О МАТРИЦАХ РИОРДАНА

В пространстве формальных степенных рядов основную роль играют два вида преобразований. Преобразования первого вида задаются матрицей $\left(a(x),x\right)$, n-м столбцом которой ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) является ряд $x^n a(x)$:

$$\left(a(x),x\right)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Второй вид преобразований задается матрицей $\left(1,a(x)\right)$, n-м столбцом которой является ряд $a(x)$ в степени n, т. е. $a^n(x)$. Например,

$$\left(1,\frac{x}{1-x}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Первый вид преобразований соответствует умножению рядов, второй – подстановке (композиции):

$$\left(a(x),x\right)b(x)=a(x)b(x),$$

$$\left(1,a(x)\right)b(x)=b\left(a(x)\right).$$

Матрица

$$\left(b(x),x\right)\left(1,a(x)\right)=\left(b(x),a(x)\right)$$

называется матрицей Риордана [1] – [6]. Матрицы Риордана умножаются по правилу:

$$\left(b(x),a(x)\right)\left(f(x),g(x)\right)=\left(b(x)f\left(a(x)\right),g\left(a(x)\right)\right).$$

Если $b_0 \neq 0$, $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, то матрицы $(b(x), a(x))$ образуют группу, называемую группой Риордана.

Матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}(b(x), a(x))\left|e^x\right| = [b(x), a(x)],$$

где $\left|e^x\right|$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда e^x:

$$\left|e^x\right| a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

называются экспоненциальными матрицами Риордана.

Матрица

$$P = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right) = \left[e^x, x\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

имеет особый статус и называется матрицей Паскаля, или треугольником Паскаля.

Матрица

$$M = (1, -x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}, \quad M^2 = (1, x) = I,$$

также имеет особый статус и называется инволюцией группы Риордана. Очевидно, что матрица

$$RMR^{-1}$$

где R – матрица Риордана, также является инволюцией, т. е. матрицей, обратной к самой себе.

Если матрица $(b(x), a(x))$ является инволюцией, то матрица $(1, a(x))$ также является инволюцией, а ряд $b(x)$ удовлетворяет условию

$$b(a(x)) = b^{-1}(x).$$

Матрица R, такая, что

$$\left(RM\right)^2 = I$$

называется псевдо-инволюцией группы Риордана. Например, матрица PM является инволюцией, следовательно, матрица Паскаля – псевдо-инволюция.

Рассмотрим матрицы Риордана в трех аспектах, которые редко освещаются в литературе. Можно условно назвать их «обобщенными рядами Лагранжа», «обобщенными полиномами Эйлера» и «второй алгеброй».

1.

Для формального степенного ряда

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ , } a_0 = 1,\ a_1 > 0,$$

составим таблицу $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$, k-й строкой которой (k – целое число) является ряд

$$a^{k\beta}(x),\ \beta > 0.$$

Каждую строку таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$ заменим восходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член. Полученную таблицу обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_1$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_1$ проделаем ту же операцию, результат обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_2$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_2$ проделаем ту же операцию, и т. д. Например,

$$\{1+x\}_0:$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 3 & -4 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 6 & -10 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$$\{1+x\}_1 \qquad\qquad \{1+x\}_2$$

$$\begin{array}{r|ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 4 & 10 & 20 & \cdot \\
2 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot \\
k=0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\
-3 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 5 & 21 & 84 & \cdot \\
2 & 1 & 4 & 15 & 56 & \cdot \\
1 & 1 & 3 & 10 & 35 & \cdot \\
k=0 & 1 & 2 & 6 & 20 & \cdot \\
-1 & 1 & 1 & 3 & 10 & \cdot \\
-2 & 1 & 0 & 1 & 4 & \cdot \\
-3 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Каждую строку таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$ заменим нисходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член, результат обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-1}$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-1}$ проделаем ту же операцию, и т. д. Например:

$$\{1+x\}_{-1} \qquad\qquad \{1+x\}_{-2}$$

$$\begin{array}{r|ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & 0 & -1 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 1 & -4 & \cdot \\
k=0 & 1 & -1 & 3 & -10 & \cdot \\
-1 & 1 & -2 & 6 & -20 & \cdot \\
-2 & 1 & -3 & 10 & -35 & \cdot \\
-3 & 1 & -4 & 15 & -56 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 1 & 1 & -10 & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 3 & -20 & \cdot \\
1 & 1 & -1 & 6 & -35 & \cdot \\
k=0 & 1 & -2 & 10 & -56 & \cdot \\
-1 & 1 & -3 & 15 & -84 & \cdot \\
-2 & 1 & -4 & 21 & -120 & \cdot \\
-3 & 1 & -5 & 28 & -165 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Оказывается, что k-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{v}$ является ряд

$$_{(v\beta)}b(x)\,_{(v\beta)}a^{k\beta}(x),$$

где ряды $_{(v\beta)}b(x)$, $_{(v\beta)}a(x)$ определяются равенствами

$$
{}_{(\nu\beta)}b(x) = 1 + \nu\beta x\left(\log_{(\nu\beta)} a(x)\right)',
$$

$$
a\left(x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right) = {}_{(\nu\beta)}a(x), \quad {}_{(\nu\beta)}a\left(xa^{-\nu\beta}(x)\right) = a(x),
$$

$$
a(x) = {}_{(0)}a(x).
$$

Это можно вывести из формулы разложения в ряд Лагранжа для произвольных формальных степенных рядов $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$
\frac{f(x)}{1 - x(\log\varphi(x))'} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi^{-n}(x) \frac{1}{n!} \left| D^n\left(f(x)\varphi^n(x)\right)\right|_{x=0},
$$

если учесть, что k-я строка таблицы $\left\{a^{n\beta}(x)\right\}_1$ совпадает с nk-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_n$, k-я строка таблицы $\left\{a^{n\beta}(x)\right\}_{-1}$ совпадает с nk-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-n}$.

В некоторых исключительных случаях ряды, полученные описанным способом, выражаются аналитически. Например, если $a(x) = 1 + x$, то

$$
{}_{(1)}a(x) = (1-x)^{-1}, \quad {}_{(2)}a(x) = \left(\frac{1 + (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1},
$$

$$
{}_{(-1)}a(x) = \frac{1 + (1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad {}_{(1/2)}a(x) = \left(\frac{x}{2} + \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.
$$

n-ю строку матрицы

$$
[1, \log a(x)]
$$

обозначим

$$
u_0(x) = 1, \; u_n(x) = x\tilde{u}_n(x).
$$

Тогда

$$
a^{\varphi}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi \tilde{u}_n(\varphi)}{n!} x^n.
$$

n-й коэффициент ряда $a(x)$ будем обозначать $[x^n]a(x)$. Так как

$$_{(\nu\beta)}b(x)\,_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=\left(1+\nu\beta x\frac{_{(\nu\beta)}a'(x)}{_{(\nu\beta)}a(x)}\right)_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=$$

$$=_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)+\frac{\nu\beta x}{k\beta}\left(_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)\right)',$$

то

$$[x^n]_{(\nu\beta)}b(x)\,_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=[x^n]_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)+\frac{n\nu\beta}{k\beta}[x^n]_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=$$

$$=\frac{k\beta+n\nu\beta}{k\beta}[x^n]_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x);$$

так как

$$[x^n]_{(\nu\beta)}b(x)\,_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=[x^n]a^{(k+n\nu)\beta}(x),$$

то

$$[x^n]_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=\frac{k\beta}{k\beta+n\nu\beta}[x^n]a^{k\beta+n\nu\beta}(x),$$

или

$$_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\beta\tilde{u}_n(k\beta+n\nu\beta)}{n!}x^n.$$

Последнее равенство означает, что n-я строка матрицы

$$\left[1,\log{}_{(\nu\beta)}a(x)\right]$$

имеет вид

$$_{(\nu\beta)}u_n(x)=x\tilde{u}_n(x+n\nu\beta)=x(x+n\nu\beta)^{-1}u_n(x+n\nu\beta).$$

Отметим еще одно свойство рассматриваемых рядов. Подстановки $a\left(x\,_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right)$ и $_{(\nu\beta)}a\left(xa^{-\nu\beta}(x)\right)$ взаимообратные. Пусть обратной к $e^{\log a(x)}$ является подстановка

$$a(q(x))=e^x.$$

Так как

$$\exp\left(\log a\left(x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right)\right)=\exp\left(\log_{(\nu\beta)}a(x)\right)={}_{(\nu\beta)}a(x),$$

то

$$_{(\nu\beta)}a\left(q(x)a^{-\nu\beta}(q(x))\right)={}_{(\nu\beta)}a\left(q(x)e^{-\nu\beta x}\right)=e^{x},$$

Например,

$$a(x)=(1+2x)^{\frac{1}{2}},\quad {}_{(1)}a(x)=x+\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a\left(\frac{e^{2x}-1}{2}\right)=e^{x},\quad {}_{(1)}a\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)=e^{x}.$$

Таким образом,

$$\left[1,\log_{(\nu\beta)}a(x)\right]^{-1}=\left[1,q(x)e^{-\nu\beta x}\right].$$

n-й столбец матрицы

$$\left[1,q(x)e^{-\nu\beta x}\right]$$

обозначим

$$_{(\nu\beta)}q_{n}(x),\quad {}_{(0)}q_{n}(x)=q_{n}(x).$$

$_{(\nu\beta)}q_{n}(x)$ совпадает с n-м столбцом матрицы

$$\left[e^{-n\nu\beta x},q(x)\right]=\left[e^{-n\nu\beta x},x\right][1,q(x)].$$

Учитывая равенство

$$\left[e^{\varphi x},x\right]=\left(\frac{1}{1-\varphi x},\frac{x}{1-\varphi x}\right),$$

выводим

$$_{(\nu\beta)}q_{n}(x)=(1+n\nu\beta x)^{-1}q_{n}\left(\frac{x}{1+n\nu\beta x}\right).$$

Применительно к e^{x} и $1+x$ ($\nu\beta$ заменим на β):

$$a(x)=e^{x},$$

$$\left[1,\log_{(\beta)}a(x)\right]^{-1}=\left[1,xe^{-\beta x}\right],$$

$$u_n(x)=x^n,\ {}_{(\beta)}u_n(x)=x(x+\beta n)^{n-1},$$

$$q_n(x)=x^n,\quad {}_{(\beta)}q_n(x)=x^n(1+\beta nx)^{-n-1}.$$

$$a(x)=1+x,$$

$$\left[1,\log_{(\beta)}a(x)\right]^{-1}=\left[1,\left(e^x-1\right)e^{-\beta x}\right],$$

$${}_{(\beta)}u_0(x)=1,\ {}_{(\beta)}u_1(x)=x,$$

$$u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x-m),\ {}_{(\beta)}u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x+\beta n-m),$$

$$q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1},\quad {}_{(\beta)}q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1+(\beta n-m)x)^{-1}.$$

Множители v,β параметра $v\beta$ указывают на способ получения ряда ${}_{(v\beta)}a(x)$. Практически же их можно не выделять. Условием $a_1>0$ также можно пренебречь, но в случае $a_1=0$ матрица $\left[1,\log_{(\beta)}a(x)\right]$ не будет иметь обратной, т.е. не будет являться элементом группы.

Мы имеем:

$$a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\varphi}x^n,$$

$$\left(1+x\beta\left(\log_{(\beta)}a(x)\right)'\right){}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\varphi+\beta n}x^n,$$

$${}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+\beta n}a_n^{\varphi+\beta n}x^n,$$

$$\left(1,x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)^{-1}=\left(1,xa^{-\beta}(x)\right),$$

$$\left(1+x\beta\left(\log{}_{(\beta)}a(x)\right)',x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)^{-1}=\left(1-x\beta\left(\log a(x)\right)',xa^{-\beta}(x)\right).$$

В общем случае:

$$\left(1,x_{(\beta)}a^{\varphi}(x)\right)^{-1}=\left(1,x_{(\beta-\varphi)}a^{-\varphi}(x)\right),$$

$$\left(1+x\varphi\left(\log{}_{(\beta)}a(x)\right)',x_{(\beta)}a^{\varphi}(x)\right)^{-1}=\left(1-x\varphi\left(\log{}_{(\beta-\varphi)}a(x)\right)',x_{(\beta-\varphi)}a^{-\varphi}(x)\right).$$

Если

$$a(-x)=a^{-1}(x),$$

то

$${}_{(\beta)}a^{\varphi}(-x)={}_{(-\beta)}a^{-\varphi}(x),$$

$$\left(1,x_{(\beta)}a^{2\beta}(x)\right)^{-1}=\left(1,x_{(-\beta)}a^{-2\beta}(x)\right)=\left(1,x_{(\beta)}a^{2\beta}(-x)\right).$$

Например,

$$a(x)=\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$${}_{(1)}a^{2}(x)=(1-x)^{-1},\quad {}_{(-1)}a^{-2}(x)=(1+x)^{-1},$$

$$\left(1,\frac{x}{1-x}\right)^{-1}=\left(1,\frac{x}{1+x}\right).$$

Таким образом, псевдо-инволюция группы Риордана имеет прямое отношение к «обобщенным рядам Лагранжа».

Отметим правило: если

$$a(x)=b\left(x^{n}\right),$$

то

$${}_{(\beta)}a(x)={}_{(n\beta)}b\left(x^{n}\right).$$

Например,

$$b(x)=1+x,\ {}_{(2)}b(x)=\left(\frac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1},$$

$$a(x)=1+x^2,\ {}_{(1)}a(x)=\left(\frac{1+\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}.$$

Отметим два полезных равенства. Обозначим

$$a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^n x^m,\ {}_{(-1)}a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}{}_{(-1)}a_m^n x^m,$$

где

$${}_{(-1)}a(xa(x))=a(x),\quad a\left(x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)={}_{(-1)}a(x).$$

Тогда

$$\left(1+x(\log a(x))'\right)a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}{}_{(-1)}a_m^{n+m}x^m,$$

$$\left(1-x\left(\log{}_{(-1)}a(x)\right)'\right){}_{(-1)}a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{n-m}x^m.$$

Отсюда видно, что n-я строка матрицы

$$\left(1+x(\log a(x))',xa(x)\right)=\begin{pmatrix} {}_{(-1)}a_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ {}_{(-1)}a_1^1 & {}_{(-1)}a_0^1 & 0 & 0 & \cdot \\ {}_{(-1)}a_2^2 & {}_{(-1)}a_1^2 & {}_{(-1)}a_0^2 & 0 & \cdot \\ {}_{(-1)}a_3^3 & {}_{(-1)}a_2^3 & {}_{(-1)}a_1^3 & {}_{(-1)}a_0^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

совпадает с n-й строкой матрицы

$$\left({}_{(-1)}a^n(x),x\right),$$

n-я строка матрицы

$$(a(x),xa(x))=\begin{pmatrix} a_0^1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1^1 & a_0^2 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2^1 & a_1^2 & a_0^3 & 0 & \cdot \\ a_3^1 & a_2^2 & a_1^3 & a_0^4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

совпадает с n-й строкой матрицы

$$\left(\left(1-x\left(\log{}_{(-1)}a(x)\right)'\right)_{(-1)}a^{n+1}(x),x\right).$$

Например,

$$a(x)=\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$_{(-1)}a(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}},$$

$$1-x\left(\log{}_{(-1)}a(x)\right)'=\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{-1}.$$

Следовательно, $2n$-й строкой матрицы

$$\left(1+x(\log a(x))',xa(x)\right)$$

является полином

$$x^n(1+x)^n,$$

т.е. n-й столбец матрицы

$$(1,x(1+x)),$$

$(2n+1)$-й строкой матрицы

$$(a(x),xa(x))$$

является полином

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)x^n(1+x)^n,$$

т.е. n-й столбец матрицы

$$\left(\frac{1}{2}+x,x(1+x)\right).$$

И еще одно полезное правило, связанное с равенством

$$a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\varphi}x^n,\ a_0=1,$$

$$\left(1+x(\log a(x))'\right)a^{\varphi}(x)=(xa(x))'\,a^{\varphi-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi+n}{\varphi}a_n^{\varphi}x^n .$$

Обозначим

$$b(\varphi,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+n}x^n,\quad b(1,x)=\frac{\log(1-x)^{-1}}{x}.$$

Диагональную матрицу, диаглнальные элементы которой равны коэффициентам ряда $b(\varphi,x)$ обозначим $|b(\varphi,x)|$:

$$|b(\varphi,x)|\,a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+n}a_nx^n .$$

Тогда

$$|b(\varphi,x)|^{-1}\left(a^{\varphi}(x),xa(x)\right)|b(\varphi,x)|=\left((xa(x))'\,a^{\varphi-1}(x),xa(x)\right).$$

В частности,

$$|b(1,x)|^{-1}(a(x),xa(x))|b(1,x)|=\left((xa(x))',xa(x)\right),$$

откуда

$$\left[(xa(x))',xa(x)\right]=\left|\frac{e^x-1}{x}\right|^{-1}(a(x),xa(x))\left|\frac{e^x-1}{x}\right|,$$

где

$$\left|\frac{e^x-1}{x}\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)!}x^n .$$

2.

Наряду с нижними треугольными матрицами

$$(1,xa(x)),\quad a_0=1$$

будем рассматривать квадратные матрицы

$$(1,a(x)),\quad a_0=1.$$

Например,

$$\left(1,\frac{1}{1-x}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdot\\0&1&2&3&\cdot\\0&1&3&6&\cdot\\0&1&4&10&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Сюда же относится верхняя треугольная матрица $(1,1+x)$, совпадающая с оператором сдвига:

$$(1,1+x)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdot\\0&1&2&3&\cdot\\0&0&1&3&\cdot\\0&0&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=E$$

Матрицу $(1,a(x))$ можно умножать справа на матрицу с конечными столбцами, слева – на матрицу с конечными строками. Равенства

$$(1,a(x)-1)(1,1+x)=(1,a(x)),$$

$$(1,a(x)-1)\left(1,\frac{1}{1+x}\right)=\left(1,a^{-1}(x)\right),$$

$$(1,\log a(x))\left(1,e^{x}\right)=(1,a(x)),$$

$$(1,\log a(x))\left(1,e^{x}-1\right)=(1,a(x)-1)$$

несут следующую информацию.

n-й строкой матрицы $(1,a(x))$ является ряд

$$\frac{\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

где $\alpha_n(x)$ – полином степени $\leq n$; n-й строкой матрицы $\left(1,a^{-1}(x)\right)$ является ряд

$$\frac{\alpha_n^{(-1)}(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

где

$$\alpha_n^{(-1)}(x) = (-1)^n \hat{I}_{n+1}\alpha_n(x),$$

$\hat{I}_{n+1}$ – оператор, переставляющий коэффициенты полинома n-й степени в обратном порядке. Например,

$$\hat{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $a(x) = e^x$, то $\alpha_n(x) = \frac{1}{n!}A_n(x)$, где $A_n(x)$– полиномы Эйлера:

$$\frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} m^n x^m.$$

В связи с этим полиномы $\alpha_n(x)$ будем называть эйлеровыми.

Если $u_n(x)$ – n-я строка матрицы $[1, \log a(x)]$, то

$$\frac{\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_n(m)}{n!} x^m,$$

При $n > 0$ обозначим:

эйлеров полином n-й строки матрицы $(1, a(x))$:

$$\alpha_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m x^m;$$

n-ю строку матрицы $[1, \log a(x)]$:

$$u_n(x) = \sum_{m=1}^{n} u_m x^m;$$

n-ю строку матрицы $(1, a(x)-1)$:

$$v_n(x) = \sum_{m=1}^{n} v_m x^m .$$

Тогда:

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} u_m (1-x)^{n-m} A_m(x),$$

$$u_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \prod_{p=1}^{n} (x - m + p);$$

$$\alpha_n(x) = \sum_{m=1}^{n} v_m x^m (1-x)^{n-m}, \quad v_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m x^m (1+x)^{n-m};$$

$$u_n(x) = n! \sum_{m=1}^{n} v_m \frac{1}{m!} \prod_{p=0}^{m-1} (x-p) = n! \sum_{m=1}^{n} v_m \frac{1}{m!} \sum_{p=1}^{m} s(m,p) x^p ,$$

$$v_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} u_m \sum_{p=1}^{m} p! S(m,p) x^p ,$$

где $s(m,p)$, $S(m,p)$ – числа Стерлинга первого и второго рода.

Примеры:

$$a(x) = e^x,$$

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{n!} A_n(x), \quad v_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} m! S(n,m) x^m , \quad u_n(x) = x^n;$$

$$a(x) = 1 + x,$$

$$\alpha_n(x) = x^n, \quad v_n(x) = x^n, \quad u_n(x) = \prod_{m=0}^{n-1} (x-m);$$

$$a(x) = (1-x)^{-1},$$

$$\alpha_n(x) = x, \quad v_n(x) = x(1+x)^{n-1}, \quad u_n(x) = \prod_{m=0}^{n-1}(x+m);$$

$$a(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$\alpha_n(x) = 2x(1+x)^{n-1}, \quad v_n(x) = 2^n x\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-1},$$

$$u_n(x) = 2\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\prod_{p=1}^{n}(x-m+p) =$$

$$= n!\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\frac{2^m}{m!}\prod_{p=0}^{m-1}(x-p).$$

Теперь более подробно. Обозначим

$$\frac{1}{x}\alpha_n(x) = \tilde{\alpha}_n(x).$$

То же самое и для других полиномов.Тогда

$$\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{\infty}x^{m-1}\sum_{p=1}^{n}u_p m^p = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}u_p m^p x^{m-1} =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\frac{u_p\tilde{A}_p(x)}{(1-x)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}u_p(1-x)^{n-p}\,\tilde{A}_p(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_n^{(-1)}(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}u_p(-m)^p x^{m-1} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}(-1)^p u_p (1-x)^{n-p}\,\tilde{A}_p(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Матрицу, p-м столбцом которой ($p = 0,\ 1,\ \ldots$) является полином

$$\frac{1}{n!}(1-x)^{n-1-p}\,\tilde{A}_{p+1}(x)\,,\ \ p<n,$$

обозначим U_n. Например,

$$U_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ U_3 = \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ U_4 = \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -1 & -3 & 11 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$U_n\tilde{u}_n(x) = \tilde{\alpha}_n(x),$$

$$U_n\tilde{u}_n(-x) = -\tilde{\alpha}_n^{(-1)}(x) = (-1)^{n+1}\,\hat{I}_n\tilde{\alpha}_n(x),$$

то

$$U_nM = (-1)^{n+1}\,\hat{I}_nU_n, \quad M = (1,-x)$$

(и наоборот, равенство для $\alpha_n(x)$, $\alpha_n^{(-1)}(x)$ можно вывести из свойств матрицы U_n).

Если a_1 – первый коэффициент ряда $a(x)$, $a_1 = [x]a(x)$, то

$$u_n = (a_1)^n.$$

Сумма коэффициентов каждого столбца матрицы U_n, кроме последнего, равна нулю, сумма коэффициентов последнего столбца равна единице. Следовательно, сумма коэффициентов полинома $\alpha_n(x)$ равна $(a_1)^n$:

$$\sum_{m=1}^{n}\alpha_m = (a_1)^n.$$

p-м столбцом матрицы U_n^{-1}является полином

$$\frac{1}{x}\prod_{m=0}^{n-1}(x-p+m), \quad p<n.$$

В данном случае это следует из равенства

$$\tilde{\alpha}_n^{(-1)}(x)=(-1)^{n+1}\hat{I}_n\tilde{\alpha}_n(x).$$

Пусть, например,

$$\frac{x^p}{(1-x)^4}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{{}^{(p)}u_3(m)}{3!}x^{m-1}, \;\; p=0,1,\;2.$$

Так как

$$\hat{I}_3 1=x^2, \quad \hat{I}_3 x=x, \quad \hat{I}_3 x^2=1,$$

то ${}^{(0)}u_3(m)$ должно равняться нулю при подстановках $m=0,-1,-2$; ${}^{(1)}u_3(m)$ должно равняться нулю при подстановках $m=1, \;\; 0 \;\; -1$; ${}^{(2)}u_3(m)$ должно равняться нулю при подстановках $m=2, \;\; 1, \;\; 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{(1-x)^4}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^{m-1},$$

$$\frac{x}{(1-x)^4}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m-1)m(m+1)}{3!}x^{m=1},$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^4}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m-2)(m-1)m}{3!}x^{m-1}.$$

Остается обобщить на

$$\frac{x^p}{(1-x)^{n+1}}, \;\; p<n.$$

Таким образом,

$$U_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad U_3^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad U_4^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & -6\\ 11 & -1 & -1 & 11\\ 6 & 2 & -2 & -6\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица U_n^{-1} понижает степень полинома только и если он содержит множитель $(1-x)^m$. Если $\tilde{\alpha}_n(x)$ имеет вид

$$(1-x)^m\,\tilde{\alpha}_{n-m}(x),\ m<n,$$

где $\tilde{\alpha}_{n-m}(x)$ – полином степени $< n-m$, то

$$U_n^{-1}(1-x)^m\,\tilde{\alpha}_{n-m}(x)=\frac{n!}{(n-m)!}U_{n-m}^{-1}\tilde{\alpha}_{n-m}(x),$$

или

$$U_n^{-1}\left((1-x)^m,x\right)I_{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!}U_{n-m}^{-1},$$

где I_{n-m} – единичная матрица размерности $(n-m)\times(n-m)$. Например,

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}=3U_2^{-1}.$$

Соответственно, если $\tilde{u}_{n-m}(x)$ – полином степени $n-m-1$, то

$$U_n\tilde{u}_{n-m}(x)=(1-x)^m\frac{(n-m)!}{n!}U_{n-m}\tilde{u}_{n-m}(x),$$

или

$$\left((1-x)^{-m},x\right)U_nI_{n-m}=\frac{(n-m)!}{n!}U_{n-m}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{3!}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}U_2.$$

....

Обозначим

$$\hat{I}_n E \hat{I}_n = V_n, \quad \hat{I}_n E^{-1} \hat{I}_n = V_n^{-1}.$$

Например,

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ V_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ V_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$V_n^{-1} \tilde{v}_n(x) = \tilde{\alpha}_n(x).$$

Это станет очевидным, если n-ю строку матрицы $(1, a(x))$ предсиавить в виде следующего столбца [7, стр. 186]:

$$\begin{array}{r|lllll}
m=0 & \quad 0 & & & & \\
1 & a_0^0 \alpha_{(n,\,1)} & & & & \\
2 & 2a_0^1 \alpha_{(n,\,1)} \ + & a_0^0 \alpha_{(n,\,2)} & & & \\
3 & 3a_0^2 \alpha_{(n,\,1)} \ + & 3a_0^1 \alpha_{(n,\,2)} \ + & a_0^0 \alpha_{(n,\,3)} & & \\
4 & 4a_0^3 \alpha_{(n,\,1)} \ + & 6a_0^2 \alpha_{(n,\,2)} + & 4a_0^1 \alpha_{(n,\,3)} \ + & & a_0^0 \alpha_{(n,\,4)} \\
. & \quad . & \quad . & \quad . & & \quad . \\
m>n & m a_0^{m-1} \alpha_{(n,\,1)} + & \quad \cdots & \quad + & & \dfrac{m!}{n!(m-n)!} a_0^{m-n} \alpha_{(n,\,n)}
\end{array}$$

где

$$\alpha_{(n,\,m)} = \sum \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_n!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}, \quad m \le n,$$

выражению $\prod_{p=1}^{n} a_p^{m_p}$ соответствует разбиение $n=\sum_{p=1}^{n} pm_p$, $\sum_{p=1}^{n} m_p = m$ и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на m слагаемых. Отсюда видно, что если $a_0 = 1$, то

$$\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\alpha_{(n,\ m)} x^{m-1}}{(1-x)^{m+1}} = \frac{\sum_{m=1}^{n} \alpha_{(n,\ m)} x^{m-1} (1-x)^{n-m}}{(1-x)^{n+1}}.$$

При $a_0 = 0$ получаем матрицу $(1, a(x)-1)$, n- я строка которой имеет вид

$$v_n(x) = x\tilde{v}_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{(n,\ m)} x^m :$$

$$(1, a(x)-1) =$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & a_2 & a_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & a_3 & 2a_1a_2 & a_1^3 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & a_4 & 2a_1a_3 + a_2^2 & 3a_1^2a_2 & a_1^4 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & a_5 & 2a_1a_4 + 2a_2a_3 & 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2 & 4a_1^3a_2 & a_1^5 & 0 & \cdot \\
0 & a_6 & 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 & 3a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 + a_2^3 & 4a_1^3a_3 + 6a_1^2a_2^2 & 5a_1^4a_2 & a_1^6 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Очевидно, что если

$$\log a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

то

$$u_n(x) = n! \sum_{m=1}^{n} \frac{\delta_{(n,\ m)}}{m!} x^m,$$

где

$$\delta_{(n,\ m)} = \sum \frac{m!}{m_1!m_2! \ldots m_n!}\ b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots\ b_n^{m_n},\ \ m \le n,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на m слагаемых. В свою очередь, как следует из равенства

$$\left(1,\log a(x)\right)=\left(1,a(x)-1\right)\left(1,\log(1+x)\right),$$

$$b_n=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{\alpha_{(n,\ m)}}{m}.$$

Примеры:

$$a(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1},\quad a(x)-1=x\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1},$$

$$\tilde{v}_n(x)=\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-1},$$

$$\tilde{\alpha}_n(x)=\hat{I}_nE^{-1}\hat{I}_n\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-1}=\hat{I}_nE^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1},$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}}=(1-x)^{-2}\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1},$$

$$u_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\prod_{m=0}^{n-1}(x-p+m).$$

Еще пример:

$$a(x)=\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right)^2,$$

$$a(x)-1=xa^{1/2}(x)=x\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right),$$

$$\left\{a^{1/2}(x)\right\}_0:$$

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 2 & \frac{4}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{64} & \cdot \\
3 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{2} & \frac{15}{128} & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & \cdot \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \cdot \\
k = \quad 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{128} & \cdot \\
-3 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{128} & 0 & \cdot \\
-4 & 1 & -2 & \frac{4}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{64} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

k-й нисходящей диагональю таблицы является ряд

$$\left(1-\frac{x}{2}(\log(1+x))'\right)(1+x)^{\frac{k}{2}}=\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{-1}(1+x)^{\frac{k}{2}}.$$

Следовательно, $2n$-й строкой матрицы $\left(1, xa^{1/2}(x)\right)$, $n>0$, является полином

$$\hat{I}_{2n+1}\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{n-1}=x^n\left(\frac{1}{2}+x\right)(1+x)^{n-1}.$$

Отсюда

$$\tilde{\alpha}_{2n}(x)=\hat{I}_{2n}E^{-1}\hat{I}_{2n}x^{n-1}\left(\frac{1}{2}+x\right)(1+x)^{n-1}=$$

$$=\hat{I}_{2n}E^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{n-1}=\hat{I}_{2n}\frac{1}{2}(1+x)x^{n-1}=\frac{1}{2}(1+x)x^{n-1}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\prod_{m=0}^{2n-1}(x-n+1+m)+\frac{1}{2}\prod_{m=0}^{2n-1}(x-n+m)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-m^2\right),$$

$$u_{2n}(x)=x\prod_{m=1}^{2n-1}(x+n-m)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-m^2\right).$$

p-м столбцом матрицы $U_n^{-1}V_n^{-1}$, отображающей $\tilde{v}_n(x)$ на $\tilde{u}_n(x)$, является полином

$$U_n^{-1}(1-x)^{n-p-1}x^p=\frac{n!}{(p+1)!}\frac{1}{x}\prod_{m=0}^{p}(x-m)=$$

$$=\frac{n!}{(p+1)!}\sum_{m=1}^{p+1}s(p+1,\ m)x^{m-1}.$$

Следовательно, p-м столбцом обратной матрицы является полином

$$\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{p+1}m!S(p+1,\ m)\,x^{m-1}.$$

Например,

$$U_4^{-1}V_4^{-1}=4!\begin{pmatrix}1&-1&2&-6\\0&1&-3&11\\0&0&1&-6\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3!}&0\\0&0&0&\frac{1}{4!}\end{pmatrix},$$

$$V_4U_4=\frac{1}{4!}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3!&0\\0&0&0&4!\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&7\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем еще одно выражение для n-й строки матрицы

$$\left[1,\log\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\right]:$$

$$u_n(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{2^{n-1-p}}\frac{n!}{(p+1)!}\prod_{m=0}^{p}(x-m).$$

....

Эйлеров полином n-й строки матрицы $\left(1, a^{\beta}(x)\right)$ обозначим

$$\alpha_n^{(\beta)}(x), \quad \alpha_n^{(1)}(x) = \alpha_n(x).$$

Тогда

$$U_n \beta \tilde{u}_n(\beta x) = \tilde{\alpha}_n^{(\beta)}(x),$$

$$U_n \beta(1, \beta x) U_n^{-1} \tilde{\alpha}_n(x) = \tilde{\alpha}_n^{(\beta)}(x).$$

Обозначим

$$W_{(n,\ \beta)} = U_n \beta(1, \beta x) U_n^{-1}.$$

Сумма коэффициентов каждого столбца матрицы $W_{(n,\ \beta)}$ равна β^n. Особый интерес представляет случай натуральных значений β. Обозначим

$$\frac{1 - x^m}{1 - x} = \sum_{n=0}^{m-1} x^n = w_m(x).$$

Ряд $\dfrac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$ представим в виде

$$\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{w_m^{n+1}(x)\tilde{\alpha}_n(x)}{\left(1 - x^m\right)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{x^p h_p(x)}{\left(1 - x^m\right)^{n+1}}.$$

Для определения полиномов $h_p(x)$ введем операторы $\left(x^p, x\right)^t$, матрица которого транспонирована к $\left(x^p, x\right)$, и $|m|$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда $\left(1 - x^m\right)^{-1}$:

$$\left(x^p, x\right)^t a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} x^n, \quad |m| a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^{nm}.$$

Тогда

$$h_p(x) = |m| \left(x^p, x\right)^t w_m^{n+1}(x) \tilde{\alpha}_n(x).$$

Например,

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{w_2^3(x)}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{1+3x^2}{\left(1-x^2\right)^3}+\frac{x\left(3+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Введем операторы $\left(1,x^m\right)$, $\left(1,x^m\right)^t$:

$$\left(1,x^m\right)a(x)=a\left(x^m\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{nm},\quad \left(1,x^m\right)^t a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}x^n.$$

p-й коэффициент ряда $\dfrac{\tilde{\alpha}_n^{(m)}(x)}{(1-x)^{n+1}}$ равен $(mp+m-1)$-му коэффициенту ряда $\dfrac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$:

$$\left[x^p\right]\frac{\tilde{\alpha}_n^{(m)}(x)}{(1-x)^{n+1}}=\left[x^{mp+m-1}\right]\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\left(1,x^m\right)\frac{\tilde{\alpha}_n^{(m)}(x)}{(1-x)^{n+1}}=\frac{h_{m-1}(x)}{\left(1-x^m\right)^{n+1}},$$

$$\tilde{\alpha}_n^{(m)}(x)=\left(1,x^m\right)^t h_{m-1}(x)=\left(1,x^m\right)^t|m|\left(x^{m-1},x\right)^t w_m^{n+1}(x)\tilde{\alpha}_n(x).$$

Таким образом,

$$W_{(n,\ m)}=\left(1,x^m\right)^t|m|\left(x^{m-1},x\right)^t\left(w_m^{n+1}(x),x\right)I_n,$$

Например,

$$W_{(2,\ 2)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\3&3\\1&3\\0&1\end{pmatrix}.$$

Убедимся, что $W_{(n,\ m)}$ – квадратная матрица размерности $n\times n$:

$$w_2^2(x) = (1,\ 2,\ 1),$$
$$w_2^3(x) = (1,\ 3,\ 3,\ 1),$$
$$w_2^3(x) = (1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1).$$

$$W_{(1,\ 2)} = (2), \quad W_{(2,\ 2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad W_{(3,\ 2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$w_3^2(x) = (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$w_3^3(x) = (1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 6,\ 3,\ 1),$$
$$w_3^4(x) = (1,\ 4,\ 10,\ 16,\ 19,\ 16,\ 10,\ 4,\ 1).$$

$$W_{(1,\ 3)} = (3), \quad W_{(2,\ 3)} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad W_{(3,\ 3)} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 16 & 19 & 16 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$w_4^2(x) = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$w_4^3(x) = (1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 12,\ 12,\ 10,\ 6,\ 3,\ 1),$$
$$w_4^4(x) = (1,4,10,20,31,40,44,40,31,20,10,4,1).$$

$$W_{(1,\ 4)} = (4), \quad W_{(2,\ 4)} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad W_{(3,\ 4)} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 4 \\ 40 & 44 & 40 \\ 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$w_2^5(x) = (1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1),$$
$$w_3^5(x) = (1,\ 5,\ 15,\ 30,\ 45,\ 51,\ 45,\ 30,\ 15,\ 5,\ 1).$$

$$W_{(4,\ 2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad W_{(4,\ 3)} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 & 0 \\ 51 & 45 & 30 & 15 \\ 15 & 30 & 45 & 51 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Процедуру получения матриц $W_{(n,\ m)}$ можно упростить. Представим бесконечную матрицу $W_{(\ ,m)}$, n-я строка которой совпадает с

$(mn+m-1)$-й строкой матрицы $(a(x),x)$. Например,

$$W_{(\ ,2)}=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ W_{(\ ,3)}=\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \cdot \\ a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Матрица $W_{(n,\ m)}$ является пересечением n первых строк и n первых столбцов матрицы $W_{(\ ,m)}$ при $a(x)=w_m^{n+1}(x)$.

Отметим равенства

$$W_{(n,\ m)}\tilde{A}_n(x)=m^n\tilde{A}_n(x),$$

$$W_{(n,\ m)}\hat{I}_n=\hat{I}_nW_{(n,\ m)},\quad W_{(n,\ m)}W_{(n,\ p)}=W_{(n,\ mp)},$$

$$W_{(n,\ m)}(1-x)^p\tilde{\alpha}_{n-p}(x)=(1-x)^pW_{(n-p,\ m)}\tilde{\alpha}_{n-p}(x),\ \ p<n,$$

или

$$\left((1-x)^{-p},x\right)W_{(n,\ m)}\left((1-x)^p,x\right)I_{n-p}=W_{(n-p,\ m)}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 4 \\ 40 & 44 & 40 \\ 4 & 10 & 20 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=(2).$$

….

Эйлеров полином n-й строки матрицы $\left(1,{}_{(\beta)}a(x)\right)$, где

$$a\left(x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right) = {}_{(\beta)}a(x), \quad {}_{(\beta)}a\left(xa^{-\beta}(x)\right) = a(x),$$

обозначим

$${}_{(\beta)}\alpha_n(x), \quad {}_{(0)}\alpha_n(x) = \alpha_n(x).$$

Так как

$$E^{n\beta}\tilde{u}_n(x) = \tilde{u}_n(x+n\beta) = {}_{(\beta)}\tilde{u}_n(x),$$

то

$$U_n E^{n\beta} U_n^{-1} \tilde{\alpha}_n(x) = {}_{(\beta)}\tilde{\alpha}_n(x).$$

Обозначим

$$U_n E^n U_n^{-1} = A_n.$$

Например,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 3 & 1 \\ -28 & -\frac{35}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \\ 20 & \frac{22}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ -5 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$ME^nM = E^{-n}, \quad M = (1, -x),$$

$$U_n M U_n^{-1} = (-1)^{n+1}\hat{I}_n,$$

то

$$\hat{I}_n A_n \hat{I}_n = A_n^{-1}.$$

Таким образом, матрица A_n^{-1} получается из A_n перестановкой в обратном порядке строк и столбцов:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}, \quad A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} & 20 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{35}{3} & -28 \\ 1 & 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A_n^{\beta} = U_n E^{n\beta} U_n^{-1},$$

$$\log A_n = U_n n D U_n^{-1},$$

где D – оператор дифференцирования. Так как

$$E^{n\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n\beta D)^m}{m!},$$

то

$$A_n^{\beta} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\beta^m}{m!} (\log A_n)^m.$$

Например,

$$A_2^{\beta} = I_2 + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3^{\beta} = I_3 + \beta \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} + \frac{\beta^2}{2!} 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^{\beta} = I_4 + \beta \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 1 \\ -18 & 4 & 8 & -6 \\ 6 & -8 & -4 & 18 \\ -1 & 1 & -3 & -13 \end{pmatrix} + \frac{\beta^2}{2!} \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & -3 \\ -21 & -9 & 3 & 15 \\ 15 & 3 & -9 & -21 \\ -3 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{\beta^3}{3!} 16 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если $\tilde{\alpha}_{n-m}(x)$ – полином степени $< n-m$, $m < n$,
то

$$A_n^{\beta} (1-x)^m \tilde{\alpha}_{n-m}(x) = (1-x)^m A_{n-m}^{\frac{n\beta}{n-m}} \tilde{\alpha}_{n-m}(x),$$

или

$$\left(\left(1-x\right)^{-m},x\right)A_n^{\beta}\left(\left(1-x\right)^{m},x\right)I_{n-m}=A_{n-m}^{\frac{n\beta}{n-m}}.$$

Заметим, что сумма коэффициентов каждого столбца матрицы A_n^{β} равна единице.

n-ю строку матрицы $\left(1,{}_{(\beta)}a(x)-1\right)$ обозначим

$$_{(\beta)}v_n(x),\quad {}_{(0)}v_n(x)=v_n(x).$$

Тогда

$$V_nU_nE^{n\beta}U_n^{-1}V_n^{-1}\tilde{v}_n(x)={}_{(\beta)}\tilde{v}_n(x).$$

Матрицы

$$V_nU_n,\quad U_n^{-1}V_n^{-1}$$

определенным образом соотносятся с матрицами

$$\left[e^x,e^x-1\right],\ \left[\left(1+x\right)^{-1},\log\left(1+x\right)\right].$$

Из равенства

$$\left[\left(1+x\right)^{-1},\log\left(1+x\right)\right]\left[e^{n\beta},x\right]\left[e^x,e^x-1\right]=\left[\left(1+x\right)^{n\beta},x\right]$$

вытекает равенство

$$V_nU_nE^{n\beta}U_n^{-1}V_n^{-1}=\left|n\right|\left(\left(1+x\right)^{n\beta},x\right)^t\left|\frac{1}{n}\right|I_n,$$

где $\left|n\right|$, $\left|\frac{1}{n}\right|$ – взаимообратные диагональные матрицы:

$$\left|n\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n,\ \left|\frac{1}{n}\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n.$$

Например,

$$V_4U_4E^4U_4^{-1}V_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&6&4\\0&1&4&6\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицу A_n^β можно также представить в виде

$$A_n^\beta = V_n^{-1} |n| \left((1+x)^{n\beta}, x \right)^t \left| \frac{1}{n} \right| V_n .$$

3.

Если в алгебре формальных степенных рядов без свободного члена

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n ,$$

задаваемой матрицами

$$\left(a(x), x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x^n, x \right),$$

матрицу умножения

$$\left(x^n, x \right)$$

заменить матрицей подстановки

$$\left(1, x^n \right),$$

получится алгебра, изоморфная алгебре формальных рядов Дирихле, но действующая в пространстве формальных степенных рядов без свободного члена.

Обозначим

$$\left(1, x^n \right) = \left\langle x^n, 1 \right\rangle,$$

где символ 1 в выражении $\left\langle x^n, 1 \right\rangle$ означает единичную матрицу, но не ряд, и введен ради аналогии с матрицами Риордана. Тогда

$$\left\langle a(x), 1 \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\langle x^n, 1 \right\rangle,$$

$$\left\langle a(x),1\right\rangle = \begin{pmatrix} a_\Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_4 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_6 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_8 & a_4 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_9 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

n-м столбцом матрицы $\left\langle a(x),1\right\rangle$ является ряд $a\left(x^n\right)$, так что

$$a(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_\Sigma .$$

Для обращения с величинами $a_\Sigma = \infty$ и $a_\Sigma = 0$ можно ввести непротиворечивые правила, но нам это пока без надобности.

Будем обозначать:

$$\left\langle a(x),1\right\rangle b(x) = a(x) \circ b(x).$$

n-й коэффициент ряда

$$c(x) = a(x) \circ b(x)$$

равен

$$c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d} ,$$

где символ $d \mid n$ означает, что суммирование ведется по всем делителям числа n:

$$c_1 = a_1 b_1 ,$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1 ,$$

$$c_3 = a_1 b_3 + a_3 b_1 ,$$

$$c_4 = a_1 b_4 + a_2 b_2 + a_4 b_1.$$

Отметим правило: если

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \circ \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\beta} x^n \right) \circ \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{\beta} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{\beta} x^n$$

Обратным к $a(x)$ назовем ряд $a^{(-1)}(x)$, определяемый равенством

$$a(x) \circ a^{(-1)}(x) = a^{(0)}(x) = x.$$

Это согласуется с тем, что $\langle x, 1 \rangle$ – единичная матрица. Обозначим также

$$a^{(n-1)}(x) \circ a(x) = a^{(n)}(x).$$

Проследим аналогию между матрицами $(a(x), x)$ и $\langle a(x), 1 \rangle$.

Так как

$$(x^n, x)(x^m, x) = (x^m, x)(x^n, x) = (x^{n+m}, x),$$

то

$$(a(x), x)(b(x), x) = (b(x), x)(a(x), x);$$

так как

$$\langle x^n, 1 \rangle \langle x^m, 1 \rangle = \langle x^m, 1 \rangle \langle x^n, 1 \rangle = \langle x^{nm}, 1 \rangle,$$

то

$$\langle a(x), 1 \rangle \langle b(x), 1 \rangle = \langle b(x), 1 \rangle \langle a(x), 1 \rangle.$$

Так как

$$(x^m, x)^n = (x^{mn}, x),$$

то $(a(x), x)$ является степенным рядом:

$$(a(x), x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x, x)^n;$$

так как

$$\left\langle x^m,1\right\rangle^n=\left\langle x^{m^n},1\right\rangle,$$

то $\left\langle a(x),1\right\rangle$ является суммой $a_1\left\langle x,1\right\rangle$ и бесконечного множества степенных рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{m^n}\left\langle x^m,1\right\rangle^n,$$

где $m>1$ и не принимает значений, равных степени натурального числа, отличной от 1.

Отсюда видно, что если при фиксированном $m>1$ из матрицы $\left\langle a(x),1\right\rangle$ удалить все строки, кроме строк с номерами m^n и все столбцы, кроме столбцов с номерами m^n, то получится обычная матрица умножения. Например, при $m=2$, $m=3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_4 & a_2 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_8 & a_4 & a_2 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_9 & a_3 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_{27} & a_9 & a_3 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы вида

$$\left\langle a(x),1\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left\langle x^m,1\right\rangle^n,\ m>1,$$

будучи степенными рядами, задают алгебру, изоморфную обычной алгебре степенных рядов: если

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{m^n}\right)\circ\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{m^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{m^n}.$$

Например,

$$\left(x+x^2\right)^{(m)}=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^{2^n},$$

$$\left(x+x^2\right)^{(-m)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^{2^n}.$$

...

Матрицу, n-м столбцом которой является ряд $a^{(n)}(x)$, обозначим $\langle x,a(x)\rangle$. Например,

$$\left\langle x,\frac{x}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&1&1&1&\cdot\\0&1&2&3&4&\cdot\\0&1&2&3&4&\cdot\\0&1&3&6&10&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad \left\langle x,\frac{x^2}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&1&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&2&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&2&1&\cdot\\0&1&1&0&\cdot\\0&1&2&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&1&4&3&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\langle x,a(x)\rangle f(x)=f\langle a(x)\rangle;$$

$$\langle b(x),1\rangle\langle x,a(x)\rangle=\langle b(x),a(x)\rangle.$$

Произведение матриц вида $\langle b(x),a(x)\rangle$ не является матрицей того же вида (по определению, матрицу $\langle b(x),1\rangle$ нельзя рассматривать как частный случай матрицы $\langle b(x),a(x)\rangle$), но заметим, что если

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n,$$

то

$$\left\langle x,a(x)\right\rangle x^m f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \left\langle a^{(n)}(x),1\right\rangle a^{(m)}(x)=$$

$$=\left\langle f\left\langle a(x)\right\rangle,1\right\rangle a^{(m)}(x).$$

Следовательно,

$$\left\langle x,a(x)\right\rangle (f(x),x)=\left\langle f\left\langle a(x)\right\rangle,a(x)\right\rangle,$$

$$\left\langle x,a(x)\right\rangle f(x)c(x)=\left\langle x,a(x)\right\rangle f(x)\circ\left\langle x,a(x)\right\rangle c(x),$$

$$\left\langle x,a(x)\right\rangle (1,g(x))=\left\langle x,g\left\langle a(x)\right\rangle\right\rangle,$$

$$\left\langle b(x),a(x)\right\rangle (f(x),g(x))=\left\langle b(x)\circ f\left\langle a(x)\right\rangle,g\left\langle a(x)\right\rangle\right\rangle.$$

Таким образом, любую матрицу вида $\left\langle b(x),a(x)\right\rangle$ можно представить в виде произведения матрицы того же вида и матрицы Риордана.

Отсюда получаем для алгебры, задаваемой матрицами $\left\langle a(x),1\right\rangle$ аналоги операций возведения в степень и логарифмирования. Обозначим:

$$a^{(\varphi)}(x)=\left\langle x,a(x)-x\right\rangle (1+x)^{\varphi},\ a_1=1,$$

тогда

$$a^{(\varphi)}(x)\circ a^{(\beta)}(x)=a^{(\varphi+\beta)}(x);$$

$$\log_\circ a(x)=\left\langle x,a(x)-x\right\rangle \log(1+x),\ a_1=1,$$

тогда

$$\log_\circ a^{(\varphi)}(x)=\varphi\log_\circ a(x)$$

$$\log_\circ (a(x)\circ b(x))=\log_\circ a(x)+\log_\circ b(x).$$

Отметим равенство

$$\left\langle x,\log_\circ a(x)\right\rangle e^x=x\left(1,\log\frac{a(x)}{x}\right)e^x=a(x).$$

n-ю строку матрицы

$$\left\langle x,a(x)-x\right\rangle,\ a_1=1,\ a_2\neq 0,$$

обозначим $v_n(x)$. Так как

$$\langle x, a(x)-x\rangle(1,1+x)=\langle x, a(x)\rangle,$$

$$\langle x, a(x)-x\rangle\left(1,\frac{1}{1+x}\right)=\langle x, a^{(-1)}(x)\rangle,$$

то, при $n>1$, n-я строка матрицы $\langle x, a(x)\rangle$ имеет вид $\dfrac{\alpha_n(x)}{(1-x)^{m+1}}$, n-я строка матрицы $\langle x, a^{(-1)}(x)\rangle$ имеет вид $\dfrac{\alpha_n^{(-1)}(x)}{(1-x)^{m+1}}$, где m – степень полинома $v_n(x)$,

$$\tilde{\alpha}_n(x)=\hat{I}_m E^{-1}\hat{I}_m\tilde{v}_n(x),$$

$$\tilde{\alpha}_n^{(-1)}(x)=(-1)^m\hat{I}_m\tilde{\alpha}_n(x).$$

n-ю строку матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\langle x, \log\circ\, a(x)\rangle\left|e^x\right|$ обозначим $u_n(x)$. Тогда

$$a^{(\varphi)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(\varphi)}{n!}x^n,$$

$$\frac{\alpha_n(x)}{(1-x)^{m+1}}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{u_n(p)}{n!}x^p.$$

...

Представление числа n в виде произведения натуральных множителей, упорядоченных по возрастанию, будем называть разложением числа n на множители. Можно показать, что n-я строка матрицы $\langle x, a(x)\rangle$, $n>1$, представима в виде следующего столбца:

$$\begin{array}{c|lllll}
0 & 0 \\
1 & a_1^0\alpha_{(n,\,1)} \\
2 & 2a_1^1\alpha_{(n,\,1)} & + \quad a_1^0\alpha_{(n,\,2)} \\
3 & 3a_1^2\alpha_{(n,\,1)} & + \quad 3a_1^1\alpha_{(n,\,2)} & + \quad a_1^0\alpha_{(n,\,3)} \\
4 & 4a_1^3\alpha_{(n,\,1)} & + \quad 6a_1^2\alpha_{(n,\,2)} & + \quad 4a_1^1\alpha_{(n,\,3)} & + \quad a_1^0\alpha_{(n,\,4)} \\
. & . & . & . & . \\
m>r & ma_1^{m-1}\alpha_{(n,\,1)} + & \cdots & + & \dfrac{m!}{r!(m-r)!}a_1^{m-r}\alpha_{(n,\,r)}
\end{array},$$

где r – число множителей в разложении n на простые множители,

$$\alpha_{(n,\,m)} = \sum \frac{m!}{m_2!m_3!\ldots m_n!}\, a_2^{m_2}a_3^{m_3}\ldots a_n^{m_n}, \quad m \le r,$$

выражению $\prod_{p=2}^{n} a_p^{m_p}$ соответствует разложение $n = \prod_{p=2}^{n} p^{m_p}$, $\sum_{p=2}^{n} m_p = m$, и суммирование ведется по всем разложениям числа n на m неединичных множителей.

При $a_1 = 0$ Получаем матрицу $\langle x, a(x) - x\rangle$, n-я строка которой имеет вид

$$v_0(x) = 0, \quad v_1(x) = 1, \quad v_n(x) = \sum_{m=1}^{r} \alpha_{(n,\,m)} x^m .$$

$$\left\langle x,a(x)-x\right\rangle=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_4 & a_2^2 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_6 & 2a_2a_3 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_7 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_8 & 2a_2a_4 & a_2^3 & 0 & \cdot\\
0 & a_9 & a_3^2 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{10} & 2a_2a_5 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{12} & 2a_2a_6+2a_4a_3 & 3a_2^2a_3 & 0 & \cdot\\
0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{14} & 2a_2a_7 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{15} & 2a_3a_5 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{16} & 2a_2a_8+a_4^2 & 3a_2^2a_4 & a_2^4 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

...

Обозначим

$$x(1-x)^{-1}=\varsigma(x)$$

Таблица, k-й строкой которой является ряд $\varsigma^{(k)}(x)$, имеет вид:

$k\setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	0	1	4	4	10	4	16	4	20	10	16	4	40	4	16	16	35	4	40	·
3	0	1	3	3	6	3	9	3	10	6	9	3	18	3	9	9	15	3	18	·
2	0	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	·
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	·
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	·
−1	0	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1	−1	0	−1	1	1	0	−1	0	·
−2	0	1	−2	−2	1	−2	4	−2	0	1	4	−2	−2	−2	4	4	0	−2	−2	·
−3	0	1	−3	−3	3	−3	9	−3	−1	3	9	−3	−9	−3	9	9	0	−3	−9	·
−4	0	1	−4	−4	6	−4	16	−4	−4	6	16	−4	−24	−4	16	16	1	−4	−24	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·

Можно показать, не выходя за рамки алгебры формальных степенных рядов, что если $u_n(x)$ – n-я строка матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle x,\log\circ\varsigma(x)\right\rangle\left|e^x\right|,$$

то

$$u_0(x)=0,\quad u_1(x)=1,\quad \frac{u_n(x)}{n!}=\frac{[x]_{s_1}[x]_{s_2}\ldots[x]_{s_r}}{s_1!s_2!\ \ldots\ s_r!},$$

где

$$[x]_{s_i}=x(x+1)(x+2)\ldots(x+s_i-1),$$

s_i – показатель степени простого числа в каноническом разложении числа n:

$$n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\ldots p_r^{s_r}.$$

Таким образом,

$$\varsigma^{(\varphi)}(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[\varphi]_{s_1}[\varphi]_{s_2}\ldots[\varphi]_{s_r}}{s_1!s_2!\ \ldots\ s_r!}x^n.$$

n-й коэффициент ряда $\log\circ\varsigma(x)$ равен $\frac{1}{s}$, если $n=p^s$, где p – простое число, и нулю в любом другом случае.

...

Если ряды

$$a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n,\ b(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$$

представить в виде логарифмов:

$$a(x)=\log c(x),\ b(x)=\log d(x),$$

то получим следующее:

$$a(x)\circ b(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\log c\left(x^n\right)=\log\prod_{n=1}^{\infty}c^{b_n}\left(x^n\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\log d\left(x^n\right)=\log\prod_{n=1}^{\infty}d^{a_n}\left(x^n\right).$$

Если при этом $b(x)=a^{(-1)}(x)$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty}c^{b_n}\left(x^n\right)=\prod_{n=1}^{\infty}d^{a_n}\left(x^n\right)=e^x.$$

n-й коэффициент ряда $c^{b_p}(x)$ обозначим $c_n^{b_p}$. Тогда по формуле Файна [7. стр.180]

$$\prod_{n=1}^{\infty}c^{b_n}\left(x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C(n)x^n,$$

где

$$C(n)=\sum c_{m_1}^{b_1}c_{m_2}^{b_2}\dots c_{m_n}^{b_n},\quad \sum_{p=1}^{n}pm_p=n,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа n.

1. L. Shapiro, S. Getu, W. Woan, L. Woodson, The Riordan group, Discrete Appl. Math., 34 (1991).
2. R. Sprugnoli, Riordan arrays and combinatorial sums, Discrete Math.,132 (1994).

3. N. Cameron, A. Nkwanta, On som (pseudo) involutions in the Riordan group, J. Ineger seq.,8 (2005).
4. G. Cheon, H. Kim, L. Shapiro, Riordan group involutions, Linear Algebra Appl., 428 (2008).
5. P. Barry, On a family of generalized Pascal triangles defined by exponential Riordan arrays, J. Integer Seq., 10 (2007).
6. P. Barry, Riordan arrays, orthogonal polynomials as moments, and Hankel transforms, J. Integer Seq., 14 (2011).
7. Риордан Д. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.