется бинарной, три – тернарной и т. п. (с.60).

⁸ Для справки: операция называется замкнутой (на множестве), если при произвольном выборе аргумента (-ов) из рассматриваемого множества ее результат является элементом того же множества (с.64).

⁹ Данную операцию в геометрической модели с незамкнутым контуром без нарушения биекции можно интерпретировать как поворот радиуса окружности вокруг ее центра, расположенного на бесконечном удалении от цепочки рассматриваемых отрезков; конечная же точка радиуса фактически осуществляет сдвиг между концевыми точками отрезков (хорд), расположенных на прямой (с.71).

¹⁰ Кстати говоря, собственно существование альтернатив является поводом для последующего их симметричного рассмотрения (с.75).

¹¹ А, если сразу не увидят, то рано или поздно зададутся вопросом, почему оно столь эффективно в качестве средства метризации в практическом применении (с.76).

¹² Де-юре оставим первичность носителя структуры, а де-факто, что впоследствии при переходе к позиционному счислению станет очевидным, первичной будет порождающая функция, которая в не явном виде является необходимым атрибутом или частью внутреннего потенциала используемого счисления (с.76).

¹³ Вместе с тем неконструктивные объекты будут появляться в последующих симметризациях, они и не могут не появляться. Они появились еще в самом начале, когда симметризовали пространства разной топологии (на замкнутом и незамкнутом контуре) – пустые операции и пустые элементы. Главное, чтобы были конструктивные средства (выполняющие роль фильтра) редукции к объектам конструктивным (с.92).

¹⁴ Под триангуляцией здесь подразумевается процедура разбиения без остатка площади плоской фигуры (n -угольника) не перекрывающимися друг друга треугольниками (с.107).

¹⁵ Площадь плоской фигуры – это часть плоскости, ограниченная замкнутой линией; плоский угол – это часть плоскости, ограниченная двумя пересекающимися прямыми; композиция частей плоскости является плоскостью или ее частью (с.108).

¹⁶ Физически циркуль и линейка являются единственно необходимыми инструментами для формирования обсуждаемой метрики. Однако ниже мы будем называть инструментом и выстраиваемую с помощью циркуля и линейки некую специальную форму-агрегатор (например, $\Delta 345$), содержащую все геометрические элементы, необходимые для метризации объектов и которые в совокупности определяют минимально необходимый набор аксиом геометрии, т. е. определяют границы используемой геометрии (с.113).

¹⁷ В конвенции шумеров легитимны только аддитивные операции с величинами площадей. Все приводимые здесь мультипликативные соотношения

следует рассматривать не иначе как запись аддитивной процедуры в сокращенном виде (с.115).

¹⁸ В современной математике вместо подобного рода суммирования принято использовать умножение, т. е. вместо выражения $\sum_{60} |(N_{2j+1})|$ записывают $60 \times |(N_{2j+1})|$ или более корректно $\{(1)(0)\} \times |(N_{2j+1})|$, тем не менее всюду, по возможности, вместо мультипликативных операций будем использовать их аддитивные аналоги (с.116).

¹⁹ Для счисления с основанием отличным от десяти будем использовать слова: Единицы, Десятки, Сотни, Тысячи и т. д., определяющие в нем название порядка цифры по аналогии со счислением десятичным. Для того же счисления с заглавной буквы будут начинаться и слова, производные от приведенных, а также Ноль (с.117).

²⁰ Треугольники, изображенные на Рис.8б можно найти, например, на Рис.9а, если последний повернуть на величину острого угла треугольника в соответствующем направлении (с.140).

²¹ В дальнейшем под длиной линии подразумевается количество квадратов с одночастичной стороной, расположенных вдоль нее (с.141).

²² Обычно для демонстрации способа деления окружности на пять (десять) частей сначала строят окружность, затем выделяют в ней два взаимортогональных отрезка, радиус и полурадиус, т. е. иным путем приходят к схеме, представленной на данном рисунке (см. выше свойства $\Delta 345$) (с.147).

²³ Для получения квадрата с удвоенной площадью можно воспользоваться и квадратом на гипотенузе прямоугольного равнобедренного треугольника с катетами длиной D (с.159).

Литература

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии М: Наука, 1989.
2. Юшкевич А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. М.: Наука. т.1,2,3 – 1970-1972.
3. Клайн М. Математика. Утрата определенности; пер. с англ. И. М. Яглома. – М: Мир, 1984. – 434с.
4. Клайн М. Математика. Поиск истины; пер. с англ. В. И. Аршинова, Ю. В. Сачкова. – М: Мир, 1988. – 295с.
5. Стюарт И. Истина и красота: Всемирная история симметрии / Иэн Стюарт; пер. с англ. А. Семихатова. – М.: Астрель: CORPUS, 2010. - 461, [3] с. – (ЭЛЕМЕНТЫ)
6. Успенский В. А. Теорема Геделя о неполноте – М.: Наука, 1982. – 112с.
7. Успенский В. А. Семь размышлений на темы философии математики. Интернет-ресурс Physics Animation: <http://physics-animations.com/math-board/themes/1600.html>
8. Аристотель. Метафизика. Переводы. Комментарии. Толкования/Сост. и подготовка текста С. И. Еремеев. – СПб.: Алетейя, 2002г.; Киев: Эльга, 2002г. – 832с.
9. Платон, Тимей, 511с Сочинения в четырех томах. Т.3. / Под общ. Ред. А. Ф. Лосева и В. Ф. Асмуса; Пер. С древне-греч. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та; «Изд-во Олега Абышко», 2007. – 731с.
10. Крамер С. Н. История начинается в шуме; под ред. В. В. Струве. пер. с англ. Ф. Л. Мендельсона. – М: Наука, 1965. – 256с.