

УДК 621.822

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРАЦИЙ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

С.С. Андреев, Ю.В. Мягков, В.В. Курицин

Впервые построена универсальная математическая 3D- модель вибраций двигателя внутреннего сгорания, применимая как для рядных, так и для V-образных моделей двигателей.

Ключевые слова: двигатель внутреннего сгорания, колебания, математическая модель.

Расчёт колебаний двигателя автомобиля – достаточно непростая задача, связанная с громоздкими вычислениями. Поэтому во многих случаях, например для определения амплитуд вынужденных и резонансных колебаний, ориентировочной оценки спектра частот собственных колебаний, а также для предварительного выбора параметров подвески, целесообразно воспользоваться имеющимися ресурсами персональных компьютеров с их вычислительными комплексами. Несмотря на доступные исследовательские и вычислительные мощности, в этой работе будет вводиться ряд допущений, позволяющих в значительной мере упростить расчёты и получить первое представление об особенностях колебаний исследуемого двигателя.

Примем, что двигатель состоит из следующих основных блоков: блоков цилиндров, картера, головок блоков цилиндров с крышками, коленчатого вала с шатунно-поршневыми группами, механизма газораспределения, навесного оборудования (сцепление с его картером, стартера и генератора и т.д.). Все блоки будем считать абсолютно твердыми телами (АТТ). Принятие двух блоков цилиндров позволит учесть основные конструктивные особенности двигателя: рядного, когда два блока совмещаются боковыми плоскостями, V-образного, когда между ними имеется определенный угол φ_V , и горизонтально-оппозитного, когда этот угол равен 180° (π радиан). Таким образом, построенная физическая модель позволит изучать движение практически любого двигателя внутреннего сгорания. На рис. 1 показана расчетная схема для V-образного двигателя.

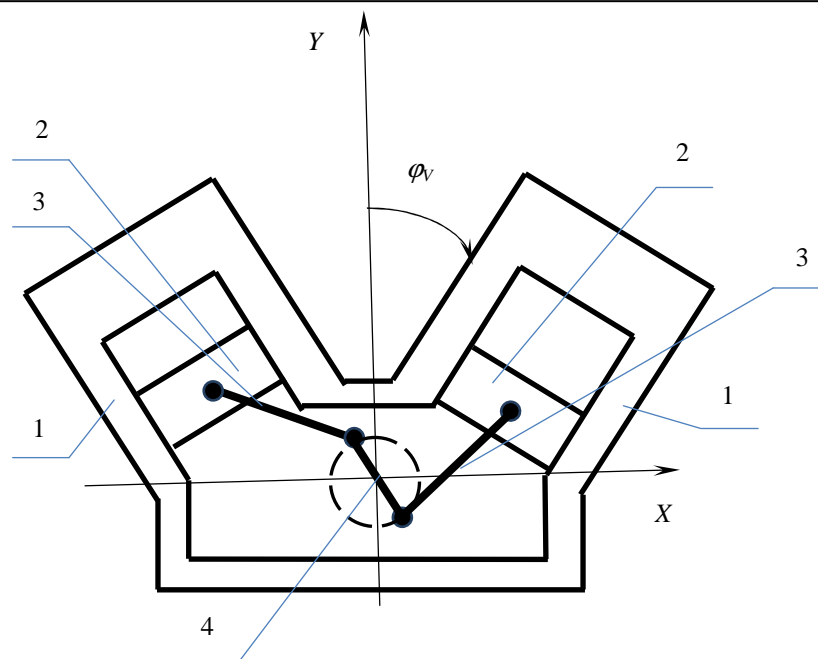


Рис. 1. Расчетная схема двигателя:
1 – блок цилиндров с крышкой и картером; 2 - поршень;
3 – шатун; 4 – коленвал

На рис. 1 приведено одно поперечное сечение V-образного двигателя со случайным положением коленвала. Условимся отсчитывать угловое положение коленвала против часовой стрелки от верхней мертвой точки (ВМТ) правого цилиндра. Если двигатель содержит более одной пары цилиндров, то расчетная схема для последующих пар будет отличаться только угловым положением, которое задается конструкцией коленвала и циклограммой газораспределения. На этой схеме не показаны опоры двигателя, для которых следует определять жесткости и места расположения.

Введем две системы координат: связанную с жестким основанием $Oxuz$, например, с испытательным стендом, и подвижную $OXYZ$, расположенную следующим образом: ось OZ совместим с осью коленчатого вала (далее коленвал); плоскость OXY выберем так, чтобы она проходила через поперечную плоскость симметрии блока цилиндров (предполагая, что она существует). Предполагая также, что существует продольная вертикальная плоскость симметрии блока цилиндров, проходящая через ось коленвала, выберем оси X и Y , как показано на рис. 1. Направление оси Z выберем так, чтобы единичные векторы осей образовывали правую тройку:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Неподвижную систему координат выберем так, чтобы ее оси x, y, z в начале движения были бы параллельны осям системы $OXYZ$.

В общем случае двигатель совершает пространственное сложное движение, которое ограничено его опорами различной конструкции, которые могут включать в себя как упругие, так и вязкие элементы. Обратим внимание на то, что связи двигателя с основанием являются голономными, то есть явно не зависят от времени, а только от характеристик движения двигателя (перемещений и скоростей точек опирания). Так как число степеней свободы двигателя как АТТ равно 6 (то есть три перемещения выбранного начала координат и три угла поворота подвижных осей относительно начала координат), то опоры должны исключать движение двигателя как АТТ, то есть суммарное количество связей, накладываемых на движение двигателя, должно быть не менее 6.

Тогда в качестве обобщенных координат [1] следует выбрать координаты точек опоры; для того, чтобы выяснить их пригодность для этого, выясним их независимость.

Предположим, что координаты опорных точек в системе OXYZ известны. Тогда можно использовать формулу распределения скоростей в твердом теле [1]:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2)$$

где \mathbf{v} – скорость точки; \mathbf{v}_0 – скорость полюса (то есть начала координат OXYZ); $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости; \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 – координаты точки и полюса. Перемещения и углы поворота считаем малыми.

Распределение перемещений при условии малости углов поворота определяется формулой:

$$\mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{u} = \delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}, \quad (3)$$

где $\mathbf{u} = \delta\mathbf{r}$ – вектор перемещения; $\boldsymbol{\theta}$ – вектор малого поворота, связанный с угловой скоростью соотношением:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4)$$

Общепринято выражение угловой скорости и малого поворота через углы Эйлера [1]. В системе координат OXYZ проекции вектора угловой скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_X &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; & \omega_Y &= \dot{\psi} \sin \psi \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_Z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (5)$$

а в неподвижной системе координат Oxyz:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi; & \omega_x &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы получить выражения для вектора малого поворота, надо заменить в (5), (6) производные от углов Эйлера $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ на вариации $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\varphi$.

Таким образом, независимых переменных, через которые выражаются координаты, шесть: перемещения точки $O - u_0, v_0, w_0$ относительно осей и три угла Эйлера: ψ, θ, φ . Их и следует принять за обобщенные координаты.

Возбуждение пространственного движения двигателя определяется наличием в составе его подвижных частей, совершающих относительные движения – это элементы шатунно-поршневой группы (ШПГ) и коленвал. Поршни совершают возвратно-поступательные движения относительно блока цилиндров, шатуны – плоскопараллельные, и коленвал – вращательное движение.

Для вывода уравнений движения используем уравнения Лагранжа II рода, использующие выражения кинетической и потенциальной энергий системы через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Система «Двигатель» совершает сложное пространственное движение, в котором можно выделить переносное движение – движение подсистемы «Блок цилиндров+картер», которые примем за «несущее» тело [1] и относительное движение – вращение коленвала в коренных подшипниках, плоское прямолинейное движение поршней в цилиндрах и плоскопараллельное движение шатунов. Кинетическая энергия системы «Двигатель» может быть представлена в виде суммы трех групп слагаемых:

$$T = T_e + T_m + T_r. \quad (7)$$

Кинетическая энергия переносного движения T_e вычисляется, как будто бы подвижные тела образуют единое твердое тело с несущим:

$$T_e = \frac{1}{2} \left[Mv_0^2 + 2M\mathbf{v}_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C) + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega} \right]. \quad (8)$$

Здесь M – масса системы, $\boldsymbol{\Theta}$ - тензор инерции системы в выбранной подвижной системе координат, \mathbf{r}'_C - радиус-вектор полюса подвижной системы координат в неподвижной $Oxyz$. Так как и полюс, и моменты инерции связаны с относительными перемещениями подвижных частей, то в общем случае обе эти величины зависят от обобщенных координат.

Составляющая T_m определяется формулой

$$T_m = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_r; \quad \mathbf{Q}_r = M_r \mathbf{v}_{Cr}; \quad \mathbf{K}_r = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k, \quad (9)$$

где \mathbf{v}_0 – скорость полюса подвижной системы координат $OXYZ$; $\mathbf{Q}_r, \mathbf{K}_r$ - главный вектор относительных количеств движения и их главный момент относительно полюса подвижной системы координат; m_k – массы подвижных частей; \mathbf{v}_k – их скорости относительно полюса; N – количество подвижных тел.

Составляющая T_m представляет кинетическую энергию относительного движения, которая выражается квадратичной формой обобщенных скоростей с матрицей коэффициентов:

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \mathbf{r}'_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_k}{\partial q_j}. \quad (10)$$

Здесь n - количество обобщенных координат (и обобщенных скоростей).

Виртуальное перемещение любой точки системы определится следующим образом:

$$\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}' = \delta \mathbf{r}_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_k} \delta q_k + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'. \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ - вектор бесконечно малого поворота несущего тела (4).

Элементарная работа активных сил, приложенных как к несущему, так и к носимым телам, определится равенством:

$$\delta' W = \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{m} + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k. \quad (12)$$

Здесь \mathbf{V} – главный вектор; \mathbf{m} – главный момент активных сил относительно полюса.

Располагая выражениями для кинетической энергии и элементарной работы, можно получить систему уравнений движения несущего тела и всех подвижных тел.

При выводе уравнений движения несущего тела используем уравнения Лагранжа II рода [1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Используем выражение для кинетической энергии (7), замечая, что кинетическая энергия относительного движения T_r не зависит от обобщенных скоростей переносного движения:

$$M [\dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'_C + \ddot{\mathbf{r}}'_C] = \mathbf{V}, \quad (14)$$

Здесь

$$\mathbf{a}_e = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C) \quad (15)$$

– переносное ускорение, которое складывается из ускорения полюса

$$\mathbf{a}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0, \quad (16)$$

центростремительного и вращательного ускорений

$$\mathbf{a}^{sp} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_C, \quad \mathbf{a}^{ЦС} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_C); \quad (17)$$

К ним добавляются ускорение Кориолиса

$$\mathbf{a}^{Cor} = 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'_C; \quad \dot{\mathbf{r}}'_C = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'_C}{\partial q_k} \dot{q}_k. \quad (18)$$

и относительное ускорение

$$\mathbf{a}_r = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{r}'_C}{\partial q_k} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{r}'_C}{\partial q_k \partial q_m} \dot{q}_k \dot{q}_m \right). \quad (19)$$

Формула (14) выражает теорему об изменении количества движения системы.

Уравнение вращательного движения несущего тела имеет вид [1]

$$\Theta^C \cdot \omega + \omega \times \Theta^C \cdot \omega = \mathbf{m}^C + \mathbf{m}_{Cor}^C - \dot{\mathbf{K}}_r^C, \quad (20)$$

где

$$\Theta^C = \Theta - M(\mathbf{E}r'_C \cdot r'_C - r'_C r'_C) - \quad (21)$$

- тензор инерции системы в ее центре тяжести,

$$\mathbf{K}_r^C = \mathbf{K}_r^O - Mr'_C \times r'_C - \quad (22)$$

- главный момент количеств движения относительно центра инерции,

$$\mathbf{m}_{Cor}^C = -\Theta^C \cdot \omega - \omega \times \mathbf{K}_r^C - \quad (23)$$

- момент относительно центра инерции кориолисовых сил инерции,

$$\mathbf{m}^C = \mathbf{m}^O - r'_C \times \mathbf{V} - \quad (24)$$

- главный момент активных сил относительно центра инерции.

Из выражений (14), (20) нетрудно заметить, что если определены характеристики относительного движения (относительная скорость, относительное ускорение и т.п.), то пространственное движение несущего тела также определено.

Для составления уравнений относительного движения удобнее исходить из очевидных соображений, связанных с кинематикой вращения коленвала и характером приложения сил, развиваемых поршнями во время выполнения цикла «рабочий ход – продувка – всасывание – сжатие».

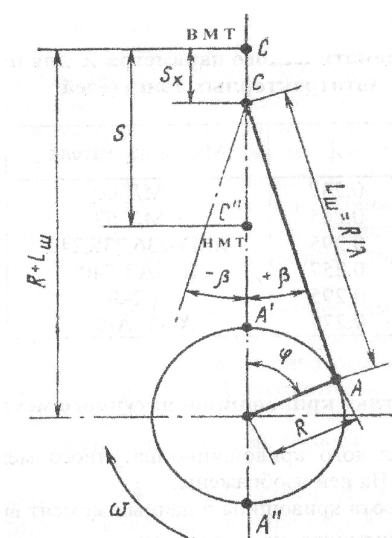


Рис. 2. Кинематика шатунно-поршневой группы

На рис. 2 показано промежуточное положение ШПГ при произвольном положении поршня между верхней и нижней мертвыми точками (вмт и нмт). Пренебрегая деформациями, т.е. считая элементы ШПГ абсолютно твердыми телами, из прямоугольного треугольника OAC' получим очевидное соотношение:

$$C'O \sin \varphi = C'A = L_{ш} . \quad (25)$$

Положение вмт получается при $\varphi=0$: $S_{вмт}=R+L_{ш}$; положение нмт – при $\varphi=\pi$: $S_{нмт}=L_{ш}-R$. Условимся отсчитывать координату s – ход поршня – от вмт. Тогда из (25) получим уравнение голономной связи

$$L_{ш} = (S_{вмт} - s) \sin \varphi . \quad (26)$$

В точке C к шатуну AC присоединен поршень диаметром $d_{пор}$ и массой $m_{пор}$, на который действует сила давления газов в цилиндре

$$F = \frac{\pi d_{пор}^2}{4} p(s), \quad (27)$$

где $p(s)$ – давление продуктов сгорания в цилиндре на такте «рабочий ход», или давление сжимаемой смеси на такте «сжатие».

Сопротивлением газов при продувке и всасывании смеси пренебрежем. Величина давления определяется по индикаторной диаграмме двигателя, которую полагаем известной (например, рис 3). В дальнейшем для использования в решении дифференциальных уравнений движения каждую ветвь представим в аналитической форме политропы:

$$p(s) = p_0 s^a, \quad (28)$$

определяя параметры зависимостей (28) методом наименьших квадратов [2, 3] по реальной индикаторной диаграмме.

Кинетическая энергия поршня вычисляется через координату следующим образом:

$$T_r^{пор} = m_{пор} \frac{\dot{s}^2}{2}. \quad (29)$$

Элементарная работа внешних сил, приложенных к поршню,

$$\delta'A_{пор} = \delta s \frac{\pi d_{пор}^2}{4} p(s). \quad (30)$$

Следующий элемент системы – шатун AC – совершает плоскопараллельное движение. Примем за полюс точку C' ; тогда кинетическая энергия его движения определится следующим образом:

$$T_r^{ш} = m_{ш} \frac{\dot{s}^2}{2} + J_{ш}^{C'} \frac{\dot{\beta}^2}{2}, \quad (31)$$

где $m_{ш}$ – масса шатуна; $J_{ш}^{C'} = \frac{m_{ш} L_{ш}^2}{3}$ – момент инерции шатуна относительно его конца в предположении, что шатун – однородный стержень.

Из рис. 2 следует, что

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \dot{\beta} = -\dot{\varphi}.$$

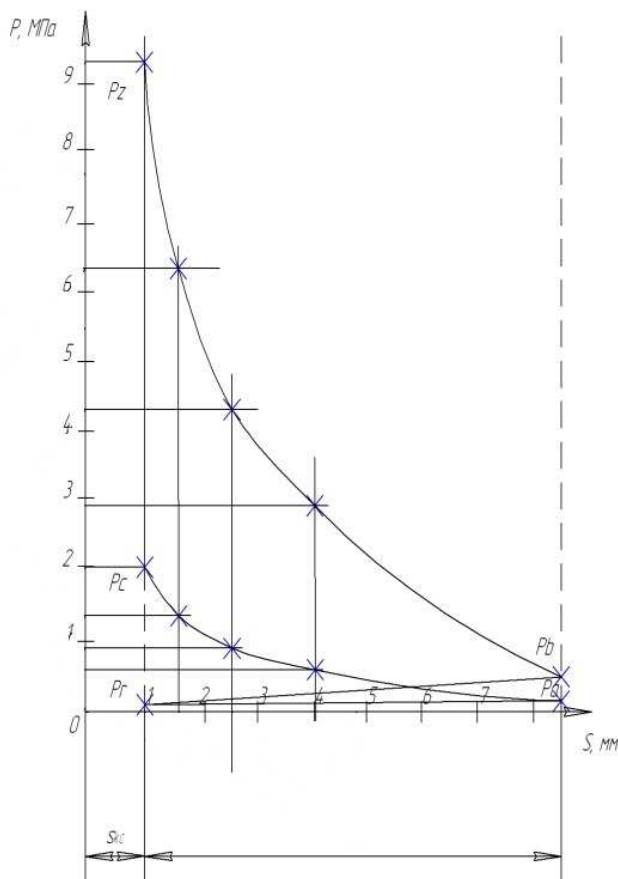


Рис. 3. Индикаторная диаграмма FordFocus

Таким образом, (31) принимает вид

$$T_r^{uu} = m_{uu} \frac{\dot{s}^2}{2} + J_{uu}^{C'} \frac{\dot{\phi}^2}{2}. \quad (32)$$

На точку C' действует сила, приложенная к поршню; ее элементарная работа определяется формулой (30). Коленвал совершает вращательное движение относительно оси, перпендикулярной плоскости рис. 2 (ось Z). Его кинетическая энергия

$$T_r^{KB} = \frac{J_{KB}}{2} \dot{\phi}^2. \quad (33)$$

Предполагается, что коленвал идеально сбалансирован и J_{KB} – его осевой момент инерции.

Вращение коленвала вокруг оси происходит под действием вращающего момента, его элементарная работа

$$\delta A' = \delta \varphi M_{\text{вр}} = \delta \varphi \cdot R \frac{\pi d_{\text{пор}}^2}{4} p(s) \cos \beta = \delta \varphi \cdot R \frac{\pi d_{\text{пор}}^2}{4} p(s) \sin \varphi. \quad (34)$$

Приведенные соотношения справедливы для одноцилиндрового двигателя. Предположим, что у 4-тактного двигателя имеются $2N$ цилиндров рядного расположения ($N=1, 2, 3\dots$). Тогда конструкция коленвала предполагает «зеркальное» расположение шатунных шеек в N плоскостях, угол между которыми составляет $2\pi/N$ [4]. Для такого двигателя угловой интервал между вспышками равен $2\pi/N$.

Если двигатель многорядный, то угловой интервал между вспышками

$$\alpha_{\text{всп}} = \frac{2\pi}{nN}, \quad (35)$$

где n – количество рядов.

Обычно для легковых автомобилей $n=2$, так что

$$\alpha_{\text{всп}} = \frac{\pi}{N}. \quad (36)$$

Последовательность рабочих ходов в цилиндрах приведена на рис. 4. На рис. 4 предполагается, что каждому цилиндру соответствует один кривошип коленвала.

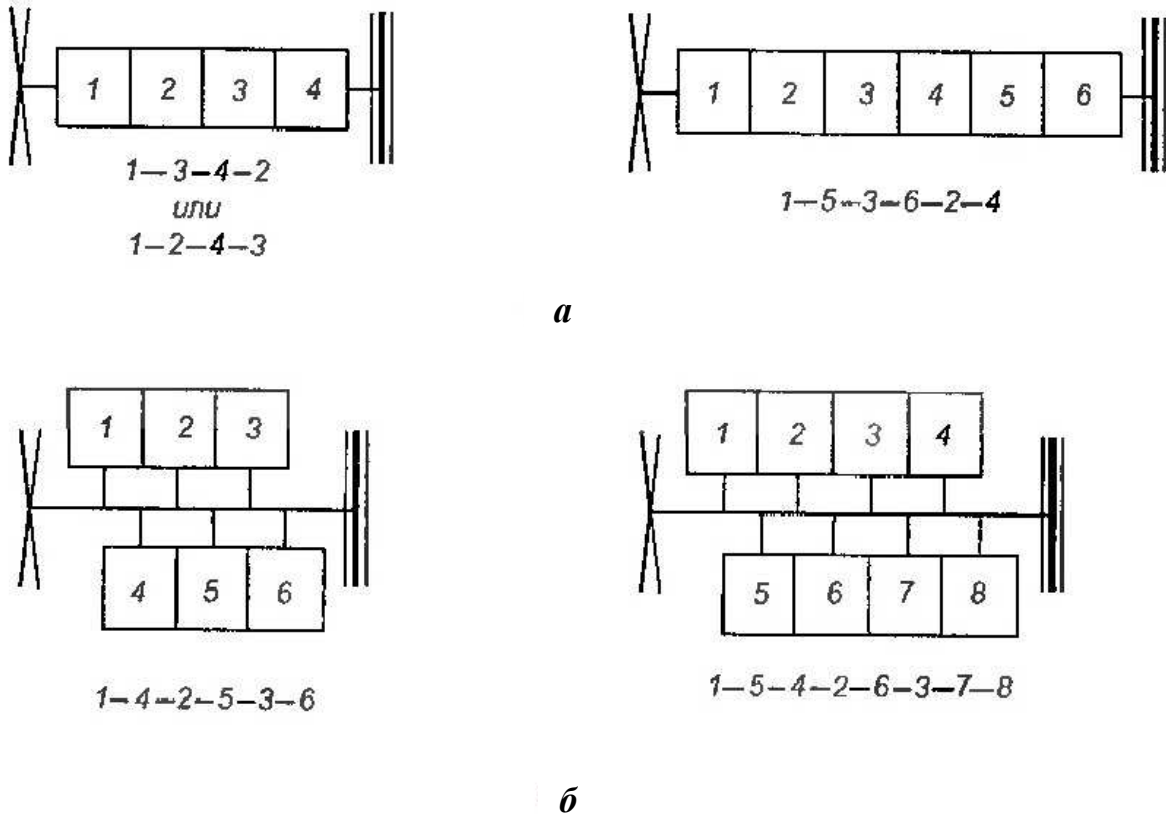


Рис. 4. Последовательность работы цилиндров 4-тактных двигателей: а – рядных; б – V-образных

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двигателей рис. 4.

Рассмотрим последовательность рабочих ходов в первой схеме (рис. 4, а) (т.е. $N=2, n=1$). Предполагается, что отсчет угла идет от вmt цилиндра 1. При последовательности 1-3-4-2 между рабочими ходами цилиндров 1 и 3 существует угловой сдвиг $\alpha_{всн}=\pi$ (34), то есть при рассмотрении соотношений (26) – (33) для цилиндра 3 следует подставлять значение угла $\varphi_3=\varphi-\pi$. Для цилиндра 4 угловой сдвиг между ним и цилиндром 3 будет таким же, т.е. π , а между цилиндрами 1 и 4 – 2π . Между цилиндром 2 и 4 угловой сдвиг также равен π , а между 2 и 1 – 3π . При последовательности 1-2-4-3 роль цилиндра 3 играет цилиндр 2, а цилиндр 3 становится на место цилиндра 2; рассуждения об угловых сдвигах сохраняются.

Аналогично можно рассуждать и при двухрядной схеме (рис. 4, б) ($N=3, n=2$). По (35) угловой сдвиг $\alpha_{всн}=\pi/3$; все рассуждения такие же, как и ранее.

Теперь можно записать общее выражение кинетической энергии

$$T_r = T_r^{KB} + T_r^1 + T_r^2 + T_r^3 + T_r^4 + \dots, \quad (37)$$

где верхний индекс показывает номер цилиндра.

Для 4-цилиндрового однорядного двигателя с последовательностью рабочих ходов 1-3-4-2 имеем

$$T_r = \frac{J_{KB}}{2} \dot{\varphi}^2 + 4J_{ш} \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left\{ \frac{\cos \varphi \left(\cos \varphi - \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} \right)^2}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} \left[\lambda^2 - 1 + 2 \cos \varphi \left(\cos \varphi - \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi} \right) \right]} \right\}^2 + \frac{m_{ш} + m_{пор}}{2} \left\{ \dot{s}^2 + [\dot{s}(\varphi - \pi)]^2 + [\dot{s}(\varphi - 2\pi)]^2 + [\dot{s}(\varphi - 3\pi)]^2 \right\}. \quad (38)$$

Заменим скорости в цилиндрах их выражениями из (34):

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 = \dot{s}_4 &= \dot{\varphi} R \sin \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} - 1 \right); \\ \dot{s}_2 = \dot{s}_3 &= \dot{\varphi} R \sin \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \varphi}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Аналитическими преобразованиями установлено, что скорость первого и четвертого цилиндров, а также третьего и второго равны между собой; тогда (38) можно упростить:

$$T_r = \phi^2 \left[\frac{J_{KB} + 2J_{uu}^{C'}}{2} \left\{ \frac{\cos \phi \left(\cos \phi - \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \phi} \right)^2}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \phi} \left[\lambda^2 - 1 + 2 \cos \phi \left(\cos \phi - \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \phi} \right) \right]} \right\}^2 + \right. \\ \left. + 2(m_{uu} + m_{nop})R^2 \sin^2 \phi \left(\frac{\cos^2 \phi}{\lambda^2 - \sin^2 \phi} + 1 \right) \right]. \quad (40)$$

Элементарную работу внешних сил определим, исходя из сложения работ в каждом цилиндре:

$$\delta' A = \sum_{k=1}^4 \delta' A_k, \quad (41)$$

где k – номер цилиндра.

Для определения $\delta' A_k$ используем (34) с учетом углового сдвига вспышек в каждом цилиндре; ход поршня в аргументе функции $p(x)$ есть разность между $S_{вмт}$ и координатой s , принятой выше. Последовательность рабочих ходов определена (рис. 4).

Для расчётов удобнее использовать развёрнутую индикаторную диаграмму, т.е. зависимость давления в цилиндре от угла поворота коленчатого вала.

$$p(\phi) = -p_{0w} \left[\frac{1 + \lambda(\sqrt{1 - \lambda \sin(\phi)^2} + \lambda \cos(\phi))}{2\lambda} \right]^{a_w} \quad (42)$$

Формула (42) справедлива для такта «рабочий ход», где $0 < \phi < \pi$. Знак «-» перед функцией давления p_{0w} необходим для согласования, т.к. давление действует вниз и поршень движется вниз.

$$p(\phi) = 0. \quad (43)$$

Формула (43) соответствует тактам «продувка» и «всасывание», где $\pi < \phi < 3\pi$:

$$p(\phi) = p_{0c} \left[\frac{1 + \lambda(\sqrt{1 - \lambda \sin(\phi)^2} + \lambda \cos(\phi))}{2\lambda} \right]^{a_c}. \quad (44)$$

Данная формула справедлива для такта «сжатие», где $3\pi < \phi < 4\pi$. Отсутствие знака «-» перед давлением необходимо для согласования движения поршня вверх и направления давления вниз.

Определяем приведенный момент инерции

$$J_{np}(\phi) = \left[J_{KB} + \frac{4J_{ш}\lambda^2 \cos(\phi)^2}{1 - \lambda^2 \sin(\phi)^2} + 4R^2 \sin^2 \phi (m_{ш} + m_{п}) \frac{\lambda^2 \cos(2\phi) + 1}{1 - \sin(\phi)^2 \lambda^2} \right] \quad (45)$$

и его производную по углу поворота коленчатого вала ϕ

$$J_{red\phi}(\phi) = \frac{4 \sin(2\phi)}{\lambda^2 \sin(\phi)^2 - 1} [J_{ш}\lambda^2 + R^2(m_{ш} + m_{п})[2\lambda^2(3\sin(\phi)^2 - 1) - 1] + \\ + \frac{8\lambda^2 \cos \phi \sin \phi}{(\lambda^2 \sin(\phi)^2 - 1)^2} [R^2(m_{ш} + m_{п})(\cos(2\phi)\lambda^2 + 1) + J_{ш}\lambda^2 \cos(\phi)^2]. \quad (46)$$

Приведём уравнение второго порядка

$$J_{np} \frac{d^2}{dt^2} \phi + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\phi} J_{np} \right) \left(\frac{d}{dt} \phi \right)^2 = Q(t) \quad (47)$$

к двум уравнениям первого порядка (вектор состояния $y = (\varphi \ \omega)^T$)

$$y_0 = y_1 \quad (48)$$

$$y_1 = \frac{Q(t)}{J_{пр}} - \frac{1}{2} \frac{J_{пр} \varphi}{J_{пр}} (y_1)^2. \quad (49)$$

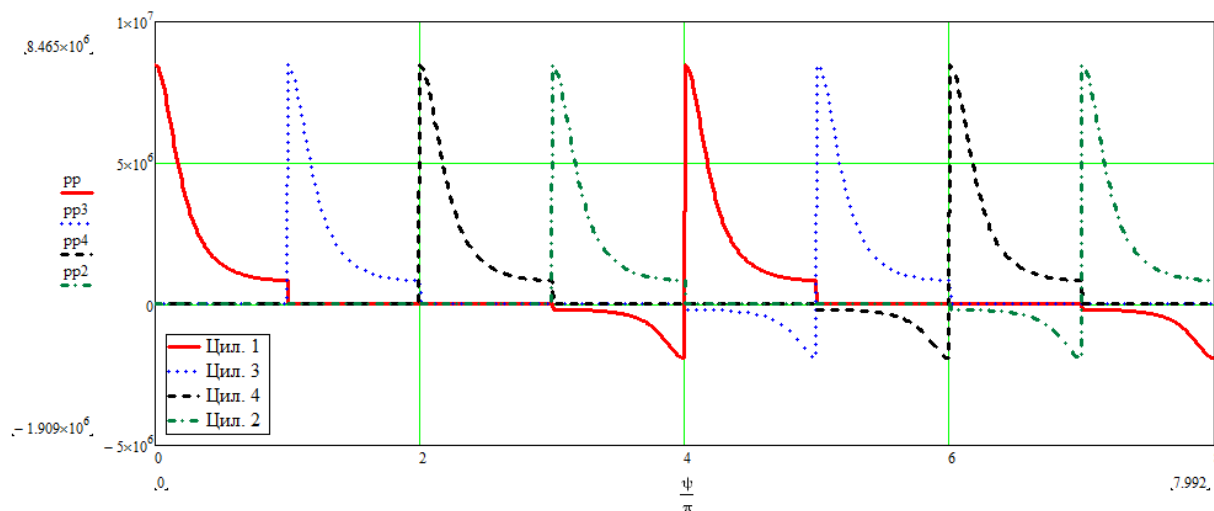


Рис. 5. Диаграмма зависимости давления в каждом цилиндре от угла поворота коленчатого вала

Процедуру интегрирования ОДУ проводим методом Рунге – Кутты 4-го порядка (рис. 6).

```

Rk4(y0, t0, tk, h, D) :=
| t ← t0
| y ← y0
| Res ← augment[(t), yT]
| while t ≤ tk
|   | k1 ← D(t, y)
|   | k2 ← D(t + h/2, y + h/2 · k1)
|   | k3 ← D(t + h/2, y + h/2 · k2)
|   | k4 ← D(t + h, y + h · k3)
|   | t ← t + h
|   | y ← y + h/6 · (k1 + 2 · k2 + 2 · k3 + k4)
|   | Res ← stack[Res, augment[(t), yT]]
| return Res
    
```

Рис. 6. Процедура интегрирования ОДУ

На рис. 6 y_0 – вектор начальных условий; t_0, t_k – пределы интервала интегрирования; h – фиксированный шаг интегрирования; $D(t, y)$ – функция двух переменных, вычисляющая производные.

Результатом решения будет являться матрица, в которой первый столбец – аргумент, второй и последующие – искомые функции.

По полученной в результате интегрирования ОДУ (49) матрице строим график зависимости угловой скорости коленчатого вала от времени (рис. 7).

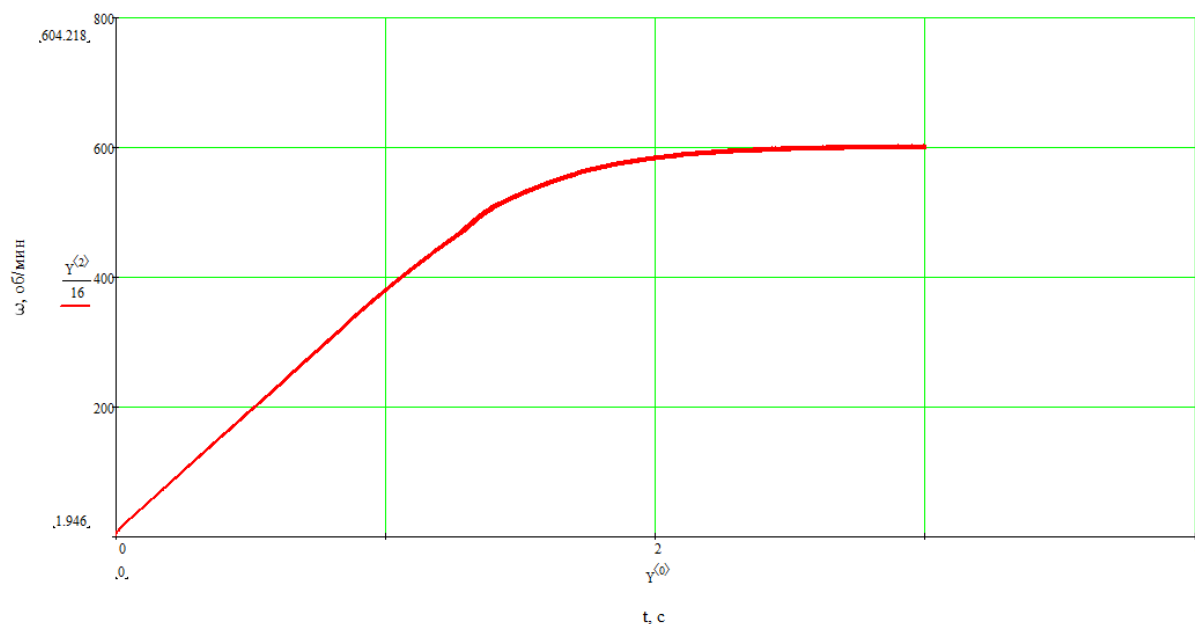


Рис. 7. График зависимости угловой скорости коленчатого вала от времени

Из графика видно, что время выхода двигателя на установившийся режим с угловой скоростью коленчатого вала 600 об/мин при условии запуска его со стартера составляет порядка 2 секунд.

Список литературы

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 824 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
3. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986. 232 с.
4. Стуканов В.А. Основы теории автомобильных двигателей и автомобиля. М.: ФОРУМ – ИНФРА-М, 2005. 367 с.

Андреев Сергей Сергеевич, магистр, aiax@tsu.tula.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет,

Мягков Юрий Вячеславович, канд. техн. наук, доц., aiax@tsu.tula.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет,

Курицин Валерий Владимирович, инженер, aiax@tsu.tula.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет

MATHEMATICAL MODEL OF THE MOTOR VIBRATIONS

S.S. Andreev, Y.V. Myagkov, V.V. Kuritsin

A universal mathematical 3D-model of the internal combustion engine vibrations, applicable for both in-line and for the V-engine models is first constructed.

Key words: internal combustion engine, vibrations, mathematical model.

Andreev Sergej Sergeevich, master, aiax@tsu.tula.ru, Russia, Tula, Tula State University,

Myagkov Jurij Vjacheslavovich, candidate of technical sciences, docent, aiax@tsu.tula.ru, Russia, Tula, Tula State University,

Kuritsin Valeriy Vladimirovich, engineer, aiax@tsu.tula.ru, Russia, Tula, Tula State University

УДК 658.5.012.1

ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО СОСТАВА РЕМОНТНЫХ БРИГАД ПРИ УПРАВЛЕНИИ КАЧЕСТВОМ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

М.А. Носов, А.Л. Сабина, Н.В. Анцева

Представлена методика управления качеством технического обслуживания и ремонта оборудования промышленного предприятия по критерию оптимального количественного состава ремонтных бригад предприятия. Выявлены способы его оптимизации, приведены способы нахождения показателей качества функционирования ремонтной службы.

Ключевые слова: управление качеством, производственный процесс, техническое обслуживание, ремонт, ремонтные бригады, численность персонала

В настоящее время все более актуальной становится задача рациональной организации на промышленных предприятиях работ по техническому обслуживанию и ремонту основного технологического оборудования с целью увеличения его работоспособности и долговечности, уменьшения длительности простоев и увеличения на этой основе