Грант Аракелян

Фундаментальные математические константы и первичные функции

Для конкретного выявления истинно фундаментальных математических констант (ФМК) и первичных функций следует вначале «забыть» об их существовании, обратившись к корневой структуре математики. Именно в её основаниях, в исходных понятиях, элементах и принципах построения математической логики и формальной математики запрятаны, как в волшебной шкатулке, важнейшие числовые величины и функции математики. Использование заложенных в исходном логико-математическом формализме ресурсов, без выхода при этом за его пределы, приводит к однозначному получению первичных – материнских функций и системно взаимосвязанного (а не голословно «избранных») семейства ФМК.

Введение. Выделенные числа

Есть такое понятие, история которого тянется с доисторических времён до наших дней и которое играет важнейшую роль практически во всех сферах человеческой деятельности. Уникально оно ещё и тем, что одинаково значимо в таких далёких друг от друга областях, как повседневная жизнь, деловые расчёты, наука и оккультизм. Нетрудно догадаться, что речь идёт о числах, известных и используемых, в той или иной степени, любым мыслящим существом, независимо от уровня его развития.

И в самом деле, буквально на каждом шагу приходится иметь дело с числами, числовыми соотношениями и конструкциями, отражающими различные стороны нашей действительности и реалий внешнего мира: от якобы предопределяющей судьбу человека даты его рождения до важнейших физических параметров Вселенной, от числовой мистики и суеверий до строгой математической теории чисел, от сомнительных нумерологических совпадений до удивительных пропорций в природе и искусстве…

Но числа числам рознь. Прежде всего, исключим из рассмотрения как не относящиеся к теме настоящей статьи *случайные числа*, связанные с обычным счётом, повседневной практикой и деловыми расчётами, определением различных переменных количественных показателей, выбором произвольных единиц измерения и систем счисления. По поводу последних нелишне заметить, что известная ещё с незапамятных времён десятичная система обязана своим существованием прежде всего количеству пальцев на руках человека, а не соображениям глубинного характера. Уступая столь же древней двенадцатеричной системе счисления, как с практической, так, особенно, теоретической точек зрения (меньше делителей, заурядность, в отличие от 12 и кратных ему величин, в чистой математике и физической теории [1]), десятичная система стала со временем настолько привычной, что ныне кажется безальтернативной и применяется повсеместно, включая теоретические расчеты.

Исключая случайные числа, мы имеем дело с выделенными числами математики, естествознания и оккультизма, которые можно разбить в три группы, с несколькими подгруппами в каждой [Там же].

1. *Математически выделенные числа:*
   а) фундаментальные математические константы,
   б) математические константы (МК),
   в) члены важнейших числовых последовательностей.
2. *Выделенные числа природы:*
   а) фундаментальные физические постоянные (ФФП),
   б) физические постоянные (ФП),
   в) числа выделенные в тех или иных разделах естествознания.
3. *Сакральные числа:*
   а) математической магии,
   б) мистики чисел и нумерологии.

Некоторые особенности выделенных чисел

Проблема ФМК – не из тех, что решаются наскоком. Для лучшего понимания природы констант, отклоняясь немного в сторону и действуя по правилу «сотри случайные черты» (А. Блок), слегка коснёмся некоторых особенностей сакральных чисел, а чуть более – величин второй группы и отличительных черт числовых последовательностей. По сути, это нечто вроде строительных лесов, которые убирают после того, как здание окончательно построено. Начнём с самого простого: возьмём по паре чисел из каждой группы и запишем все шесть выбранных величин соответственно в десятичной, двоичной и двенадцатеричной системах счисления. Пусть это будут такие хорошо известные величины, как число π и константа золотого сечения ϕ из первой группы, безразмерные физические величины α^{-1} – постоянная Зоммерфельда (величина обратная постоянной тонкой структуры) и отношение m_p/m_e массы протона к массе электрона из второй группы, Число буддизма, которое для краткости обозначим как ЧБ, и «Число зверя» Апокалипсиса ЧЗ из группы сакральных чисел. Первые четыре числа не рациональны и представлены в таблице с некоторой точностью, а сакральные числа ЧБ и ЧЗ являются в точности целыми во всех позиционных системах счисления с целочисленным основанием.

Таблица.
Запись известных чисел в различных системах счисления

Число	Десятичная система	Двоичная система	Двенадцатеричная система*
π	3,141592653589793…	11,001001000011111…	3,184809493b91866…
ϕ	1,618033988749894…	1,100111100011011…	1,74bb6772802a46a…
α^{-1}	137,035999139	10001001,0000100100	b5,0522
m_p/m_e	1836,15267389	11100101100,00100111	1090,1a
ЧБ	108	1101100	90
ЧЗ	666	1010011010	476

*a – это 10 в данной системе, b –11 (не путать с десятичными числами 10 и 11)

Вместо знакомых десятичных значений имеем чуждые нам комбинации символов. Это особенно бросается в глаза в случае «Числа зверя», с которого слетел весь его эзотерический флёр, обусловленный выстроенными в ряд тремя шестёрками, ставших неиссякаемым источником всевозможных нумерологических и мистических толкований. Вместо этого – ничем не примечательная в двенадцатеричной системе комбинация 476, которая едва ли заставит учащенно биться сердца любителей числовой магии.

Известно, что перевод с одного естественного языка на другой может сопровождаться потерей каких-то смысловых нюансов и чем сложнее переводимый текст, тем более неоднозначен его перевод. В математике дело обстоит несколько иначе. Перевод числа из одной системы счисления в другую меняет лишь символику записи числа, но не его формальные свойства. Например, как нетрудно убедиться, десятичное выражение $1\times2^2\times3^3 = 108$ для сакрального Числа буддизма равно числу 90 в двенадцатеричной системе, то есть имеет место и здесь. Вывод, очевидный даже без пояснений дидактического характера, лежит на поверхности. Следует *отличать число, как некую данность или сущность*, по разному толкуемую в философии, математике и за её пределами, *от формы его представления в различных системах счисления*, не обязательно, кстати, целочисленных или даже рациональных.

Отличие допускающей количественное выражение сущности от её конкретной числовой записи особенно наглядно на примере размерных физических постоянных из второй группы выделенных чисел. В отличие от математических величин, ФП как бы заключены не в одну, а три «оболочки» числовых значений, одна из которых, как и в математике, связана с записью в определённой системе счисления, вторая – выбором основных размерностей (например, длины, времени и массы в системе СГС), третья – единиц измерения физических величин (сантиметр, секунда, грамм в СГС).

Возьмём для примера одну из наиболее известных ФФП – скорость света в вакууме c. В десятичной системе в единицах скорости км/с константа c равна приблизительно 300 тыс. км/с, в милях и секундах она равна 186 тыс. миль/с, в каких-то других системах счисления и других единицах измерения физических величин значения, естественно, будут совершенно другими. Численное значение константы c важно, конечно, в практических расчетах, но не играет роли в физической теории. Говорят, один из создателей специальной теории относительности (c-

теории) А. Эйнштейн как-то признался, что не знает численного значения скорости света. Это и неудивительно, поскольку с теоретической точки зрения символом c обозначается фундаментальная физическая величина, неизменная на протяжении миллиардом лет существования Вселенной, не зависящая от выбора системы отсчёта и скорости наблюдателя (что положено в основу СТО и формулируется в виде универсального принципа релятивистской инвариантности) и так далее. Короче, физическое число c – это прежде всего *совокупность* фиксируемых в теории *свойств* экспериментально обнаруживаемой и существующей независимо от нашего сознания природной величины.

Первичность свойств величины по отношению к её числовому значению особенно наглядна в случае бесконечных числовых последовательностей, среди которых наибольшей, пожалуй, известностью пользуются ряды Фибоначчи и Люка, Эйлера, Бернулли и Мерсенна, множества простых чисел, биномиальных коэффициентов и совершенных чисел. Возьмём в качестве наиболее характерного и важного в данном контексте примера изученную вдоль и поперёк последовательность Фибоначчи. В её основе лежит простой принцип, «правило третьего члена»: каждое последующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих чисел. Классический ряд Фибоначчи начинается с чисел 0 и 1 (или, чаще, 1 и 1), что по правилу

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

приводит к числовому ряду

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. 144, 233, 377, \ldots,$$

который, понятно, будет выглядеть совершенно иначе в других системах счисления.

Заметим однако, что в определении последовательности Фибоначчи нет и не должно быть каких-либо указаний относительно начальных членов. Следовательно, обозначаемый через u_n ряд может начинаться с любых двух чисел; в самом общем случае это комплексные числа $u_1 = a + ib$ и $u_2 = c + id$, где a, b, c, d – действительные числа, хотя бы одно из которых не ноль, i – мнимая единица. Применяя указанное выше правило, придем к формуле

$$u_{n+2} = aF_n + cF_{n+1} + (bF_n + dF_{n+1})i.$$

Как видим, коэффициенты при a, b, c, d, каждый в отдельности, образуют классический ряд Фибоначчи, от которого не удалось «уйти» и в общем случае произвольных начальных комплексных чисел. Придавая a, b, c, d разные значения, будем иметь целиком обусловленные правилом третьего члена различные модификации рядов, включая числа Фибоначчи ($a = c = 1$, $b = d = 0$) и Люка L_n ($a = 1$, $c = 3$, $b = d = 0$). Реккурентное соотношение

$$L_{n+2} = F_n + 3F_{n+1}.$$

для общего члена приводят к ряду Люка (не путать с более общим понятием «последовательность Люка»):

$$3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \ldots,$$

которая при обычном задании правилом третьего члена

$$L_{n+2} = L_n + L_{n+1},\ (L_0 = 2, L_1 = 1)$$

начинаются с чисел 2 и 1.

Здесь важно то, что числа Фибоначчи и Люка, в любой рекурсии и независимо от выбора начальных членов, это один или несколько вполне определённых рядов, которые сходятся в пределе к константе золотого сечения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi.$$

Таким образом, появление инвариантных рядов и константы ϕ является в данном случае продуктом применения принципа построения, не содержащего каких-либо указаний касательно выбора первичных величин. Формальная схема в этом и некоторых других случаях вполне очевидна:

некий принцип (правило, закон) построения применительно к исходным математическим «кирпичикам» – понятию числа (а не конкретным числам) → формулировка принципа на языке математики посредством соотношений, формул или уравнений → появление числового ряда и МК, как результат применения принципа.

Главное для нас в такой схеме состоит в следующем: математический конструкт – константа **не выделен** из числового континуума тем или иным **определением**, вроде известного со школы «отношение длины окружности к её диаметру» для числа π, а **является следствием применения** определённого **принципа** ко всему множеству чисел. В этом можно усмотреть первый, пока ещё очень смутный намёк на то, в каком направлении должен вестись поиск ФМК.

Выводы. Методология поиска ФМК

Попытаемся извлечь из вышеизложенного некоторые полезные для дальнейшего выводы, дополнив их соображениями общего характера.

1. **Число**, как некая сущность или данность, по разному толкуемая в философии, математике, естествознании и оккультизме, **следует** чётко **отличать от** его **численного значения**, зависящего от выбора системы счисления, не обязательно целочисленной. За пределами математики, в частности естествознании, числовое значение величины зависит также от выбора единиц измерения, который в достаточной мере произволен.

2. Размерные физические величины как бы окутаны тройным слоем случайных численных значений – **системой счисления**, **выбором** некоторых **величин в качестве основных размерностей и** произвольным **выбором** соответствующих **эталонов** – единиц измерения. При всей практической важности численных значений физических констант, в теории они – символически обозначаемые природные реалии, выделенные совокупностью выявленных различными способами свойств.

3. При переходе от одной системы счисления к другой **запись чисел и числовых соотношений** в математике кардинально **меняется**, **однако их** основные **формальные свойства сохраняются**.

4. Числовые последовательности математики обязаны своим существованием положенным в их основу определённым **правилам построения**, выражаемым **в виде уравнений** и **формул**. В частности, широко известная последовательность Фибоначчи реализует правило третьего члена в виде реккурентной формулы, безотносительной в общем случае к выбору начальных чисел. Следствием данного правила является появление классической последовательности Фибоначчи и константы золотого сечения, как предельного отношения двух последовательных членов ряда.

В продолжение к этим достаточно очевидным, но полезным для лучшего понимания стоящей перед нами проблемы выводам добавим чуть позже несколько менее тривиальных и принципиально значимых, конструктивно ценных положений. Вначале отметим, что едва ли не в каждом разделе математики какие-то числа являются явно выделенными, следовательно могут считаться константами. Есть константы теории чисел, геометрии, комплексного анализа, фракталов, дискретных структур, константы, связанные с аналитическими неравенствами, аппроксимацией функций, функциональной итерацией… Всего насчитывается несколько сотен МК [3], список которых время от времени пополняется новыми членами и постепенно приближается к тысяче.

В этом постоянно разрастающемся множестве, а скорее конгломерате, выделенных чисел отдельную категорию образует относительно небольшая, обычно не превышающая два-три десятка группа констант, наделяемых громким эпитетом «избранные» [4; 5]. Но и среди «избранных» есть элитные группы «более избранных» констант. Для полной ясности сошлёмся на три известных и авторитетных источника.

В капитальной монографии справочно-энциклопедического типа [3] список **общеизвестных** (well-known) констант включает число π, константы Пифагора $\sqrt{2}$, золотого сечения ϕ, Эйлера e, Эйлера-Маскерони γ, Апери ζ(3), Каталана G, Хинчина-Леви, Фейгенбаума α и δ, Маделунга M и Хайтина Ω.

В популярной математической интернет-энциклопедии MathWorld [6] **общие** (common) константы расположены в таком алфавитном порядке: константы Апери, Каталана, Делиана (Delian) $\sqrt[3]{2}$, Эйлера, Эйлера-Маскерони, Глейшера – Кинкелина A, золотого сечения, Хинчина K, натуральный логарифм двойки $\ln 2$, число π, константы Пифагора и Солднера μ.

Наконец, в английской версии Википедии особо выделенные константы разбиты на две группы. Высший дивизион **основных базовых** (basic) констант составляют число π, константа

Эйлера, мнимая единица i, константа Пифагора. Во вторую группу **часто встречающихся в высшей математике** (encountered frequently in higher mathematics) констант входят константы Фейгенбаума, Апери, золотого сечения, Эйлера-Маскерони, Конвея λ, Хинчина, Глейшера – Кинкелина.

Проведём небольшое исследование указанных энциклопедических источников, с учётом и некоторых особенностей фигурирующих в них 18 констант. Семь из них – число π, константы Пифагора, золотого сечения, Эйлера, Эйлера-Маскерони, Апери и Хинчина (вместе с константой Хинчина – Леви) присутствуют во всех трёх работах. Четыре константы: две Фейгенбаума, Каталана и Глейшера – Кинкелина находим в двух источниках. Семь констант – мнимая единица и $\ln 2$, константы Маделунга, Хайтина, Делиана, Солднера и Конвея встречаются по разу.

Как видим, списки трёх авторитетных источников не совпадают и говорить о каком-либо общепризнанном понимании наиболее значимых констант не приходится. Можно не сомневаться, что в каком-то другом серьёзном исследовании будет предложен свой собственный набор важнейших констант. Следует особо отметить, что элитные группы отделяются от остальных «избранных» констант под такими, совершенно чуждыми точности математики шапками, как *общие*, *базовые*, *общеизвестные*, *часто встречающиеся*. И ни разу не сказано *фундаментальные*, что едва ли случайно, поскольку это понятие ко многому обязывает. В математике, разумеется, всё взаимосвязано, но не может, в частности, фундаментальная константа быть, к примеру, элементарной комбинацией других чисел или же сводимой к ним величиной. Очевидно, что относительную независимость следует считать одним из главных, хотя и не единственным, отличительных признаков ФМК.

Между тем, многие из 18 представленных в указанных источниках чисел, вроде $\sqrt[3]{2}$, $\ln 2$, константы золотого сечения $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, независимыми величинами не являются. А, допустим, константа Конвея из Википедия, неизвестно по какой причине оказавшаяся в элитном клубе, является константой хотя и любопытной, но весьма специфической последовательности «посмотри и скажи» (look-and-say), несопоставимой по известности и важности, например, с последовательностью Фибоначчи.

Если вообще внимательно и критически присмотреться к формальным особенностям констант с точки зрения их независимости и общезначимости, то на первый взгляд в сухом остатке, в качестве реальных претендентов на роль ФМК останутся лишь константы π, e, γ, i, а в меньшей степени – сравнительно малоисследованные, особенно в плане формальных свойств, константы Фейгенбаума α и δ.

Можно констатировать, что выбор некоторых МК в качестве особо избранных производится фактически «на глаз», что приводит к произволу в выборе основных констант в авторитетных источниках, которые всячески избегают широко применяемого в математике и вообще науке понятия «фундаментальный». Это и понятно, в отсутствие чётких правил отбора, формальных признаков принадлежности к узкому кругу особо выделенных величин ни о какой фундаментальности, как объективного критерия, не может быть речи и приходится довольствоваться такими ненадёжными проводниками, как интуиция и субъективные предпочтения.

Теперь уже, в продолжение и дополнение к ранее сделанным выводам относительно некоторых особенностей указанных выше членов первых двух групп и числовых последовательностей третьей группы выделенных чисел, можно перейти к формулировке методологических принципов, заложенных в основу поиска и нахождения ФМК.

5. Подобно тому, как в теории чисел константа золотого сечения является следствием применения принципа построения последовательности Фибоначчи, ФМК не могут вводится посредством каких-либо определений, а должны **появиться в результате построения** неких **математических структур**. Принципиальное отличие состоит в том, что если константа ϕ является здесь продуктом принципа частного образца, ФМК, как наиважнейшие числовые элементы математики, да, пожалуй, и всей науки, могут **появляться** лишь в **результате построений самого общего типа**, которые только допустимы в теории.

6. Следует ожидать, что **ФМК** представляют собой **семейство взаимосвязанных величин**, формально **независимых** от всех остальных чисел **и первичных** по отношению к ним.

Основные понятия оснований математики

«Забыв» о константах и придерживаясь изложенных выше методологических принципов, можно приступить к последовательному, шаг за шагом решению проблемы ФМК, а заодно и первичных математических функций. Следует отметить, что эти проблемы является органической частью теории ЛМФ, реализующей идею единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Теория ЛМФ впервые изложена в капитальной монографии [8], её сокращенный вариант представлен в книге [9], а ещё более сжатое изложение – в книге [10]. В настоящей работе нас, естественно, интересует только связанный с получением ФМК и первичных функций фрагмент теории, то есть её логико-математическая часть.

Принимая в качестве бесспорного методологического постулата возможность решения указанных проблем только в рамках оснований математики, с них и следует начать. Известно, что основанием математики, во всяком случае формализованной, служит математическая логика. Это означает, что ведущее к заветной цели построение должно начаться с самого простого, элементарного. А значит, с логических атомов – высказываний и других базисных логических элементов, образующих исчисление высказываний, на котором строится исчисление предикатов с исходным понятием предиката, или логической функции.

С учётом этого, можно конкретизировать стоящую сейчас перед нами задачу:

- составление **набора исходных логических и математических операций**, понятий **функции** и **переменной**, **терма** и **формулы**, полного **алфавита** формальной структуры логико-математического формализма,
- **построение**, с использованием первичных элементов и операций, формальной **логико-математической системы**, **охватывающей множество всех чисел**.

Словом, на данном этапе стоит задача построения аксиоматической системы универсальной математики, основанной на логическом исчислении предикатов. Выбор адекватной логической основы для формальной математики практически безальтернативен, поскольку классическое исчисление предикатов (без равенства), включающее исчисление высказываний в качестве составной части, может служить формальной основой множества различных математических систем и вполне подходит для наших целей. Такая особенность свидетельствует об универсальности логики, которая в исчислении предикатов предстаёт в виде математизированной системы, предшествующей системам чистой математики.

Не вдаваясь в детали, последовательно перечислим представленные во многих работах по математической логике все основные элементы исчисления предикатов, называемого также *логикой первого порядка*: логические и математические функции и переменные, операции, термы и формулы, индивидуальный объект нуль (подробнее см. [8], Гл.1).

а) **Логическая** *пропозициональная функция*, или *предикат*, предельный случай которого есть *единичное высказывание*.

Математические (числовые) функции:

б) *простые функции*, являющиеся в частности *постоянными величинами*, или просто *постоянными* (*константами*)

в) *сложные функции*, образуемые посредством *суперпозиции*

г) *функционалы*

д) *операторы*

Им соответствуют четыре потенциально бесконечных множества переменных:

1) *предметные (индивидные) переменные*
2) *предикатные* логические *переменные*
3) *числовые переменные*
4) операторные *функции-аргументы* математики

Понятия ***переменной*** и ***функции*** естественным образом объединяются в фундаментальном понятии ***величины***. Принимая во внимание имеющиеся возможности, необходимо различать два типа величин, при этом ***постоянные*** (***константы***) будут частным случаем ***переменных*** величин. Можно говорить о высказываниях и предикатах как о ***логических величинах***, к тому же первичных в определённом смысле по отношению к остальным величинам.

Следующий шаг состоит в выделении первичных операций, или операторов формальной системы, которых в общей сложности десять. Это пропозициональные связки $\sim$ (эквивалентность), $\supset$ (импликация), & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\neg$ (отрицание), называемые также связками исчисления высказываний, или логическими знаками. Далее имеем кванторы всеобщности ∀ и существования ∃ (перевернутые заглавные буквы английских слов **A**ll и **E**xist) исчисления предикатов, а также математические операции = (равенство), + (сложение), – (вычитание). Все операторы снабжены рангом. По убыванию ранга слева направо (ранги операторов + и – могут, впрочем, считаться одинаковыми и порядок следования для них безразличен) операторы располагаются в таком порядке:

$$\sim \;\supset\; \& \;\vee\; \neg \;\forall\; \exists \;=\; +\; -$$

Оператор более высокого ранга имеет бóльшую область действия, а значит, чем ниже ранг оператора, тем сильнее он связывает переменную. Это позволяет обходиться минимальным количеством скобок при написании логико-математических выражений, а во многих случаях можно вообще обойтись без скобок.

Будучи элементами предметного языка – языка логико-математического формализма, операторы определяются неявно посредством постулатов, в которых они в буквальном смысле слова фигурируют. Будучи же объектами рассмотрения метаязыка – языка, на котором исследуется формальная система, они, в предположении двузначности логических функций (истина либо ложь), определяются явно – посредством так называемых таблиц истинности.

Имея в своем распоряжении алфавит формальной системы (нуждающийся ещё в уточнении), можно приступить к рассмотрению правильно построенных выражений, называемых термами и формулами. Аналогами терма в грамматике естественного языка являются «слово», «подлежащее», «дополнение», аналогами формулы – «предложение», а также «суждение. Задача состоит в том, чтобы правильно построенные последовательности логических и математических символов уметь отличать от неправильно построенных, а слова формального языка (термы) от предложений – формул.

Определение терма

1 Все логические предметные переменные, все математические числовые переменные и функции-аргументы суть термы
2 Все простые и сложные математические функции, все постоянные и все функционалы суть термы
3 Если $\hat{\mathbf{A}}$ оператор, а F функция, то $\hat{\mathbf{A}}$F – терм
4 0 есть терм
5 Если p терм, то –p также есть терм
6 Если p и q термы, то p + q, p – q также суть термы
7 Других термов, помимо определённых в 1–6, нет

Определение формулы

1 Все высказывания (нульместные предикаты) суть формулы
2 Все предикаты $P(x_1, ..., x_n)$ и все предикатные переменные суть формулы
3 Если p и q термы, то p = q есть формула
4 Если A и B формулы, то A ~ B, A ⊃ B, A & B, A ∨ B, ¬A также формулы
5 Если A формула, а x переменная, то ∀x A и ∃x A суть формулы
6 Других формул, помимо определённых в 1–5, нет

Все ранее выделенные логические и математические переменные и функции охвачены этими определениями и все десять первичных операций использованы в правилах построения (правилах образования) новых термов и формул. Любая конечная последовательность выделенных графических знаков, полученная применением этих правил, даёт правильно построенные термы и формулы системы. Два различных терма это всегда две несовпадающие правильно построенные комбинации символов, которые тем не менее могут содержательно обозначать один и тот же объект, например определённое число. Аналогично обстоит дело с формулами. Обратим также внимание на принципиальное отличие математических операций сложения и вычитания от равенства: применяя к термам p и q операции + и –, получаем лишь новые термы –p, –q, p + q, p – q, в то время как применение операции = даёт математическую формулу p = q. Далее, определения терма и формулы фиксируют существенное отличие логических функций от математических: высказывания и предикаты являются формулами, а все математические функции, функционалы и операторные выражения типа $\hat{\mathbf{A}}f(x_1, ..., x_n)$ – термами. Поэтому логические операции применяются только к формулам, приводя к другим формулам, а математические операции применяются только к термам, образуя либо новые термы, либо формулы.

Классический, традиционный вариант исчисления с двузначной логической функцией предопределяет во многом характер логических постулатов. Ограничимся, как и выше, лишь краткими сведениями и комментариями. Изложение и представление аксиом и правил вывода (преобразования) логического исчисления в капитальных работах [11, 96, 142; 12, 467; 15, 72–73, 192–193], см также [13; 14; 16,], хотя и несколько различается, но в принципе не столь существенно, и мы ориентируемся на работу [12], придерживаясь по преимуществу используемой в ней символики и терминологии.

Простейшие логические функции – высказывания в классическом исчислении предикатов – могут принимать лишь два значения, которые обозначим через И (истина) и Л (ложь). Значениям И и Л формулы А соответствуют значения Л и И формулы ¬А, то есть ¬А истинно только тогда, когда А ложно, и ложно только тогда, когда А истинно. Такова вполне естественная интерпретация истинностной формулы ¬А в теории моделей двузначной формальной логики, представляемая обычно посредством т. н. истинностных таблиц, которые здесь не станем приводить. Согласно этим таблицам, эквивалентность А ~ В истинна только тогда, когда А и В оба либо истинны либо ложны; импликация А ⊃ В ложна только тогда, когда А истинно, а В ложно; конъюнкция А & В истинна только в случае истинности и А, и В; дизъюнкция А ∨ В ложна тогда, когда А и В оба ложны и истинна в остальных случаях.

Логические постулаты

Если теперь логические *атомы* А и В соединить импликацией и дизъюнкцией в логическую формулу А⊃А ∨ В и составить таблицу истинностных значений последней, то легко убедиться, что независимо от значений подформул А и В составная формула истинна во всех случаях. Формула, являющаяся истинной при произвольном распределении истинностных значений подформул А, В, С, ..., это по существу тавтология; такие формулы называют *тождественно истинными*, или *общезначимыми*. Сходные рассуждения применимы к формулам, содержащим предикаты и кванторы. Совершенно очевидно, что именно из множества тождественно истинных формул должны выбираться логические аксиомы, точнее схемы аксиом, которые конкретными аксиомами становятся тогда, когда вместо произвольных А, В, С подставляются конкретные формулы. Пятнадцать аксиомных схем вместе с тремя правилами вывода (правилами преобразования) образуют в совокупности систему постулатов классического исчисления предикатов, см. [12, 467].

$\mathbf{L}_1$ $A \supset (B \supset A)$

$\mathbf{L}_2$ $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

$\mathbf{L}_3$ $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$ *modus ponens*, или ⊃-правило

$\mathbf{L}_4$ $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$

$\mathbf{L}_5$ $A \,\&\, B \supset A$

$\mathbf{L}_6$ $A \,\&\, B \supset B$

$\mathbf{L}_7$ $A \supset A \vee B$

$\mathbf{L}_8$ $B \supset A \vee B$

$\mathbf{L}_9$ $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

$\mathbf{L}_{10}$ $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

$\mathbf{L}_{11}$ $\neg\neg A \supset A$

$\mathbf{L}_{12}$ $(A \supset B) \supset ((B \supset A) \supset (A \sim B))$

$\mathbf{L}_{13}$ $(A \sim B) \supset (A \supset B)$

$\mathbf{L}_{14}$ $(A \sim B) \supset (B \supset A)$

$\mathbf{L}_{15}$ $\forall x\, A(x) \supset A(r)$ ∀-схема

$\mathbf{L}_{16}$ $A(r) \supset \exists x\, A(x)$ ∃-схема

$\mathbf{L}_{17}$ $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x\, A(x)}$ ∀-правило

$\mathbf{L}_{18}$ $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists(x) A(x) \supset C}$ ∃-правило

Первые четырнадцать постулатов, взятые в отдельности, образуют аксиоматику исчисления высказываний, добавление же четырёх постулатов $\mathbf{L}_{15}$–$\mathbf{L}_{18}$ приводит к исчислению предикатов. Существуют и многие другие аксиоматические системы классического исчисления предикатов, но все они формально эквивалентны и в принципе равноправны. Можно по идее брать любую из них, а тот или иной выбор диктуется главным образом прагматическими соображениями. Общезначимость всех аксиомных схем доказывается методами теории моделей или более тонкими методами теории доказательств, см. [11; 12; 13; 17; 18].

Аксиомы математики

Первую – преимущественно логическую, но включающую в себя и исходные понятия формальной математики – часть программы по построению логико-математического исчисления можно считать выполненной. Разобравшись с логическими корнями, следует подумать над тем, каким должен быть математический ствол формальной системы. Это один из решающих моментов построения, усложняемый существованием десятков математических аксиоматик, основанных на логическом исчислении предикатов. Первейшее, важнейшее требование, которое мы обязаны предъявить к искомой аксиоматической системе заключается в том, что она должна содержать в себе все те первичные элементы, которые необходимы и достаточны для построения остальных объектов математики.

Универсальная, в указанном смысле, формальная система известна и обозначается символом **G** [12, 259–263]. Её исходные элементы фактически уже рассмотрены, остаётся только внести некоторые уточнения и перейти к аксиомам. Система **G** содержит следующие формальные символы:

$$\sim\ \supset\ \&\ \vee\ \neg\ \forall\ \exists = + - 0\ a\ b\ c \ldots\ x\ y\ z\ \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \chi\ \psi\ \omega\ (\ )\ _{|}$$

Это семь логических и три математические операции, расположенные, как и раньше, в порядке убывающего слева направо ранга, индивидуальный объект 0 (нуль), 26 курсивных букв латинского и 24 строчные буквы греческого алфавита, левая и правая скобки, наконец символ $_{|}$, снабжая которым переменные a, b, c, …, можно получить потенциально бесконечное множество новых переменных

$$a_{|}\ \ a_{||}\ \ a_{|||}\ \ a_{||||}\ \ldots b_{|}\ \ b_{||}\ \ b_{|||} \ldots$$

Строчные греческие буквы используются для обозначения только функций. Собственно говоря, все символы предметного языка с их содержательным смыслом за исключением $_{|}$ знакомы нам из рассмотрения логико-математических функций, переменных и операций. Хотя по идее можно сильно сократить общее количество символов, исключив, например, из списка все греческие буквы, нам всё же удобно их сохранить, и таким образом язык-объект, или предметный язык содержит в общей сложности 64 формальных символа, составляющих его алфавит. Всё остальное в этом тексте, в том числе знаки препинания, слова естественного языка, сокращения типа $\equiv$, $\approx$, ψ, $\neq$, $<$, $>$, $\lim$, $\sum$ соответствующих логико-математических выражений и т.д., относится к метаязыку – языку, посредством которого исследуется предметный язык. Заметим также, что переменные предметного языка строятся с помощью курсивных латинских букв и черточек, а переменные метаязыка – прямых латинских букв и числовых индексов. Например, символы a_1, b_2, c_4, x_5 являются метаязыковыми обозначениями соответственно предметных переменных $a_{|}$, $b_{||}$, $c_{||||}$, $x_{|||||}$, обеспечивающими по необходимости более компактную и удобную запись формальных выражений. Если функция одной переменной $f(x)$ целиком построена из четырёх символов предметного языка, а в выражении $f(x, y)$ для функции двух переменных метаязыковым символом является только запятая, то в выражении $f(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ для функции многих переменных к метаязыку относятся уже все символы внутри скобок.

Определения терма и формулы даны выше. Напомним, что если под переменными a, b, c, ..., x, y, z понимать числа (неважно пока, какие), то термами являются нуль, все переменные и постоянные числа, числовые функции, включая сложные функции, функционалы, операторные выражения, а также любые последовательности перечисленных термов, образованные с помощью операций + и – по правилам $-p$, $p + q$, $p - q$. Формулами являются равенства типа $p = q$ для термов p и q, а также выражения для формул, образованные посредством пропозициональных связок и кванторов.

Система **G**, посредством которой осуществляется переход к формальной математике, содержит следующие шесть аксиом:

$\mathbf{M}_1$ $a = b \supset (a = c \supset b = c)$

$\mathbf{M}_2$ $a = b \supset a + c = b + c$

$\mathbf{M}_3$ $a = b \supset c + a = c + b$

$\mathbf{M}_4$ $(a + b) + c = a + (b + c)$

$\mathbf{M}_5$ $a + 0 = a$

$\mathbf{M}_6$ $a - a = 0$

Содержательный смысл аксиом достаточно ясен. Аксиомы $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_4$ фиксируют свойства равенства и сложения, $\mathbf{M}_5$ – уникальное свойство нуля, состоящее в том, что прибавление нуля к любому a не меняет a, $\mathbf{M}_6$ вводит операцию – и объект $-a$, противоположный a в смысле равенства их суммы нулю. Таким образом, восемнадцать постулатов $\mathbf{L}_1$–$\mathbf{L}_{18}$ исчисления предикатов вместе с шестью математическими аксиомами для операций равенства, сложения, вычитания объектов a, b, c и нуля образуют логико-математическую аксиоматику системы **G**.

Но в чём, спрашивается, преимущество системы **G** перед другими формальными системами и что следует понимать под бесконечным множеством объектов a, b, c, ...? В отличие от систем типа **N**, имеющих единственную интерпретацию на множестве натуральных чисел, формальная система **G** допускает большое количество интерпретаций как числовой, так и нечисловой, теоретико-групповой (отсюда, кстати, и само обозначение системы – от слова **G**roup) природы. Что же касается представляющих для нас особый интерес числовых интерпретаций системы **G**, то множествами объектов a, b, c, ... могут быть:

а) все целые числа
б) все рациональные
в) все действительные числа
г) *все комплексные числа*

Если в аксиомах $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_6$ символы +, –, 0 заменить соответственно через символы $\cdot$, $^{-1}$, 1 или, что в принципе то же самое, толковать + как умножение, $-a$ как обозначение обратного a элемента, то есть деления единицы на a, 0 как единицу, то бесконечными множествами объектов системы **G** могут быть:

д) положительные рациональные числа
е) рациональные числа, не равные нулю
ж) положительные действительные числа
з) действительные числа, отличные от нуля
и) множество *не равных нулю* комплексных чисел

Содержательных интерпретаций, как видим, много, но главное здесь не их количество и многообразие, а то, что среди этого многообразия есть интерпретация (г) на множестве всех комплексных чисел, то есть на множестве всех чисел, если учесть, что действительные числа, частным случаем которых являются натуральные, есть частный случай комплексных чисел. Отметим, что система аксиом $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_6$ с операциями $\cdot$, $^{-1}$ и индивидуальным объектом 1 (в их обычных значениях) имеет интерпретацию (и) на множестве всех комплексных чисел, но только без нуля. А пытаться строить подобную систему без нуля несерьёзно, поскольку это совершенно уникальная и незаменимая математическая величина, фундаментальная математическая константа. Потребность в ней настолько велика, что даже в системе аксиом Пеано и других формальных системах типа **N** нуль добавляется к натуральному ряду, причём довольно искусственно, обычно в качестве некоего генератора натуральных чисел, и кроме того всегда фигурирует в аксиомной схеме полной индукции.

Как бы то ни было, поскольку мы добиваемся формальной системы, имеющей в виду всё без исключения множество чисел, то выбор однозначно падает на операции сложения, вычитания и константу 0, а не на умножение, деление и 1. Кроме того, есть прямой резон включить в список аксиом системы коммутативный закон для сложения, что облегчит предстоящие построения и избавит от лишних хлопот. Спектр возможных приложений системы пострадает от этого не слишком сильно: останутся коммутативные (абелевы) группы и все перечисленные числовые множества включая континуум. Таким образом, обозначаемая обычно через **AG** окончательная система математических аксиом включает в себя и аксиому

$$\mathbf{M}_7 \quad a + b = b + a,$$

в чём и состоит единственное её формальное отличие от системы **G**.

Можно, следовательно, утверждать, что на универсальном логическом основании строится достаточно универсальная логико-математическая система, аксиоматически определяющая математическое число вообще, континуум всех чисел без каких-либо упущений и лакун. Важно также, что наряду со множеством исходных объектов система **AG** задает полный набор первичных логических и математических операций, через которые по идее могут быть выражены все остальные. На этом пути нас ждут интересные результаты, в частности при попытке получения провалившихся только что в конкурсе на роль исходных элементов операций умножения, деления и единицы.

Таким образом, добавлением аксиомы $\mathbf{M}_7$ завершено построение логико-математического исчисления **AG** и теперь уже имеются в наличии все первичные понятия, правила, операции, постулаты и аксиомы формальной математики. Ещё раз отметим, что система **AG**, имеющая интерпретации как нечисловой, в частности теоретико-групповой природы, так и на множестве всех комплексных, а следовательно и действительных чисел, охватывает всю числовую математику, множество всех чисел без каких либо ограничений и изъятий. Намечено, если внимательно присмотреться, и общее направление последующего построения.

Нетрудно заметить, что в списке базисных компонентов нет ни одного математического объекта (числа) за исключением нуля; посредством семи аксиом под общим обозначением **M** полностью, хотя и неявно, определено понятие математического числа, но конкретные числа как таковые пока отсутствуют. Не определены ещё единица и вторичные операции умножения и деления. Это важнейшая задача, которая в рамках системы **AG** должна быть решена уже на третьем этапе построения формализма теории как прямое, логически и онтологически необходимое продолжение первых двух этапов.

Функциональные уравнения

До сих пор рассмотрение шло в основном по проторенным дорогам, теперь же придётся сворачивать на нехоженые тропы, следуя внутренней логике и динамике развития системы **AG**. Для раскрытия внутренних потенций формализма системы **AG**, её скрытых возможностей необходимо решить ряд кардинальных и достаточно тонких вопросов, касающихся перехода от аксиоматически задаваемых основных свойств числа к конкретным числам с одновременным выявлением исходных, материнских функций, посредством которых строятся остальные функции. Это, собственно говоря, и есть продолжение начатого с системы **AG** пути к решению проблемы ФМК и первичных функций.

В формальной системе **AG** на нынешнем этапе её развертывания постулировано потенциально бесконечное множество объектов

$$a_{|}\ a_{||}\ \ldots\ b_{|}\ b_{||}\ \ldots\ z_{|}\ z_{||}\ z_{|||}\ \ldots$$

с определёнными свойствами, истолковываемых как числа, но нет ещё, как отмечалось ранее, ни одного конкретного числа как такового, за исключением аксиоматически заданного терма 0. Добавим, что нет пока и ни одной конкретной функции, хотя понятие математической (числовой) функции ранее определено. Можно, сказать, что имеется в наличии математическая субстанция, но нет ещё её субстрата, дана идея относящихся к субстанции законов, но ни один из них ещё не оглашён и не представлен. Необходимо, следовательно, от понятия числа, числового множества, задаваемого совокупностью свойств, и от понятия числовой функции перейти к конкретным, реальным числам и функциям, оставаясь в рамках исходного формального базиса системы **AG**,

Для решения проблемы зададимся вопросом: каково магистральное направление развертывания системы **AG** как формальной теории чисел, какие глубинные внутренние потенции системы ещё не востребованы и не раскрыты? В неявной форме ответ частично содержится в предыдущем изложении, когда обсуждались различные интерпретации системы **AG**. Там, наряду с интерпретацией на множестве всех чисел, с пониманием трёх символов формального языка как сложения, вычитания и нуля была и интерпретация системы **AG** также на множестве всех чисел (только без нуля) и при толковании тех же символов как умножения, обратного элемента (деления единицы на a) и единицы. Приняв тогда единственно возможное решение, мы вместе с тем как бы приняли на себя обязательство непременно выразить отодвинутые «по конкурсу» на второй план операции $\cdot$, $^{-1}$ и число 1 через исходные операции +, – и число 0. Впрочем, и так ясно, что без умножения, деления и свойств единицы говорить о теории чисел и вообще о математике не приходится и так или иначе они должны быть как-то определены. Отметим, что задача корректного введения арифметических действий стоит и перед любой достаточно богатой системой формальной арифметики.

В случае формальной системы универсальной числовой математики задача введения недостающих пока арифметических действий, а также ничуть не менее важная задача получения первичных чисел и исходных функций фактически сводятся, как сейчас увидим, к решению соответствующим образом составленной системы функциональных уравнений.

Но предварительно условимся о терминологии. Любое математическое равенство назовем, как иногда делается, *законом сохранения*, желая тем самым подчеркнуть, что в равенстве двух частей математической формулы содержится глубокая идея постоянства математического закона, неизменяемости аналитических связей и в некоторых случаях идея сохранения каких-то величин. Равенство, содержащее только постоянные величины, назовем *соотношением*, равенство с переменными – *уравнением*, а равенство, где в качестве искомой величины выступает функция, – *функциональным уравнением*.

Введение новых математических реалий редукцией их посредством функциональных уравнений к исходным элементам это могучее средство, общий метод развертывания формальной системы, дополняющий функциональными свойствами задаваемые аксиомами свойства числа. В сущности, это неявное определение новых элементов, раскрывающее изначально заложенный в системе потенциал. Функциональные уравнения, как скоро выяснится, это простейший и самый верный путь к редукции операций умножения и деления к сложению и вычитанию; здесь достаточно ограничиться умножением и сложением, поскольку остальное уже тривиально.

Итак, обозначив новую операцию умножения точкой $\cdot$, которую во многих случаях можно опустить, мы хотим с помощью *простейших функциональных уравнений* определить, или в некотором смысле свести, умножение к сложению, и сейчас требуется составить соответствующие уравнения. Для двух числовых выражений $x+y$ и $x\cdot y$, а следовательно четырёх функциональных выражений

$$f(x+y),\quad f(x\cdot y),\quad f(x)+f(y),\quad f(x)\cdot f(y)$$

возможны в общей сложности шесть уравнений. Поскольку уравнения

$$f(x+y)=f(x\cdot y),\quad f(x)+f(y)=f(x)\cdot f(y)$$

просто означают отождествление умножения со сложением, а в уравнениях

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

нет сведения одной операции к другой, остаётся всего два функциональных уравнения – так называемые *уравнения Коши*. Обозначив искомые функции через $\psi(x)$ и $\alpha(x)$, имеем:

$$\mathbf{E}_1\quad \psi(x+y)=\psi(x)\cdot\psi(y)$$

$$\mathbf{E}_2\quad \alpha(x)+\alpha(y)=\alpha(x\cdot y),\quad (x\neq 0, y\neq 0)$$

Функциональные уравнения $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ нетрудно обобщить на случай многих переменных:

$$\mathbf{E}_{10}\quad \psi(x_1+x_2+\ldots+x_k)=\psi(x_1)\cdot\psi(x_2)\,\ldots\,\psi(x_k)$$

$$\mathbf{E}_{20}\quad \alpha(x_1)+\alpha(x_2)+\ldots+\alpha(x_k)=\alpha(x_1\cdot x_2\ldots x_k)$$

Введём теперь функциональный аналог изначальной математической константы нуль – константу λ, то есть основным свойствам нуля $a \pm 0 = a$ (как обычно, символом $\pm$ два отдельных выражения объединяются в одно; в выражениях общего типа $x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_k$ один раз берутся верхние знаки, другой раз нижние), зафиксированным в аксиомах $\mathbf{M}_5$−$\mathbf{M}_6$, придадим функциональный характер. Для этого есть только один путь. В единственной под знаком функции сумме одну из переменных заменим, по аналогии с ± 0, выражениями $\pm\lambda$ для некоей константы λ, так что

$$\mathbf{E}_{3-4}\ \psi(x \pm \lambda) = \psi(x),$$

что равносильно двум уравнениям:

$$\mathbf{E}_3 \quad \psi(x + \lambda) = \psi(x)$$

$$\mathbf{E}_4 \quad \psi(x - \lambda) = \psi(x)$$

В более общем случае, учитывающем возможность многократного применения *функционального правила нуля* (периодичности), эти уравнения выглядят так:

$$\mathbf{E}_{30}\ \ \psi(x + \lambda + \ldots + \lambda) = \psi(x)$$

$$\mathbf{E}_{40}\ \ \psi(x - \lambda - \ldots - \lambda) = \psi(x)$$

Система функциональных уравнений $\mathbf{E}_1$−$\mathbf{E}_4$ или её обобщённый вариант $\mathbf{E}_{10}$−$\mathbf{E}_{40}$, призванные свести умножение к сложению и заодно распространить фундаментальный для математики закон сохранения любого числа относительно сложения и вычитания нуля на функциональный случай, даёт в действительности нечто гораздо большее.

Решение уравнений $\mathbf{E}_1$−$\mathbf{E}_4$. Построение континуума

Развертывание формальной системы в нужном направлении – достаточно кропотливая работа, причём без права использовать какие-либо принципы и конструкты кроме постулированных и полученных к данному моменту. Подробный и всесторонний анализ уравнений $\mathbf{E}_{10}$−$\mathbf{E}_{40}$ в работах [8; 9] в рамках системы **AG** однозначно приводит к материнским (комплексным) функциям экспоненты $\psi(z) \equiv e^z$, обратного ей логарифма $\alpha(z) \equiv \mathrm{Ln}\, z$ и к системе ФМК e, π, i, 2, связанных известными формулами Эйлера

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = i^2 \equiv -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i, \quad e^{\pm 2\pi i} = i^2 \cdot i^2 \equiv 1$$

с периодом $\lambda = 2\pi i$.

Посредством ФМК e, π, i, 2 нетрудно построить континуум, как бесконечный упорядоченный универсум, как множество конкретных чисел, то есть придать аморфной математической субстанции, объединяемой совокупностью общих свойств, статус составленного из индивидуально конструируемых элементов математического субстрата. Построить число – значит выразить его через известные величины или по крайней мере указать способ, алгоритм сведения к ним. А таковых у нас уже достаточно, и по формулам

$$e^0 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = i^2 = -1, \ \ldots$$

они образуют единую, самосогласованную и самодостаточную систему *проточисел* – исходных математических атомов для построения остальных чисел. Следует особо подчеркнуть, что мы имеем не одну, как, например, в концепции первичности натурального ряда, а сразу все четыре математические «единицы». В геометрической интерпретации они представляются в виде показанных на рисунке точек на осях прямоугольной системы координат, в которой любое число толкуется как точка на плоскости (комплексной). Используя геометрические образы, можно сказать, что при наличии четырёх единиц построение множества всех чисел реализуется одновременно (не в физическом, разумеется, смысле, а в смысле равноправия, отсутствия логической очередности) и единообразно во всех четырёх возможных направлениях; при этом не возникает проблем с введением, например, отрицательных чисел. Само построение множества всех чисел, осуществленное в [19, 123–129], покажем схематично, не вникая в детали.

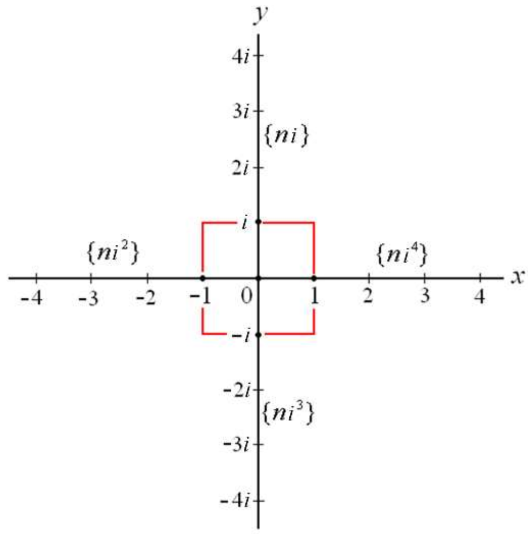

Рис. 1
Геометрическая интерпретация математических
единиц и образованных их них множеств типа $\{ni^k\}$

Вначале из исходных элементов 0, i, –1, –i, 1, последовательно применяя схему сложения

$$0,\quad 0 + a \equiv a,\quad a + a \equiv 2a,\quad 2a + a \equiv 3a,\quad 3a + a \equiv 4a,\ \ldots$$

с очевидными сокращёнными обозначениями, получим для значений k = 1, 2, 3, 4 четыре потенциально бесконечных множества типа $\{ni^k\}$, (n = 1, 2, 3, …). При k = 1 имеем множество мнимо-положительных целых числа типа $\{ni\}$, при k = 2 это целые отрицательные числа $\{ni^2\}$, если k = 3, получим множество мнимо-отрицательных целых чисел $\{ni^3\}$, наконец, k = 4 приводит к множеству целых положительных чисел типа $\{ni^4\}$.

Два последующих построения для каждого из множеств в принципе ничем не отличаются от обычного построения множества положительных действительных чисел, являющегося разновидностью одного из четырёх конструируемых здесь множеств. Построения эти сводятся к получению положительных рациональных чисел как отношений между целыми положительными и трёх их аналогов – отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных; затем к получению четырёх множеств положительных, отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных иррациональных чисел, образуемых, например, путём составления бесконечных непериодических, в частности двоичных, дробей. В геометрической интерпретации им ставится в соответствие бесконечное множество точек на осях абсцисс и ординат указанной прямоугольной системы координат и остаётся лишь построить точки комплексной плоскости, проекциями которых считаются точки на осях. Это осуществляется двучленным выражением типа $\pm x \pm iy$, где x и iy в геометрической интерпретации – точки правого верхнего квадранта декартовой системы координат комплексной плоскости. Если устранить это весьма искусственное ограничение и, не умаляя общности, считать x и y отличными от $\pm i$, все двучлены можно привести к единой знакомой всем форме $z = x + iy$.

Разумеется, к геометрическим образам мы прибегли лишь для наглядности, по идее вполне можно обойтись без понятий точки, плоскости, системы координат и т. п. Кроме того, количество шагов, приводящих к комплексным числам, можно сократить, минуя, например, построение «рациональных» чисел или, допустим, генерирование чисел из объектов 0, i, –1, –i, 1 рассматривать как единое, не расчленяемое, не распадающееся на отдельные процедуры действие. Можно даже при желании построить множество всех чисел из исходных *единиц* «одним махом», унифицировано и минуя все промежуточные звенья. Всё это в конце концов вопросы технического свойства, которые в данной ситуации не столь существенны. Цель обсуждения схемы построения в другом: показать, что данная система действительно обладает потенциалом, воплощаемым в инструментарий, необходимый и достаточный для получения континуума, как множества математических конструктов, строящихся по определённым правилам из исходных.

Добавим, что ФМК e, π, i, 2, как проточисла, как генератор четырёх единиц и множества конструируемых из них чисел, обладают исключительно важным свойством единственности. Не углубляясь в детали, скажем только, что применительно к данной системе единственность следует понимать, во-первых, как отсутствие каких-либо других помимо системы ФМК e, π, i, 2 числовых решений исходных функциональных уравнений и отсутствие каких-либо других помимо множества элементов типа $x+iy$ завершённых числовых множеств, соответствующих постулатам системы и конструируемых из атомов 0, $\pm i$, ± 1. Во-вторых, любая попытка обобщения, расширения, дополнения и т. п. множества комплексных чисел (гиперкомплексные числа, в частности кватернионы, числа Кэли, Клиффорда – Липшица, p-адические числа, ...) возможна лишь ценой отказа от тех или иных исходных положений обсуждаемой системы. Например, частный случай гиперкомплексных чисел – кватернионы, или числа типа

$$x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3,$$

отличаются формально от комплексных чисел тем, что у них три, вместо одной, комплексные единицы, связанные между собой формулами, тиражирующими

$$\psi(\pi i) = i^2 = -1$$

и соотношениями для их циклической перестановки:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k,\quad ji = -k,\quad jk = i,\quad kj = -i,\quad ki = j,\quad ik = -j$$

Легко видеть, что закон коммутативности умножения для кватернионов не выполняется. Следовательно, переход от размерности 2 к размерности 4, которому геометрически соответствует переход от двумерной плоскости к четырёхмерному пространству, не означает (в отличие, допустим, от заполнения множества всех рациональных чисел числами иррациональными) заполнения, расширения и т. п. множества комплексных чисел родственными им по общим признакам объектами нового рода, поскольку это сопровождается разрушением основ самой системы постулатов. Для других размерностей, число которых, конечно, не ограничено, отличия оказываются ещё более глубокими. Так, для размерностей 3, 5 и выше нельзя построить даже систему, аналогичную кватернионам, а гиперкомплексные системы с делением (каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$, где $a \neq 0$ имеет единственное решение) могут иметь только размерности 4 и 8 [24, 36].

Словом, если под числами понимать объекты, обладающие вполне определённой совокупностью обычных свойств, включая коммутативность умножения и операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами $x + iy$. В этом смысле можно утверждать, что других чисел нет, а все остальные «числа» – объекты другого рода, то есть с существенно *другим набором основных свойств*. Иногда это положение, известное благодаря исследованиям Вейерштрасса, Фробениуса, Пирса и других, облекается в сходную форму: невозможно какое-либо расширение понятия комплексного числа за пределами системы комплексных чисел без отказа -от каких-то фундаментальных свойств числа.

К тому же теория гиперкомплексных чисел не порождает новых математических констант, поскольку соотношения

$$i^2 = j^2 = k^2 = \ldots = -1$$

лишь мультиплицируют, тиражируют мнимую единицу, а не вводят какие-то новые математические величины.

Проточисла и материнские функции

Тот факт, что посредством функций ψ и α оказывается возможным не только сведение операций умножения и деления к аксиоматически заданным операциям сложения и вычитания, но и однозначное получение четырёх ФМК, имплицитно определяемых системой уравнений $\mathbf{E}_{10}$–$\mathbf{E}_{40}$, говорит о совершенно исключительной роли этих функций в математике. Другого унифицированного способа введения в математическую теорию констант e, π, i, 2, как замкнутой, самосогласованной системы фундаментальных величин, не существует [8].

Любая попытка сведения всех математических функций к какому-либо списку исходных функций неизбежно столкнётся с проблемой фундаментальных констант, необходимость решения которой столь же неизбежно приведёт ко всё тем же экспоненте и обратному ей логарифму. Поэтому можно смело утверждать, что никаких других функций, способных реально претендовать на базисную роль в математике нет. Любая аналитическая функция, какой бы сложной, неординарной она ни была, посредством математических констант и их комбинаций, операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\lim$, суммы слагаемых $\sum$, произведения сомножителей $\prod$, дифференцирования df/dz, интегрирования, суперпозиции и других операций может быть выражена, по крайней мере в области комплексных чисел, через e^z и $\mathrm{Ln}\ z$. Количество интересующих нас функций практически необозримо, и не только рассмотрение, но даже простое перечисление всех случаев едва ли вообще реально. Этого, впрочем, и не требуется – достаточно ограничиться основными элементарными функциями, простые комбинации которых с помощью бесконечных сумм, произведений, суперпозиций и т. д. образуют обширный класс неэлементарных функций.

Простейшими и наиболее полезными в различных случаях, не исключая самые сложные, комбинациями экспоненты и проточисел (e-i-2-преобразования) являются шесть хорошо известных тригонометрических функций, сокращённо обозначаемых как $\cos z$, $\sin z$, $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{ctg}\, z$, $\sec z$, $\csc z$ (для тангенса, котангенса и косеканса нередко используются и другие обозначения), и столько же аналогичных им и не содержащих мнимой единицы (e-2-преобразования) гиперболических функций. Шесть обратных тригонометрических и шесть обратных гиперболических функций попарно связаны между собой посредством константы i, и все без исключения двенадцать обратных функций выражаются через i и логарифм.

В общем случае выражение z^u, возводящее комплексное число z в комплексную степень u, распадается на два частных случая, когда либо основание степени z, либо показатель степени u – постоянное комплексное число. Следовательно, *степенная функция* z^a ($z \neq 0$) представляется в виде

$$e^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{a(\ln z + k2\pi i)},\ (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Вследствие свойств логарифма она однозначна, если $a = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, и многозначна в остальных точках. Для *показательной* функции a^z ($a \neq 0$) также всё ясно: $a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$ есть многозначная (из-за $\mathrm{Ln}\,a$) функция в отличие от экспоненты e^z, областью однозначности которой является вся комплексная плоскость, «разрезанная» вдоль отрицательной части действительной оси. В теории специальных функций, например Г-функции, нередко встречается произведение показательной функции a^z на степенную z^b, где a и b могут быть различными постоянными величинами. В общем случае

$$a^z z^b = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a + b\,\mathrm{Ln}\,z}$$

для главного же значения логарифма

$$a^z z^b = e^{x \ln a + b \ln z}$$

К этому виду можно привести также любое число за исключением 0, и в определённых случаях именно такая форма представления числа является наиболее удобной и отвечающей существу дела.

Неограниченное количество элементарных функций получается из основных конечным применением операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и суперпозиции. Снимая ограничения на конечность и допуская тем самым бесконечные ряды и произведения, дифференцирование и интегрирование во всех их разновидностях, бесконечную суперпозицию, то есть допуская операции, связанные с предельным переходом lim, получим почти необозримый класс неэлементарных функций, по-прежнему выражаемых через e^z, $\mathrm{Ln}\ z$, но уже посредством и предельных операций. Желающие могут заглянуть в энциклопедии и специальные справочники или в справочную часть известной программы «Mathematica» компании Wolfram Research и убедиться как в существовании множества различных связей между отдельными функциями, так и в их сводимости к исходным ψ и α. Завершая обсуждение функций, следует непременно добавить, что, как принято считать, произвольная математическая функция может быть представлена, притом единственным образом, в виде конечного, а чаще бесконечного e-i-2-преобразования, то есть тригонометрического ряда, частный случай которого – ряды Фурье. Окончательного доказательства нет, но для очень широкого класса функций это доказано, см. [25].

Уравнение суперпозиции

Считая аксиоматически заданный 0 константой наивысшего, условно *нулевого*, *ранга*, мы должны считать константами *первого ранга* связанные с нулем, функциями ψ, α и составляющие замкнутую числовую систему *проточисла*. Сюда можно добавить постоянную Эйлера, которая в противоположность числу золотого сечения ϕ элементарной комбинацией проточисел не является и в получении которой используется по сути логико-математический, выражаемый в аксиоматике через не только математические операции, но и логические кванторы, принцип бесконечного предельного перехода. Вместе с тем, постоянная Эйлера посредством операции предельного перехода (конкретнее бесконечной суммы) непосредственно выражается через материнские функции:

$$-\gamma = \int_0^\infty e^{-u} \ln u \, du \equiv \int_0^\infty \frac{\alpha(u)}{\psi(u)} du$$

Взятая с обратным знаком константа Эйлера, равная отношению α/ψ под знаком несобственного интеграла, целиком составлена из компонентов системы **AG**. Не было поэтому необходимости вводить её посредством ещё одного функционального уравнения. А поскольку число γ, насколько известно, даже очень сложной комбинацией других констант не является, её следует считать одной из ФМК. А комбинациям вроде e^π, e^γ, 2π, π/2, $\pi^2/4$, ln 2, $\sqrt{2}$ и даже более сложным комбинациям отводится в этой иерархии место констант *второго ранга*.

В свете сказанного неизбежно встаёт вопрос об общем количестве констант первого ранга, который мы поставим в следующей форме: все ли начальные потенции системы **AG** задействованы для получения ФМК и нет ли каких-то других, неиспользованных ещё возможностей? Нетрудно догадаться, что неиспользованным пока ресурсом системы **AG** остаётся конструктивный принцип суперпозиции функций, и можно допустить, что неэлементарное, выражающееся через операцию lim, а в конечном счёте через логические кванторы действие этого принципа может привести к чему-то принципиально новому, необычному.

Далее отметим, что система функциональных уравнений $\mathbf{E}_{10}$–$\mathbf{E}_{40}$ содержит все основные виды сохранения (инвариантность аналитической формы связи, инвариантность величины по отношению к преобразованию, наличие в преобразовании числовых констант) за исключением лишь одного – независимости числового решения от выбора переменных преобразования. Сводя воедино оба начала – бесконечную суперпозицию и не зависящую от переменных преобразования константу, придём к следующему функциональному уравнению:

$$\mathbf{E}_5 \quad \lim_{n\to\infty} S(S(\ldots S(x)\ldots) = \text{const}$$

Символом S здесь обозначены неизвестные ещё функции, x означает произвольно взятое число.

Предполагая существование обратной S функции arc S, рассматривая выражение во внешних скобках как функцию-переменную и опираясь на очевидное свойство операции предельного перехода

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n-1\to\infty}$$

можно свести всё к системе двух уравнений для прямой и обратной функций, которую представим в виде двойного равенства

$$\mathbf{E}_{51} \qquad S(x) = \operatorname{arc} S(x) = x,$$

содержащего константу(ы) суперпозиции уже неявно, в качестве числового решения системы уравнений.

Решение ищем в *простейших элементарных функциях*, понимая под этим все известные элементарные функции математики, исключая однако их комбинации, получаемые применением арифметических действий и суперпозиции. Существует три десятка таких функций, необходимые сведения о которых содержатся в учебниках по математике и справочниках по элементарным функциям. С целью их тестирования на предмет соответствия фундаментальному уравнению $\mathbf{E}_5$ сформулируем по убывающей степени общности естественные требования, предъявляемые к искомой функции (или функциям).

а) Уравнение $\mathbf{E}_5$ имеет место для всех действительных и мнимых чисел.

б) Графики функций $S(x)$, $S^{-1}(x)$ и $y = x$ имеют общую точку пересечения, в которой выполняется соотношение $\mathbf{E}_{51}$, то есть равенство значений функции, обратной функции и аргумента.

в) Функции $S(x)$, $S^{-1}(x)$ и $y = x$ пересекаются лишь в одной точке, отличной от 0 и 1.

Всем этим требованиям удовлетворяют лишь две элементарные функции: a^x и $\cos x$. Учтём теперь, что уравнение суперпозиции $\mathbf{E}_5$, рассматриваемое отдельно от остальных лишь по практическим соображениям, является неотъемлемой частью системы уравнений $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_5$. А последняя представляет собой единую систему функциональных уравнений с единым решением в найденных уже функциях $\psi(x)$, $\alpha(x)$ и в константах, из которых неизвестны пока лишь константы суперпозиции. Отсюда следует, что показательная функция может быть только экспонентой: $a^x = e^{-x}$.

Таким образом, решение уравнения $\mathbf{E}_5$ в элементарных функциях по условиям а) – в) приводит к следующим функциям и константам: $\cos x \equiv (e^x + e^{-x})/2$ и e^{-x} со своими константами суперпозиции ա (первая буква армянского алфавита, читается «а») и W(1):

$$\cos x \equiv \frac{\psi(ix) + \psi(-ix)}{2} \equiv \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad ա = 0{,}73908\ 51332\ldots$$

$$\psi(-x) \equiv e^{-x} \qquad W(1) = 0{,}56714\ 32904\ldots$$

По поводу обозначения W(1) скоро будут даны необходимые разъяснения а тройные точки пересечения для ա и W(1) показаны на рисунках; для большей наглядности отдельно приводятся также взятые в более широком интервале графики функций $\cos x = x$ и $y = x$, пересекающиеся в точке ա.

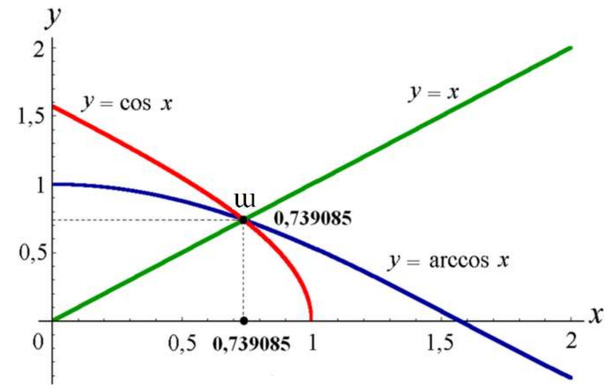

Рис. 2
Константа ա как тройная точка
пересечения кривых $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и $y = x$

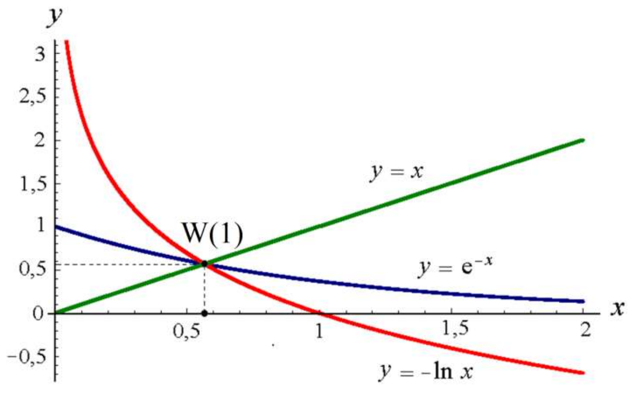

Рис. 3
Константа W(1) как тройная точка
пересечения кривых $y = e^{-x}$, $y = -\ln x$ и $y = x$

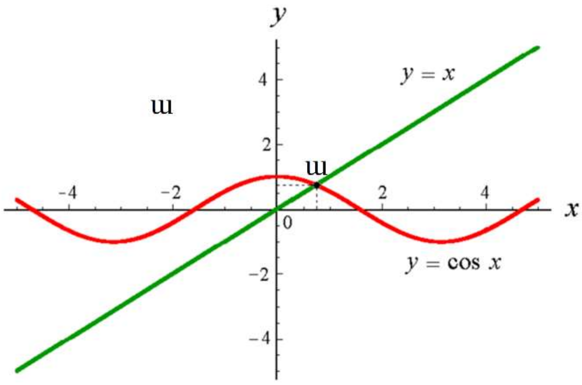

Рис. 4
Пересечения кривых $y = \cos x$ и $y = x$ в точке ш

Обе прошедшие отбор функции непосредственно связаны с экспонентой и потому дальнейшее исследование фактически касается свойств материнской функции ψ.

Для данной пары функций и констант справедливость предельного отношения $\mathbf{E}_5$ не зависит от выбора начальной, действительной или мнимой, переменной x. А выражаясь языком геометрии, можно сказать, что применением принципа бесконечной суперпозиции ко всем точкам, лежащим на действительной и мнимой осях, обе оси отображаются в точки ш или W(1).

Для функции косинуса из уравнения

$$\mathbf{E}_{52} \quad \lim_{n\to\infty} \cos(\cos \dots \cos(z) \dots) = ш$$

имеем

$$\mathbf{E}_{53} \quad \cos z = \arccos z = z$$

или в явном виде

$$\mathbf{E}'_{53} \quad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}\,) = z$$

Аналогично для экспоненты e^{-x} из исходного уравнения получаем

$$\mathbf{E}_{54} \quad e^{-z} = -\ln(z) = z$$

Трансцендентные уравнения $\mathbf{E}_{53}$ и $\mathbf{E}_{54}$, удобные для вычисления констант ш и W(1), неразрешимы в конечном виде относительно неизвестной z. Стало быть, эти константы, связанные, как и до́лжно, с функциями ψ, α и проточислами, не являются однако комбинациями последних наподобие e^{π} или, допустим, $\pi^2/4$. Следовательно, ш и W(1) имеют равный с π, e, i, 2, γ статус констант первого ранга.

Договоримся теперь при понимании $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_5$, как единой, целостной системы уравнений, применять обобщённый символ **E**, а полученную к настоящему моменту логико-математическую систему обозначать далее символом **AGE**.

Займёмся вначале константой ш, см. также [8; 9; 10; 20; 21; 22; 23]. Предшествующее изложение подводит к мысли, что в области действительных и мнимых чисел любая математическая константа так или иначе, через те или иные операции обусловлена материнскими операциями ψ и α, а все константы глубоко связаны друг с другом, составляя единую взаимодополняющую систему выделенных математических величин. Вполне поэтому закономерно, что константа ш, определяемая уравнением $\mathbf{E}_5$ через исходную в системе **AGE** операцию суперпозиции, то есть будто совершенно независимо от принципов, которые положены в основу определения функций ψ, α и проточисел, тем не менее имеет решение непосредственно соотносящееся с теми и другими. Более того, близость по природе, удивительное сходство вторичных аналитических форм, включённость константы ш в систему фундаментальных констант бросается в глаза, если простейшую комбинацию соотношений для проточисел сравнить с соотношением $\mathbf{E}_{53}$, получаемым из исходного $\mathbf{E}_5$:

$[\psi(i\pi) + \psi(-i\pi)]/2 = i^2$

$[\psi(i\text{ш}) + \psi(-i\text{ш})]/2 = \text{ш}$

В обоих соотношениях полусумма функциональных слагаемых типа $\psi(x)$, $\psi(-x)$ даёт константы, другими словами e-2-i-π-преобразование приводит к i^2, а e-2-i-ш-преобразование, с заменой π на ш, приводит к ш. В обоих соотношениях содержатся только константы, составляющие таким образом семейство взаимосогласованных фундаментальных математических величин. Уравнение $\mathbf{E}_5$, определяющее фактически константы ш и W(1), наряду с функцией косинуса

$$S(x) = \frac{\psi(ix) + \psi(-ix)}{2} \quad (x \text{ действительно или мнимо})$$

и материнской функцией $\psi^{-1}(x)$ с самого начала могло быть включено в систему функциональных уравнений **E** в качестве одного из её уравнений. Но стоявшие тогда задачи, в частности введение новых операций и построение континуума, не требовали констант γ, ш и W(1) и мы предпочли заняться суперпозицией позже.

Решая любое из трёх уравнений $\mathbf{E}_{53}$ (удобнее, конечно, иметь дело с уравнением $\cos x = x$ для действительной переменной x) одним из существующих методов приближённого решения трансцендентных уравнений, например стандартным методом касательных Ньютона, получим число [19, 135, 136]

$$\text{ш} = 0{,}73908\ 51332\ 15160\ 64165\ 53120\ 87673\ \ldots,$$

которое по всей видимости трансцендентно, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной (или любой другой n-ичной) дробью. Здесь приведены полученные методом касательных Ньютона лишь тридцать знаков после запятой десятичного представления константы ш, с точностью в 6 400 000 десятичных знаков, наряду со статистическим анализом частоты их распределения, она дана в [26], а с точностью уже в 12,8 млн знаков в работе [27].

Заметим также, что есть и другой – общедоступный, «эмпирический» способ получения десятичного приближения числа ш. Дело в том, что с определённой точностью оно как бы содержится в любом калькуляторе, способном производить операцию cos. Надо лишь наугад набрать число (выражаемое, понятно, в радианах) или, ничего даже не набирая, нажимать раз за разом или держать нажатой кнопку «cos». Получаемый с доступной для данного калькулятора точностью результат скоро замелькает на экране.

О характере приближения к пределу получаемой из $\mathbf{E}_{52}$ последовательности чисел можно судить по рисунку.

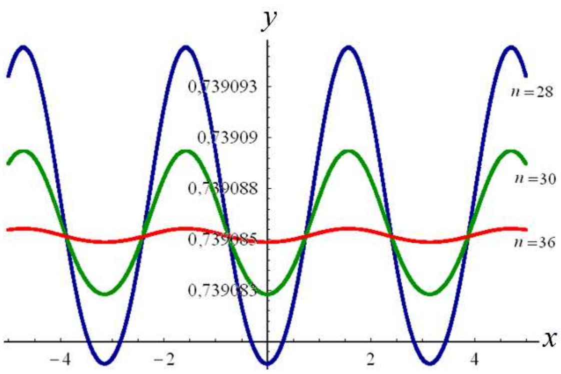

Рис. 5
Графики функции $\cos(\cos(\ldots\cos(x)\ldots)$ для $n = 28, 30, 36$

Для мнимой переменной ix – это последовательность действительных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$, которая с каждым шагом приближается к своему пределу, попеременно принимая бóльшие и меньшие чем ш значения. Кстати, в теории ЛМФ константа ш – это тот самый «скрытый параметр», недостающее звено в семействе математических величин, которое позволяет решить, считающуюся ранее «непробиваемой» проблему теоретического определения численных значений некоторых ФФП путём их сведения к ФМК, см., например, [10].

Характерной особенностью ФМК является неожиданное появление в самых разных разделах чистой и прикладной математики, в самых разных ролях и непредвиденных обстоятельствах. История математики полна таких неожиданностей, притом в отношении всех фундаментальных констант, не исключая и константу суперпозиции ɯ. В этом можно убедиться с помощью Интернета, последовательно задавая например поиск десятичных приближений числа ɯ в различных поисковых системах. После того как всё случайное будет отброшено, останутся сотни страниц, где речь уже идёт о математическом числе, являющемся решением уравнения $\cos x = x$. Правда, и здесь рассмотрение часто носит формальный характер и преследует весьма ограниченные, преимущественно иллюстративные цели – при изложении приемов математического исследования, таких как анализ итерационных процессов и методы численного решения трансцендентных уравнений, простейшим и характерным примером которых является данное уравнение. Уравнение $\cos x = x$ относится к числу простейших трансцендентных уравнений, к тому же с единственным, графически легко представимым и не равным 0 или 1 решением. Исследование формальных свойств косинуса, в частности его особых точек, также приводит к «магической» точке ɯ.

Всё вроде очень просто, но лишь глубокий анализ позволяет постичь истинную природу указанного числа, как ФМК одного ранга со знаменитыми π и e. Широкий выход новой константы за рамки чистой математики практически неотвратим, и вот уже число 0,739085… вместе с уравнением для косинуса появляется наряду с числами Фейгенбаума при анализе процессов перехода от хаоса к упорядоченности, при рассмотрении фракталов – см., например, [28], а также [29] – при решении уравнения Кеплера для предельного случая, когда эксцентриситет эллиптической орбиты равен 1 [30]. В этом нет ничего удивительного или неожиданного, если принять во внимание исходное уравнение $\mathbf{E}_5$. Геометрически оно может интерпретироваться как отображение мнимой и действительной осей координат в одну точку, а содержательно истолковано как переход от произвольной множественности к вполне определённой количественно иной особенности. С позиций синергетики, принципа самоорганизации систем это можно понимать как стремление системы к фиксированному конечному состоянию, совершенно независящему от её начального состояния. Можно предположить, что новые появления константы ɯ в различных научных дисциплинах, в особенности в области физических явлений, мыслимы при исследовании колебательных процессов, динамических систем, энтропийных процессов, теории хаоса, процессов упорядочивания и самоорганизации физических систем, фазовых переходов, фракталов, турбулентности …

Как уже отмечалось, *константа суперпозиции косинуса* ɯ, впервые подробно рассмотрена как константа и универсальный аттрактор в работе [19, 135, 136], а позже и во многих наших указанных выше работах. И вот, спустя четверть века под другим именем она появилась как аттрактор в небольшой статье в американском математическом журнале [34]. Невзирая на протесты автора и Академии наук Армении, подробнее см. [31, 20], а также [32; 33], константа суперпозиции косинуса ɯ, грубо нарушая авторское права и элементарные нормы научной этики, уже под новым названием, стала предметом повышенного внимания и широкого, порой восторженного, обсуждения в западной научной и околонаучной печати.

Что касается другой константы суперпозиции, известно, что экспонента e^{-ix} переводит всякое мнимое число в комплексное, поэтому для любого ix уранение $\mathbf{E}_{54}$ приводит к бесконечному упорядоченному множеству типа

$$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3,\ \dots,\ x_n + iy_n,\ \dots$$

Особенность этой последовательности комплексных чисел в том, что с увеличением n варианта y_n стремится к нулю, переменная же x_n, а вместе с ней и вся последовательность $x_n + iy_n$, сходится к пределу W(1). При этом, как и в случае косинуса, переменная x_n приближается к своему пределу колеблясь возле точки сходимости W(1) с постоянно уменьшающейся амплитудой колебаний. Первые тридцать знаков десятичного представления второй константы суперпозиции таковы:

$$\mathrm{W}(1) = 0{,}56714\ 32904\ 09783\ 87299\ 99686\ 62210\ \dots$$

С точностью в n десятичных знаков константа W(1), называемая также *омега-константой* и обозначаемая символом Ω [35], может быть получена в «Mathematica» набором выражения N[ProductLog[1], n], где вместо n может стоять многозначное число.

Используемое здесь обозначение не случайно, поскольку речь фактически идёт об определённом значении функции Ламберта $\mathrm{W}(z)$, или омега-функции, см. [36], обычно задаваемой функциональным уравнением

$$z = \mathrm{W}(z)e^{\mathrm{W}(z)}, \text{ или } \mathrm{W} = ze^{-\mathrm{W}}$$

Функция $\mathrm{W}(z)$, определённая для множества всех чисел z включая 0 и используемая при решении различных трансцендентных уравнений, нашла достаточно широкое применение в чистой математике и за её пределами – в физике и биологии, в механике жидких сред, при анализе динамических систем, в теории алгоритмов и т.д., см. [36]. Кривая $\mathrm{W}(x)$, ($x \geq 0$, $\mathrm{W}(0) = 0$), напоминающая по виду график логарифма, показана на рисунке вместе с кривой $y = \ln x$:

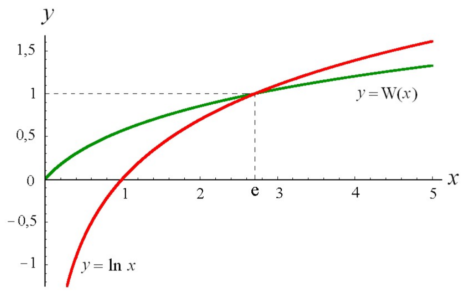

Рис. 6
Графики функций $\mathrm{W}(x)$ и $\ln x$

Если $z = 1$, получаем уравнение

$$\mathrm{W}(1) = e^{-\mathrm{W}(1)},$$

тождественное $\mathbf{E}_{54}$. Таким образом, одно из двух решений уравнения $\mathbf{E}_5$ для действительной и мнимой переменных совпадает с выделенным значением функции $\mathrm{W}(z)$, соответствующим простейшему случаю отсутствия множителя z в указанном уравнении. В этом смысле число $\mathrm{W}(1)$ может считаться первенцем бесконечного семейства чисел $\mathrm{W}(z)$. Следует также отметить, что пути, ведущие к омега-константе, весьма различны. В то время как в последнем уравнении экспонента задана с самого начала и задача сводится лишь к нахождению различных значений $\mathrm{W}(z)$ в зависимости от значений переменной z, в общем случае функционального уравнения $\mathbf{E}_5$ неизвестными «величинами» наряду с ɯ и $\mathrm{W}(1)$ являются функции $\cos z$ и e^{-z}, причём значения констант суперпозиции от конкретных значений z никак не зависят. Остаётся добавить, что получение приближённого десятичного значения константы $\mathrm{W}(1)$ на калькуляторе ненамного сложнее чем в случае константы ɯ. Взяв произвольное число, надо производить над ним одну за другой операции e^x и $1/x$ до тех пор, пока число 0,56714 32904… не появится на дисплее с максимальной для данного калькулятора точностью.

Заключение

Подводя окончательные итоги можно сказать, что из недр оснований математики, не выходя за рамки математической логики и формальной математики, извлечены взаимообратные и первичные по отношению к остальным функциям числовой математики функции e^z, $\mathrm{Ln}\, z$ и небольшая группа взаимосвязанных ФМК 0, e, π, i, 2, γ, ɯ, $\mathrm{W}(1)$. Таковы полученные в пределах строгой аксиоматики посредством функциональных уравнений «материнские» функции и набор истинных ФМК вместо интуитивно и по-разному понимаемых аморфных списков «избранных», «общеизвестные» «часто встречающиеся» и тому подобное констант. При этом, использованы все основные ресурсы логико-математического формализма, включая исходные для числовой математики понятия числа, функции и предела.

Пятёрка ФМК 0, e, π, i, 2 вправе считаться исходным началом, проточислами числового множества, из которых легко конструировать континуум всех чисел. Что же касается констант γ, ɯ, $\mathrm{W}(1)$ это как бы мостик между единичным (число) и актуальной математической бесконечностью (интеграл, бесконечная суперпозиция). В широком содержательном, онтологическом смысле константы ɯ и $\mathrm{W}(1)$ можно, прежде всего, понимать как независимость конечного состояния системы от её начального состояния.

Литература

[1] **Грант Аракелян.** *24 как число природы* levonabrahamian.com/engine/documents/document127.doc

[2] **Грант Аракелян.** *Математика и история золотого сечения.* – М.: Логос, 2014, ISBN 978-5-98704-663-0

[3] **Steven R. Finch,** *Mathematical Constants*. Cambridge, 2003 (ISBN 0-521-81805-2)

[4] Mathematical constant // Wikipediahttps://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_constant

[5] *Математическая константа* // Академик https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/3122

[6] **Weisstein, Eric W.** *Constant.* From *MathWorld* -- A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/Constant.htm

[7] **John H. Conway,** «*The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay*», *Eureka*, 1986, **46**, p. 5–16. ISSN 0071-2248

[8] **Грант Аракелян.** *Фундаментальная теория ЛМФ*. Ереван: Лусабац, 2007, 906 с. http://www.hrantara.com/Monograph.pdf

[9] **Грант Аракелян.** *От логических атомов к физическим законам*. Ереван: Лусабац, 2007, 300 с. ISBN 978-9939-824-03-1. http://www.hrantara.com/Book.pdf

[10] **Hrant Arakelian.** *LMP Fundamental Theory.* Yerevan, Sarvard Hrat. LTD, 2010, 98 p. ISBN 978-99941-31-67-1. *314159.ru/arakelian/arakelian1.pdf*

[11] **Гильберт Д., Бернайс П.** *Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики*. М.: Наука, 1982.

[12] **Клини С.** *Математическая логика*. М.: Мир, 1973.

[13] **Чёрч А.** *Введение в математическую логику, т. I.* М. 1960,

[14] **Мендельсон Э.** *Введение в математическую логику*. М., 1976,

[15] **Новиков П.С.** *Элементы математической логики*. М.: Наука, 1973.

[16] **Smullyan, R. M.,** *First-order Logic* (New York: Dover Publications, 1968),

[17] **Гильберт Д., Бернайс П.** *Основания математики*. *Теория доказательств*. М.: Наука, 1982.

[18] **Клини С.** *Введение в метаматематику*. М.: ИЛ, 1957.

[19] **Аракелян Г.Б.** *Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки).* Ереван: Изд. АН, 1981.

[20] **Hrant Arakelian.** *The New Fundamental Constant of Mathematics*. Pan-Armenian Scientific Rev., vol. 3, London 1995, p. 18–21.

[21] **Грант Аракелян.** *Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК.* «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 16330, 03.02.2011.

[22] **Hrant Arakelian.***New Fundamental Mathematical Constant: History, Present State and Prospects.* Nonlinear Sci. Lett. **B**,1(4) (2011), p.183–193. http://www.nonlinearscience.com/paper.php?pid=0000000113

[23] **Hrant Arakelian.** *How Many Fundamental Constants and Initial Functions are there in Mathematics?* Science and world. 2017. № 12 (52). Vol. I, p, 14–21, ISBN 2308-4804. http://scienceph.ru/d/413259/d/science_and_world_no_12_52_december_vol_i.pdf

[24] **Кантор И.Л., Солодовников А.С.** *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973.

[25] **Зигмунд А.** *Тригонометрические ряды*, т. 1–2. М.: Мир, 1965.

[26] **Грант Аракелян.** *Новая фундаментальная математическая константа (с точностью до 6 400 000 знаков после запятой).* http://www.hrantara.com/NewConstant2.pdf

[27] **Грант Аракелян.** *12,8 млн десятичных знаков константы суперпозиции косинуса.* http://314159.ru/arakelian/arakelian3.pdf

[28] **Bojar Ondřej.** *Chaos přehledně.* http://chaospace.hyperlinx.cz/index.php?pgid=230

[29] **Weisstein E. W.** *Fixed Point*. From MathWorld http://mathworld.wolfram.com/FixedPoint.html

[30] *AKiTi Kepler's Equation of Elliptical Motion*, 2004. http://www.akiti.ca/KeplerEquation.html

[31] **Грант Аракелян.** *Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК.* http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161779.htm

[32] **Salov V.**, *Inevitable Dottie Number. Iterals of cosine and sine*, arXiv preprint arXiv:1212.1027 [math.HO], 2012.

[33] *Soluzione di cos(x)=x?* Yahoo answers.
https://it.answers.yahoo.com/question/index?qid=20151223135449AA7Pj2B
[34] **Kaplan S.R.** *The Dottie Number*, Math. Mag. **80**, (2007), 73−74
[35] *Omega constant*. Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Omega_constant
[36] **Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J.,** and **Knuth D.E.** *On the Lambert W Function*. Advances in Computational Mathematics **5**, 329−359 (1996).